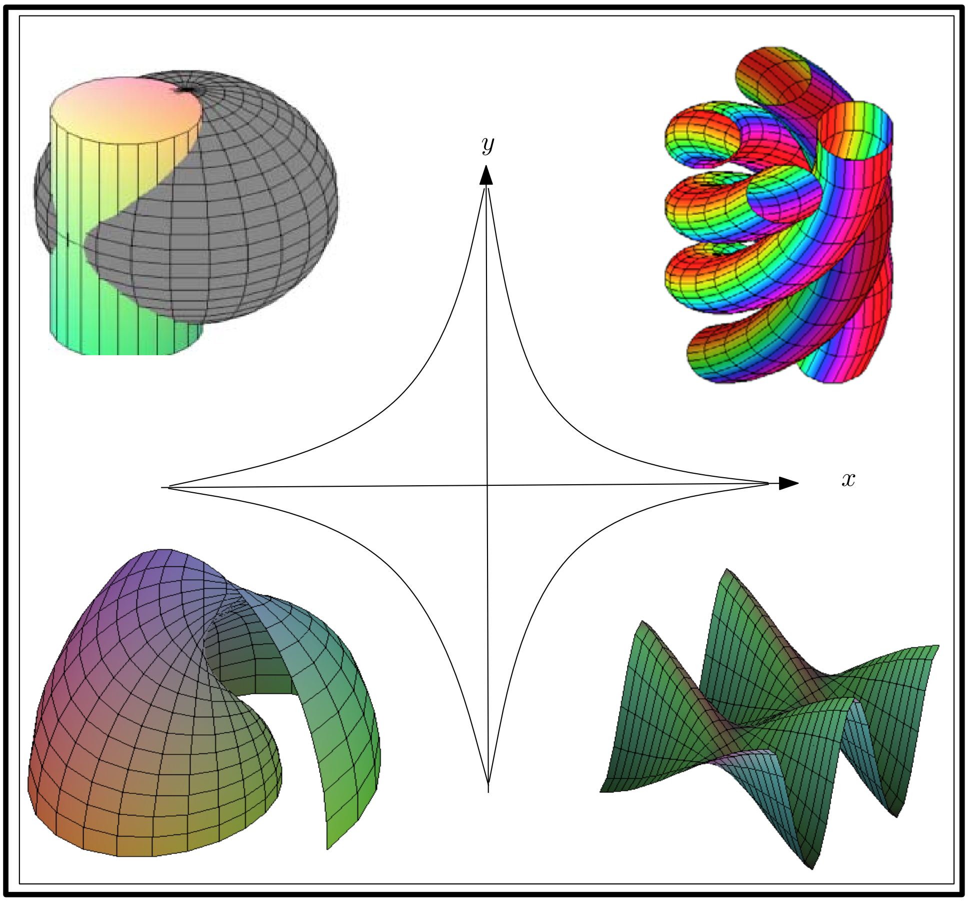
ریاضی عمومی ۲

حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری و توابع حقیقی چند متغیره



گردآوری و تدوین : دکتر سید قهرمان طاهریان و دکتر فرید بهرامی

اعضای هیأت علمی دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

پیش‌گفتار

هدف اصلی این کتاب آشنا کردن دانشجویان رشته‌های فنی ومهندسی با مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیره است. در این راستا سعی کرده‌ایم مفاهیم پایه به شکل ساده‌ای مطرح شوند تا دانشجویان به صورت خودآموز هم از آن استفاده کنند.

طرح اولیه‌ی این کتاب بر اساس جزوه‌هایی از مؤلفین برای تدریس در دانشگاه صنعتی اصفهان نوشته شده است. بخشی از فصل اول کتاب با همکاری آقایان دکتر منصور آقاسی و دکتر رسول نصراصفهانی تهیه شده و در اینجا لازم می‌دانیم از ایشان و همه‌ی همکارانی که به نحوی ما را یاری کرده‌اند صمیمانه سپاسگزاری کنیم.

داوری در مورد این کتاب را به صاحب‌نظران و دانشجویان واگذار می‌کنیم و از همه‌ی این بزرگواران تقاضامندیم ما را در رفع کاستی‌های آن یاری دهند.

تابستان ۱۳۹۳

دکتر سید قهرمان طاهریان

دکتر فرید بهرامی

فهرست مطالب

فصل ۳ مشتق‌پذیری و اکسترمم‌های توابع حقیقی چند متغیره

فصل ۴ انتگرال‌های چندگانه

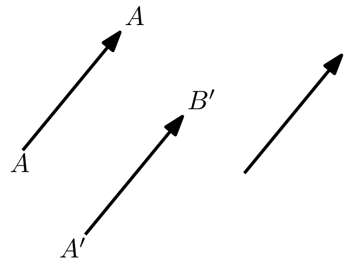
فصل ۵ آنالیز برداری

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱ − ۱ مقدمه‌ای بر بردارها

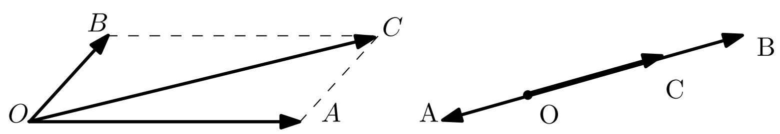
یکی از اهداف این درس آشنایی با توابع برداری و تعمیم مفاهیم حسابان از توابع حقیقی یک متغیره به این دسته از توابع است. برای این منظور نخست به بحث بردار و مفاهیم وابسته به آن می‌پردازیم. از جنبه‌ی تاریخی مفهوم بردار نخستین بار در علم فیزیک و برای بیان مفاهیمی مانند سرعت، نیرو، ... مطرح شد. ویژگی اصلی و مشخص‌کننده‌ی این مفاهیم داشتن **اندازه و جهت** است که از این پس آنها را بردار می‌نامیم و با حروف کوچک لاتین مانند $\mathbf{b}, \mathbf{a}$, ... نمایش می‌دهیم. در ادامه‌ی بحث به‌طور دقیق‌ترمفهوم بردار را مطرح خواهیم‌کرد. از لحاظ هندسی یک بردار به‌وسیله‌ی یک پاره‌خط جهت‌دار قابل نمایش است که طول آن طول بردار و جهت آن جهت بردار است. برای برداری چون $\mathbf{a}$، اندازه‌ی $\mathbf{a}$ را با نماد $\|\mathbf{a}\|$ نشان می‌دهیم. نمایش‌های هندسی مختلف را **نمایش‌های یک بردار** می‌نامیم هرگاه پاره‌خط‌های نظیر آنها موازی، هم‌طول و هم‌جهت باشند. چنین نمایش‌هایی را **بردارهای هم‌سنگ** نیز می‌نامیم (شکل ۱−۱).



شکل ۱−۱ بردارهای هم‌سنگ.

بر مبنای این تعریف دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را مساوی می‌نامیم و با نماد $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ نمایش می‌دهیم هرگاه دارای نمایش‌های هندسی هم‌سنگ باشند. روشن است که هر نمایش هندسی بردار $\mathbf{a}$ مشخص‌کننده‌ی یک نقطه‌ی آغازی مانند A و یک نقطه‌ی پایانی مانند B است. در این صورت $\mathbf{a}$ را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نیز نمایش می‌دهیم. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را **موازی** می‌نامیم هرگاه راستاهای متناظر آنها موازی باشند. برای دو بردار موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می‌نویسیم $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$.

برای دو بردار غیر موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با انتخاب نقطه‌ای مانند O، نقاط A و B وجود دارند به گونه‌ای که بردار $\overrightarrow{OA}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{a}$ و بردار $\overrightarrow{OB}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{b}$ باشد. در این صورت نقطه‌ای چون C در صفحه‌ی در برگیرنده‌ی O، A و B وجود دارد به قسمی که چهار ضلعی $OACB$ یک متوازی‌الاضلاع است. بردار با نمایش هندسی $\overrightarrow{OC}$ را حاصل جمع $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می‌نامیم و با $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱ــ۲).
به سادگی می‌توان نشان داد که بردار حاصل جمع مستقل از انتخاب نقطه‌ی O است. به این معنی که اگر O' نقطه‌ای غیر از O و $\overrightarrow{O'A'}$ و $\overrightarrow{O'B'}$ به ترتیب نمایش‌های هندسی دیگری برای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشند، با تکرار روند فوق، بردار $\overrightarrow{O'C'}$ هم‌سنگ $\overrightarrow{OC}$ است. در حالتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی باشند، بردار حاصل جمع، برابر بردار نظیر حاصل جمع جبری پاره‌خط‌های OA و OB تعریف می‌شود (شکل ۱ــ۲). مشاهده می‌شود که جمع بردارها خاصیت‌های جابجایی و شرکت‌پذیری دارد.

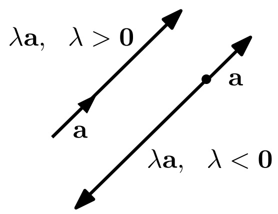


شکل ۱ــ۲ جمع بردارها (قانون متوازی‌الاضلاع).

در بررسی مواردی که در برگیرنده‌ی مفهوم بردار است، وجود عنصری با اندازه‌ی صفر ولی بدون جهت ضروری است. این عنصر منحصر به فرد را **بردار صفر** می‌نامیم و آن را با نماد $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم. از لحاظ هندسی چنین برداری با یک نقطه قابل نمایش است. برای بردار دلخواه $\mathbf{a}$ بردارهای $\mathbf{a} + \mathbf{0}$ و $\mathbf{0} + \mathbf{a}$ را برابر $\mathbf{a}$ تعریف می‌کنیم. برای بردار غیرصفر $\mathbf{a}$ با نمایش هندسی $\overrightarrow{AB}$، برداری وجود دارد که نمایش هندسی آن $\overrightarrow{BA}$ است. این بردار را **قرینه‌ی** $\mathbf{a}$ می‌نامیم و با نماد $-\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. روشن است که برای هر بردار $\mathbf{a}$ بردار $\mathbf{a} + (-\mathbf{a})$ همان بردار $\mathbf{0}$ است.

برای برداری چون $\mathbf{a}$ با نمایش هندسی $\overrightarrow{AB}$ و عدد مثبت $\lambda \in \mathbb{R}$ که از این پس **اسکالر** نیز نامیده می‌شود، نقطه‌ای مانند C بر خط گذرنده بر نقاط A و B وجود دارد به قسمی

که $\|\overrightarrow{AC}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{AB}\|$ و $\overrightarrow{AC}$ با $\overrightarrow{AB}$ هم‌جهت باشد. این بردار را با نماد $\lambda\mathbf{a}$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $\lambda < 0$، بردار $\lambda\mathbf{a}$ را به عنوان قرینه‌ی بردار $|\lambda|\mathbf{a}$ تعریف می‌کنیم (شکل ۱—۳). سرانجام اگر $\mathbf{a}$ بردار صفر یا λ اسکالر صفر باشد، $\lambda\mathbf{a}$ را بردار صفر تعریف می‌کنیم. بردار $\lambda\mathbf{a}$ را ضرب اسکالر λ در بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم.



شکل ۱—۳ ضرب اسکالر در یک بردار.

برای هر دو اسکالر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، ویژگی‌های زیر قابل تحقیق است.

$$(\lambda+\mu)\ \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \quad , \quad \lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} \quad , \quad \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \quad , \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

مجموعه‌ی بردارهای هندسی با دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالری حالت خاصی از یک ساختار کلی‌تر موسوم به فضای برداری است که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

۱–۲ فضای برداری

یکی از رهیافت‌های مهم در گسترش ریاضیات، تجرید و انتزاع یک مفهوم مشترک و کلی بر اساس مثال‌های خاص است. با این روش راه برای ارائه‌ی قضیه‌های کلی و مستقل از مثال‌ها گشوده می‌شود. یکی از این مفاهیم که موضوع این بخش است، مفهوم فضای برداری است. در اینجا فضای برداری را فقط روی میدان اعداد حقیقی معرفی می‌کنیم ولی این تعریف برای میدان‌های دلخواه هم به همین شکل بیان می‌شود.

مجموعه ناتهی V همراه با عمل دوتائی $+ : V \times V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a} + \mathbf{b}$ و نگاشت $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $(\lambda, \mathbf{a}) \longmapsto \lambda \cdot \mathbf{a} =: \lambda\mathbf{a}$ را یک **فضای برداری روی** $\mathbb{R}$ می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف) برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

ب) برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

ج) عضوی چون $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ وجود داشته باشد که برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

د) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ عضوی چون $-\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ وجود داشته باشد که $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

ه) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، $1\ \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

و) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$، $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ و $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.
ز) برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

عمل دوتایی «$+$»، **جمع برداری**، نگاشت «$\cdot$» **ضرب اسکالری** و اعضای V **بردار** نامیده می‌شوند. برای بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ و اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$، بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را **جمع برداری** $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و بردار$\lambda\mathbf{a}$ را ضرب اسکالر λ در بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم. بردار $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ را **بردار صفر** و برای بردار $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، بردار $-\mathbf{a}$ را **قرینه‌ی $\mathbf{a}$** می‌نامیم.
می‌توان ثابت کرد که بردار صفر در هر فضای برداری منحصر به فرد است. همچنین برای هر بردار $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، بردار $-\mathbf{a}$ نیز یگانه است.

مثال ۱-۲-۱ ۱) بنابر آنچه در بخش قبلی بیان شد، مجموعه تمام بردارهای هندسی همراه با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری یک فضای برداری است.

مثال بعدی یک مثال اساسی است که ریشه در هندسه‌ی تحلیلی دارد.

۲) برای $n \in \mathbb{N}$ فرض کنیم $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \ : \ x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$. در این صورت $\mathbb{R}^n$ با جمع برداری و ضرب اسکالری

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

یک فضای برداری است.

مثال‌های بعد نشان می‌دهند که عناصر یک فضای برداری (بردارها) می‌توانند مفاهیم مجردی مانند ماتریس، تابع و ... از حوزه‌های گوناگون ریاضی باشند.

۳) فرض کنیم $M_{m\times n}$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. در این صورت مجموعه‌ی $M_{m\times n}$ همراه با اعمال جمع ماتریسی و ضرب اسکالر با ماتریس تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

۴) فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$C(I, \mathbb{R}) := \{f \mid \text{است } I \text{ تابعی پیوسته بر بازه‌ی } f : I \to \mathbb{R}\}$$

همراه با اعمال جمع توابع و ضرب اسکالر در توابع تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

۵) فرض کنیم $V = \mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$. روی V جمع برداری را به صورت $a \oplus b := ab$ و ضرب اسکالری را با $\lambda \cdot a := a^\lambda$ تعریف می‌کنیم. در این صورت V همراه با این اعمال تشکیل یک فضای برداری می‌دهد. (تحقیق کنید!)

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. زیر مجموعه‌ی ناتهی W از V را یک **زیرفضای برداری** V می‌نامیم هرگاه W همراه با تحدید عمل جمع برداری و ضرب اسکالری به W، یک فضای برداری باشد.

مشاهده می‌شود که مجموعه‌ی ناتهی $W \subseteq V$ یک زیرفضای برداری V است اگر و تنها اگر نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالری بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \in \mathbf{W}$.

برای بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ در V و اسکالرهای $\lambda_۱, \cdots, \lambda_n$، بردار $\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ را یک **ترکیب خطی** از بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ در V تشکیل یک زیرفضای برداری از V می‌دهد. این زیرفضا را با نماد $\langle\{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\}\rangle$ نمایش می‌دهیم و آن را **زیرفضای تولید شده** توسط بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ می‌نامیم.

مجموعه‌ی بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ را در فضای برداری V **مستقل خطی** می‌نامیم هرگاه از $\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ نتیجه شود $\lambda_۱ = \cdots = \lambda_n = ۰$. در غیر این صورت این بردارها را **وابسته‌ی خطی** می‌نامیم.

مجموعه‌ی بردارهای $\{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\} \subseteq V$ را **یک پایه** برای V می‌نامیم هرگاه مستقل خطی باشند و $V = \langle\{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\}\rangle$.

ثابت می‌شود که اگر V یک پایه‌ی n عضوی داشته باشد، هر پایه‌ی دیگر V نیز n عضو دارد. عدد منحصر به فرد n را **بعد فضای** V نامیده و آن را با نماد $\dim V$ نمایش می‌دهیم.

در حالتی که هیچ زیر مجموعه‌ی باپایانی از بردارهای مستقل خطی فضای برداری را تولید نکند، فضا را **با بعد بی‌پایان** می‌نامیم.

مثال ۱-۲-۲ ۱) بردارهای $\mathbf{a} = (۱, ۱, -۲)$ و $\mathbf{b} = (۱, ۲, ۳)$ در $\mathbb{R}^۳$ مستقل خطی هستند. در واقع اگر $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ آنگاه λ, μ جواب‌های دستگاه زیر هستند.

$$\begin{cases} \lambda + \mu = ۰ \\ ۲\lambda + \mu = ۰ \\ ۳\lambda - ۲\mu = ۰ \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که $\lambda = \mu = ۰$ تنها جواب این دستگاه است. امّا به ازای $\mathbf{c} = (۲, ۲, -۴)$، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ وابسته‌ی خطی هستند، زیرا برای $\lambda = ۲$ و $\mu = -۱$ داریم $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c} = \mathbf{0}$. به همین ترتیب به‌ازای $\mathbf{d} = (۳, ۵, ۴)$ بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{d}$ وابسته‌ی خطی هستند. زیرا به ازای اسکالرهای $\lambda_۱ = ۲$، $\lambda_۲ = ۱$ و $\lambda_۳ = -۱$ داریم $\lambda_۱\mathbf{a} + \lambda_۲\mathbf{b} + \lambda_۳\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

۲) مجموعه‌ی $W = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است. بردارهای $\mathbf{a} = (2, 0, 0)$ و $\mathbf{b} = (0, 3, 0)$ در W مستقل هستند و برای هر $\mathbf{c} = (x, y, 0)$ می‌توان نوشت $\mathbf{c} = \frac{x}{2}\mathbf{a} + \frac{y}{3}\mathbf{b}$. یعنی مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ تشکیل یک پایه برای W می‌دهد. بنابراین $\dim W = 2$.

۳) فرض کنیم $V = C(I, \mathbb{R})$، $f_0(x) = 1$، $f_1(x) = x$، $f_2(x) = x^2$ و $f_3(x) = x^3$. در این صورت زیر فضای تولید شده به وسیله‌ی f_3, f_2, f_1, f_0 عبارت است از $P_3(I, \mathbb{R})$، چندجمله‌ای‌های یک متغیره با درجه کوچکتر یا مساوی ۳. چون f_3, f_2, f_1, f_0 مستقل خطی هستند، $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ تشکیل یک پایه برای زیرفضای $P_3(I, \mathbb{R})$ می‌دهد. بنابراین $\dim P_3(I, \mathbb{R}) = 4$. به ازای $f_0(x) = 1$، $f_1(x) = x$، ...، $f_n(x) = x^n$، ... زیرفضای تولید شده به‌وسیله‌ی f_0، f_1، $\cdots$ عبارت است از $P(I, \mathbb{R})$، فضای چندجمله‌ای‌های یک متغیره. هر زیرمجموعه‌ی دلخواه از $\{f_0, f_1, \ldots\}$ یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی است. در واقع $P(I, \mathbb{R})$ یک زیرفضای با بعد بی‌پایان و $\{f_0, f_1, \ldots\}$ یک پایه برای آن است.

۴) در فضای برداری $\mathbb{R}^n$، برای $i = 1, \cdots, n$ قرار می‌دهیم $\mathbf{e}_i := (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ که در آن عدد ۱ مولفه‌ی i ام $\mathbf{e}_i$ است. در این صورت برای هر $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$، $(x_1, \cdots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. به این ترتیب $\mathbb{R}^n = \langle\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}\rangle$. مشاهده می‌شود که بردارهای $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ مستقل خطی نیز هستند. بنابراین مجموعه‌ی $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است و در نتیجه $\dim \mathbb{R}^n = n$. این پایه را **پایه‌ی استاندارد** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.

در قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین استقلال خطی، فضای تولید شده و پایه‌ی فضای برداری n بعدی $\mathbb{R}^n$ بیان می‌شود. برای اثبات این قضیه به کتاب‌های مقدماتی جبر خطی مراجعه کنید.

قضیه ۱-۲-۳ فرض کنیم B یک زیر مجموعه‌ی n عضوی از $\mathbb{R}^n$ باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

الف) $\mathbb{R}^n = \langle B\rangle$.

ب) B مستقل خطی است.

ج) B یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

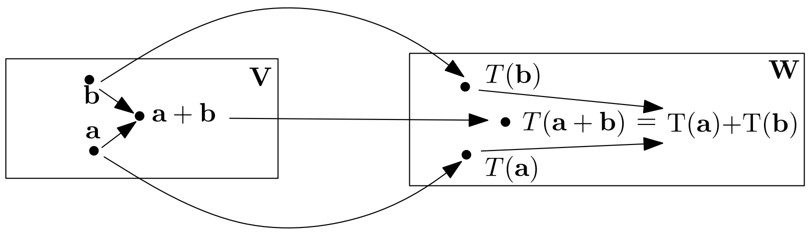
۱–۳ تبدیل‌های خطی و ماتریس‌ها

یکی از مهم‌ترین بخش‌های هر شاخه از ریاضی ارائه‌ی تعریف دقیقی برای همانند بودن ساختارها است. برای مثال میخواهیم ببینیم فضاهای برداری از دید جبری و علی‌رغم تفاوت ظاهری و صوری تحت چه شرایطی همانند هستند. ابزار اصلی این ایده مفهوم تبدیل خطی بین فضاهای برداری است. در باره‌ی این مفهوم در کتاب‌های استاندارد جبر خطی به تفضیل صحبت می‌شود. در این قسمت ما به اختصار به این مفهوم می‌پردازیم.

فرض کنیم V و W دو فضای برداری باشند. نگاشت $T : V \to W$ را یک **نگاشت (تبدیل) خطی** می‌نامیم هرگاه برای هر اسکالر λ و هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ داشته باشیم

$$T(\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$$

یک تبدیل خطی $T : V \to W$، بردارهای فضای V را طوری به بردارهای فضای W تصویر می‌کند که به ترتیب، تصویرِ جمع و ضربِ اسکالرِ دو بردار به ترتیب، با جمع و ضربِ اسکالرِ تصویرِ این دو بردار یکی باشد. به بیان شهودی‌تر، تبدیل‌های خطی ساختار جبری فضا را حفظ می‌کنند. طبق تعریف تبدیل خطی، $T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$. بنابر این اگر دو بردار را با هم جمع کنیم و تصویر مجموع را به دست آوریم به همان نتیجه می‌رسیم که تصویر بردارها را با هم جمع کنیم. به همین ترتیب طبق تعریف تبدیل خطی $T(\lambda \mathbf{a}) = \lambda T(\mathbf{a})$. بنابر این اگر اسکالر λ را در بردار $\mathbf{a}$ ضرب اسکالری کنیم و تصویر $\lambda \mathbf{a}$ را به دست آوریم به همان نتیجه می‌رسیم که ابتدا بردار $\mathbf{a}$ را تصویر و سپس آن را در λ ضرب اسکالری کنیم. به این ترتیب یک تبدیل خطی، هر ترکیب خطی از بردارها را به ترکیب خطی تصویر آنها تبدیل می‌کند. نام تبدیل خطی برای این نگاشت به خاطر همین نکته است (شکل ۱–۴).



شکل ۱–۴ نحوه‌ی عمل یک نگاشت خطی در حفظ ساختار جمعی.

در صورتی که T یک‌به‌یک و پوشا نیز باشد آنرا یک **یکریختی** و فضاهای برداری V و W را **یکریخت** می‌نامیم. می‌توان نشان داد که اگر $T : V \to W$ یک یکریختی

و $\{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه $\{T(\mathbf{a}_۱), \cdots, T(\mathbf{a}_n)\}$ یک پایه برای W است. پس در این حالت $\dim V = \dim W$.

مثال ۱–۳–۱ فضای برداری $W = \{(x, y, ۰) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ با فضای برداری $\mathbb{R}^۲$ یکریخت است. زیرا به ازای نگاشت یک به یک و پوشای $T : W \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $T(x, y, ۰) = (x, y)$ به سادگی تحقیق می‌شود که $T(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$.

نگاشت‌های خطی رابطه‌ی بسیار نزدیکی با ماتریس‌ها دارند. حتی می‌توان گفت هر دو یک مفهوم جبری با سبک نمایش متفاوت هستند. در کتاب‌های درسی پیش از دانشگاه، در مورد ماتریس به تفضیل بحث می‌شود ولی ماهیت اصلی و نقش بنیانی این مفهوم وقتی مشخص می‌شود که رابطه‌ی ماتریس‌ها با تبدیل‌های خطی روشن شود. در این قسمت اگر چه اندکی از بحث اصلی دور می‌شویم ولی برای درک عمیق‌تر مفهوم مشتق توابع حقیقی چند متغیره لازم می‌بینیم که به طور مختصر رابطه‌ی بین نگاشت‌های خطی و ماتریس‌ها مطرح شود. در اینجا بحث را برای حالت خاص $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ بیان می‌کنیم.

در کتاب‌های مقدماتی یک ماتریس $m \times n$ مانند $M = (a_{ij})$ به عنوان آرایه‌ای با m سطر و n ستون از اسکالرهای a_{ij} به شکل زیر معرفی می‌شود.

$$M_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

به نگاشت خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ می‌توان به شکل یکتا یک ماتریس $m \times n$ مانند $A = (a_{ij})_{m\times n}$ نظیر کرد. برای مشخص کردن درایه‌های این ماتریس فرض کنیم $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^n$ و $\{e'_۱, \cdots, e'_m\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^m$ باشد. با توجه به این که برای $i = ۱, \cdots, n$، بردار $T(e_i)$ برداری از $\mathbb{R}^m$ و $\{e'_۱, \cdots, e'_m\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^m$ است، اسکالرهای a_{ij} وجود دارند به قسمی که برای $i = ۱, \cdots, n$ داریم

$$T(e_i) = a_{i۱}e'_۱ + \cdots + a_{im}e'_m$$

بر این اساس مقدار $T(\mathbf{x})$ را به ازای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ می‌توان به صورت $A\mathbf{x}^t$ نیز بیان کرد که $\mathbf{x}^t$ ترانهاده‌ی $\mathbf{x}$ و A ماتریسی است که به شکل فوق از T به دست می‌آید.

مثال ۱–۳–۲ نگاشت $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی $T(x, y) = (۲x + y, x - y, x + ۴y)$ یک تبدیل خطی است. این نگاشت یک به یک هست ولی پوشا نیست. ماتریس نظیر این

نگاشت یک ماتریس ۲×۳ به شکل $A = (a_{ij})_{۳\times ۲}$ است. برای مشخص کردن درایه‌های این ماتریس ابتدا $e_۱ = (۱, ۰)$، $e_۲ = (۰, ۱)$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^۲$ و $e'_۱ = (۱, ۰, ۰)$، $e'_۲ = (۰, ۱, ۰)$، $e'_۳ = (۰, ۰, ۱)$, پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^۳$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$T(e_۱) = T(۱, ۰) = (۲, ۱, ۱) = ۲\ e'_۱ + ۱\ e'_۲ + ۱\ e'_۳$$

پس به ترتیب از بالا به پایین $۲, ۱, ۱$ عناصر ستون اول ماتریس هستند. به همین ترتیب،

$$T(e_۲) = T(۰, ۱) = (۱, -۱, ۴) = ۱\ e'_۱ + (-۱)\ e'_۲ + ۴\ e'_۳$$

یعنی به ترتیب از بالا به پایین $۱, -۱, ۴$ عناصر ستون دوم ماتریس A هستند. پس

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

در این مثال برای $\mathbf{x} = (x, y)$ مشاهده می‌شود که

$$A\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (۲x + y, x - y, x + ۴y) = T(\mathbf{x})$$

مثال ۱-۳-۳ نگاشت $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $T(x, y) = (x - y, ۳x - ۲y)$ یک تبدیل خطی یک به یک و پوشا است. ماتریس نظیر این نگاشت یک ماتریس ۲×۲ به شکل $A = (a_{ij})_{۲\times ۲}$ است. برای مشخص کردن درایه‌های این ماتریس ابتدا $e_۱ = (۱, ۰)$، $e_۲ = (۰, ۱)$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^۲$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$T(e_۱) = T(۱, ۰) = (۱, ۳) = e_۱ + ۳\ e_۲$$

پس به ترتیب از بالا به پایین ۱ و ۳ عناصر ستون اول ماتریس هستند. به همین ترتیب،

$$T(e_۲) = T(۰, ۱) = (-۱, -۲) = (-۱)\ e_۱ + (-۲)\ e_۲$$

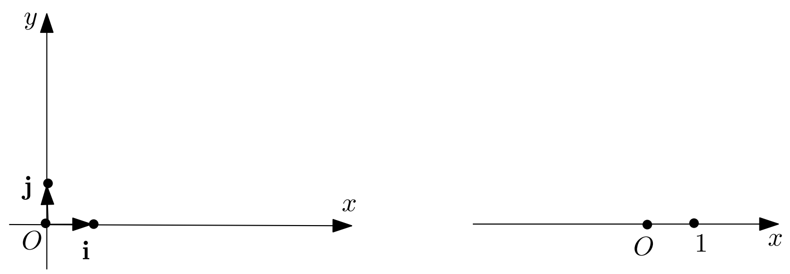
یعنی به ترتیب از بالا به پایین -۱ و -۲ عناصر ستون دوم ماتریس A هستند. پس

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{pmatrix}$$

در ادامه نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی تمام بردارهای هندسی در صفحه (فضا) و فضای برداری $\mathbb{R}^۲$ ($\mathbb{R}^۳$) یکریخت هستند. بدین منظور ابتدا به یادآوری مفهوم دستگاه مختصات قائم می‌پردازیم. این دستگاه را **دستگاه مختصات دکارتی** نیز می‌نامند.

با در نظر گرفتن یک خط جهت‌دار $\overrightarrow{Ox}$ با یک نقطه‌ی ثابت O روی آن به نام **مبداء** و یک واحد طول می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی اعداد حقیقی و نقاط خط بر قرار ساخت (شکل ۱ــ۵).

به همین ترتیب به‌وسیله‌ی دو خط جهتدار متعامد $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy}$ با نقطه مشترک O به نام **مبداء** و یک واحد طول مشترک روی دو محور می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی زوج‌های مرتب $\mathbb{R}^2$ و نقاط صفحه برقرار ساخت. این صفحه را **صفحه‌ی دکارتی** xy می‌نامیم. بردار به طول واحد و هم‌جهت با محور $\overrightarrow{Ox}$ را با $\mathbf{i}$ و بردار واحد و هم‌جهت با محور $\overrightarrow{Oy}$ را با $\mathbf{j}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱ــ۵).



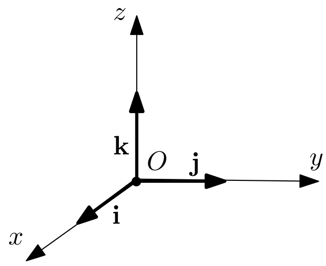
شکل ۱ــ۵ خط حقیقی و صفحه‌ی دکارتی.

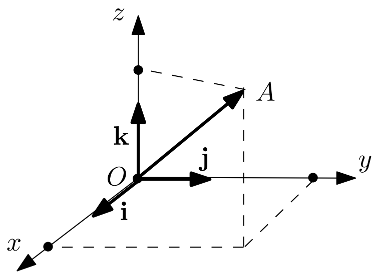
به طریق مشابه، به کمک سه خط جهت‌دار و دوبه‌دو متعامد $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy}$ و $\overrightarrow{Oz}$ با نقطه‌ی مشترک O به نام مبداء و یک طول واحد مشترک روی سه محور می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی سه‌تایی‌های مرتب $\mathbb{R}^3$ و نقاط فضا برقرار ساخت. این فضا را **فضای دکارتی** xyz می‌نامیم. بردارهای به طول واحد، به‌ترتیب هم‌جهت بامحورهای $\overrightarrow{Ox}$، $\overrightarrow{Oy}$ و $\overrightarrow{Oz}$ را به ترتیب با $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱ــ۶).

به کمک یک دستگاه مختصات دکارتی می‌توان برای بردارهای هندسی در صفحه و فضا نمایش تحلیلی منحصر به فردی به دست آورد. به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی ثابت O رامبداء مختصات در نظر بگیریم آنگاه نظیر هر بردار هندسی $\mathbf{a}$ در فضای دکارتی xyz، سه تایی مرتب و منحصر به فرد $A = (x, y, z)$ وجود دارد به گونه‌ای که $\overrightarrow{OA}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{a}$ است. با توجه به ویژگی‌های جمع برداری می‌توان نوشت $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. عددهای x و y و z را مولفه‌های بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم (شکل ۱ــ۷).

در حالتی که بردار $\mathbf{a}$ در صفحه دکارتی xy باشد، زوج مرتب منحصر به فرد $A = (x, y)$ وجود دارد به قسمی که $\overrightarrow{OA}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{a}$ است. در این حالت نیز $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ و اسکالرهای x و y را مولفه‌های $\mathbf{a}$ می‌نامیم. قضیه‌ی زیر تناظر طبیعی موجود بین فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه (یا فضا) و فضای برداری $\mathbb{R}^2$ (یا

$\mathbb{R}^3$) را بیان می‌کند.



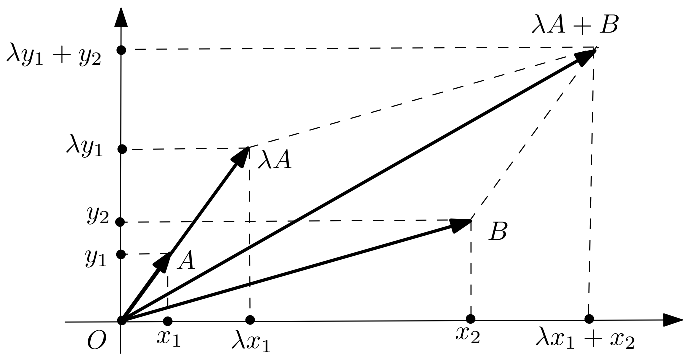


شکل ۱—۶ دستگاه مختصات دکارتی درفضا. شکل ۱—۷ مولفه‌های بردار در فضا.

قضیه ۱—۳—۴ فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه (فضا) با فضای برداری $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) یکریخت است.

برهان. فرض کنیم V فضای بردارهای هندسی در صفحه باشد. نگاشت $T : \mathbb{R}^2 \to V$ با ضابطه‌ی $A \longmapsto \overrightarrow{OA}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{R}$، $A = (x_1, y_1)$، $B = (x_2, y_2)$ و $C = \lambda A + B = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$ (شکل ۱—۸). داریم

$$\begin{aligned} T(\lambda A + B) = T(C) = \overrightarrow{OC} &= (\lambda x_1 + x_2)\mathbf{i} + (\lambda y_1 + y_2)\mathbf{j} \\ &= \lambda(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}) + (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) \\ &= \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda T(A) + T(B) \end{aligned}$$



شکل ۱—۸ یکریختی فضاهای بردارهای هندسی و $\mathbb{R}^2$.

به این ترتیب نگاشت T یک نگاشت خطی است. یک‌به‌یک و پوشا بودن نگاشت T آشکار است. به همین ترتیب دیده می‌شود که $\mathbb{R}^3$ با فضای برداری بردارهای هندسی در فضا یکریخت است. ■

با توجه به قضیه‌ی قبل، از نظر جبری، فضای برداری $\mathbb{R}^2$ با فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه همانند، یا به تعبیر دقیق‌تر یکریخت است. از این رو بعد از این تمایزی

بین بردارهای هندسه‌ی مسطح و نمایش تحلیلی آنها که متناظر با نقاط $\mathbb{R}^{۲}$ هستند قائل نمی‌شویم. به عبارت دیگر بردار $\mathbf{a}$ با نمایش هندسی $\overrightarrow{OA}$ را به طور ساده با $\mathbf{a} = (x, y)$ نیز نمایش می‌دهیم که در آن $A = (x, y)$. به همین ترتیب بردارهای هندسه‌ی فضایی و نمایش تحلیلی آنها را که متناظر با نقاط $\mathbb{R}^{۳}$ هستند یکی می‌گیریم.

۱–۴ ضرب داخلی

فضای برداری بیش از آنکه بیانگر مفهوم فضای هندسی باشد یک ساختار جبری است. به منظور آن که این ساختار را به عنوان مدل هندسی صفحه و فضا به کار ببریم لازم است در ابتدا روی آن مفهوم فاصله تعریف شود. این کار با استفاده از مفهوم **ضرب داخلی** انجام می‌شود.

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. تابع با ضابطه $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \longmapsto (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ از $V \times V$ به $\mathbb{R}$ را یک **ضرب داخلی یا ضرب عددی** روی V می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

الف) برای هر بردار $\mathbf{a} \in V$ همواره $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq ۰$ و $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ب) برای هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ همواره $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$.

ج) برای هر سه بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ و اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\langle \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

از ب و ج نتیجه می‌شود برای هر سه بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ و اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$،

$$\langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \lambda\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$$

فضای برداری V همراه با یک ضرب داخلی را یک **فضای ضرب داخلی** می‌نامیم.
در این حالت برای بردار $\mathbf{a}$ ، اسکالر نامنفی $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ را **نُرم** $\mathbf{a}$ و برای دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ عدد نامنفی $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ را **فاصله‌ی** دو بردار می‌نامیم.

مثال ۱–۴–۱ ۱) روی فضای $V = \mathbb{R}^n$ یک ضرب داخلی به شکل زیر برای بردارهای $\mathbf{a} = (x_۱, \cdots, x_n)$ و $\mathbf{b} = (y_۱, \cdots, y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := x_۱y_۱ + \cdots + x_ny_n$$

این ضرب را که با نماد $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ نیز نمایش می‌دهیم **ضرب نقطه‌ای** می‌نامیم. با این ضرب داخلی برای $\mathbf{a} = (x_۱, \cdots, x_n)$ در $\mathbb{R}^n$ داریم

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲}$$

این نُرم را **نُرم اقلیدسی** بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم. به این ترتیب

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \sqrt{(x_۱-y_۱)^۲+\cdots+(x_n-y_n)^۲}$$

فاصله‌ی اقلیدسی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد.

۲) فرض کنیم $I=[a,b]$ بازه‌ای در $\mathbb{R}$ باشد و $V=C(I,\mathbb{R})$. دراین صورت $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ یک ضرب داخلی روی V تعریف می‌کند (تحقیق کنید!).

قضیه ۱-۴-۲ (**نا مساوی کوشی -شوارتز**) فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ ،

$$|\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle|\le\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$$

برهان. برای اسکالر دلخواه $t\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $\mathbf{x}=\mathbf{a}-t\mathbf{b}$. دراین صورت:

$$\begin{aligned}
۰ &\le \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\\
&= \langle\mathbf{a}-t\mathbf{b},\mathbf{a}-t\mathbf{b}\rangle\\
&= \langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle-۲t\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle+t^۲\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle\\
&= \|\mathbf{a}\|^۲-۲t\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle+t^۲\|\mathbf{b}\|^۲
\end{aligned}$$

اگر $\|\mathbf{b}\|=۰$ آنگاه $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ و قضیه به وضوح بر قرار است. فرض کنیم $\|\mathbf{b}\|\neq۰$. نامساوی فوق به ازای جمیع مقادیر t برقرار است. به ویژه برای $t=\frac{۱}{\|\mathbf{b}\|}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ داریم

$$\begin{aligned}
۰ &\le \|\mathbf{a}\|^۲-\frac{۲}{\|\mathbf{b}\|}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^۲+\frac{۱}{\|\mathbf{b}\|^۲}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^۲\|\mathbf{b}\|\\
&= \|\mathbf{a}\|^۲-\frac{۱}{\|\mathbf{b}\|^۲}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^۲
\end{aligned}$$

که معادل است با $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^۲\le\|\mathbf{a}\|^۲\|\mathbf{b}\|^۲$. بنابر این $|\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle|\le\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$. ■

قضیه ۱-۴-۳ فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت برای هر دو بردار $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ و هر اسکالر $\lambda\in\mathbb{R}$ ،

الف) $\|\mathbf{a}\|\ge۰$ و $\|\mathbf{a}\|=۰$ اگروتنها اگر $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

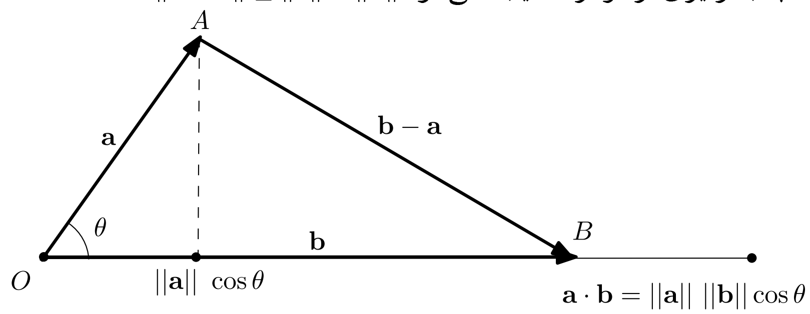
ب) $||\lambda \mathbf{a}|| = |\lambda| ||\mathbf{a}||$.

ج) $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$.

برهان. الف) و ب) بدیهی هستند. برای اثبات ج)، بنابر تعریف و نامساوی کشی ـ شوارتز

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^{۲} &= \langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle + ۲\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \\ &\leq ||\mathbf{a}||^{۲} + ۲||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| + ||\mathbf{b}||^{۲} \\ &= (||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||)^{۲} \end{aligned}$$

با جذرگیری از دوطرف نتیجه می‌شود $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$. ■



شکل ۱ــ۹ تعبیر هندسی ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

برای $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ می‌توان ضرب داخلی را به شکل دیگری هم بیان کرد. برای دو بردار هندسی ناصفر و غیرموازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با نمایش‌های $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ در مثلث $\triangle OAB$ داریم:

$$||\overrightarrow{AB}||^{۲} = ||\overrightarrow{OA}||^{۲} + ||\overrightarrow{OB}||^{۲} - ۲||\overrightarrow{OA}||\,||\overrightarrow{OB}|| \cos\theta$$

که در آن $۰ < \theta < \pi$ زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است (شکل ۱ــ۹). بنابراین:

$$||\mathbf{b}-\mathbf{a}||^{۲} = ||\mathbf{a}||^{۲} + ||\mathbf{b}||^{۲} - ۲||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \cos\theta$$

از این رابطه با توجه به $||\mathbf{b}-\mathbf{a}||^{۲} = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ نتیجه می‌شود:

$$||\mathbf{b}||^{۲} + ||\mathbf{a}||^{۲} - ۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||^{۲} + ||\mathbf{b}||^{۲} - ۲||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \cos\theta$$

که معادل است با:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \cos\theta$$

برقراری این رابطه در فضاهای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ به ما امکان می‌دهد که مفهوم زاویه‌ی بین دو بردار را در فضای $\mathbb{R}^n$ برای بردارهای ناصفر تعریف کنیم. برای بردارهای ناصفر $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز، $-||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$. بنابر این

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||} \leq 1$$

به این ترتیب می‌توان مفهوم زاویه‌ی بین دو بردار را به شکل زیر تعریف کنیم.

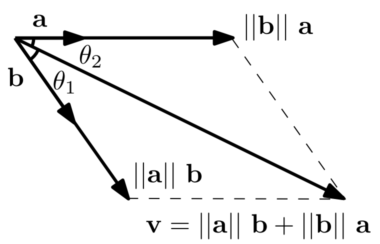
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||}\right)$$

فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. با توجه به رابطه‌ی فوق دو بردار $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ را **متعامد** می‌نامیم و می‌نویسیم $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ هرگاه $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = 0$.

مثال ۱ ـ ۴ ـ ۴ فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار دلخواه در $\mathbb{R}^n$ باشند.

الف) نشان می‌دهیم بردار $\mathbf{v} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||\mathbf{a}$، نیمساز زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

فرض کنیم θ_1 زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ و θ_2 زاویه‌ی بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{b}$ باشد (شکل ۱ — ۱۰).



شکل ۱ — ۱۰ نیمساز زاویه‌ی بین a و b.

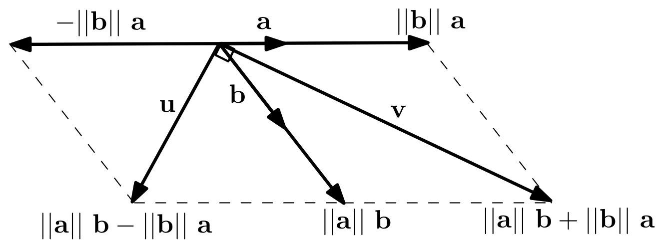
$$\begin{aligned}
\cos\theta_1 &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||} = \frac{\mathbf{a}\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a})}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||} = \frac{||\mathbf{a}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||^2}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||}\\
&= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||}{||\mathbf{v}||}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta_2 &= \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||} = \frac{\mathbf{b}\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a})}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||} = \frac{||\mathbf{b}||^2||\mathbf{a}||+||\mathbf{b}||\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||}\\
&= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||}{||\mathbf{v}||}
\end{aligned}$$

بنابر این $\cos\theta_۱ = \cos\theta_۲$. از سوی دیگر تابع با ضابطه‌ی $y = \cos x$ روی بازه‌ی $[\circ, \pi]$ یک به یک است. پس $\theta_۱ = \theta_۲$.

ب) نشان می‌دهیم $\mathbf{v} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ و $\mathbf{u} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b} - ||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ متعامدند (شکل ۱—۱۱).

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (||\mathbf{a}||\mathbf{b} - ||\mathbf{b}||\mathbf{a})\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||\mathbf{a})\\ &= ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + ||\mathbf{a}||^۲\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - ||\mathbf{b}||^۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \circ\end{aligned}$$



شکل ۱—۱۱ زاویه‌ی بین v و u.

ج) نشان می‌دهیم $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

از $||\mathbf{a}-\mathbf{b}|| \geq \circ$ و $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \geq \circ$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}|| &\Leftrightarrow ||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^۲ = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^۲\\ &\Leftrightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})\\ &\Leftrightarrow ||\mathbf{a}||^۲ + ||\mathbf{b}||^۲ + ۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||^۲ + ||\mathbf{b}||^۲ - ۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \circ \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\end{aligned}$$

د) نشان می‌دهیم بردار $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^۲}\,\mathbf{b}$ بر $\mathbf{b}$ عمود است.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^۲}\,\mathbf{b})\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^۲}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^۲}\,||\mathbf{b}||^۲\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \circ\end{aligned}$$

در ادامه نشان می‌دهیم اگر $\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n$ بردارهای غیر صفر و دو به دو متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه مستقل خطی هم هستند. با فرض $\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$، برای $۱ \leq i \leq n$

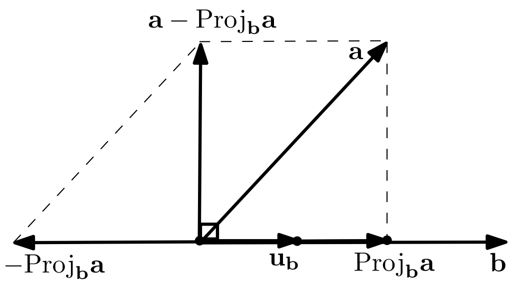
داریم $\lambda_i\|\mathbf{a}_i\|^۲ = \mathbf{a}_i \cdot (\lambda_۱ \mathbf{a}_۱ + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{0} = ۰$. در نتیجه $\lambda_i = ۰$. پس بنابر قضیه‌ی ۱−۲−۳ مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n\}$ یک پایه‌ی $\mathbb{R}^n$ است. بنابر این هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{a} = x_۱\mathbf{a}_۱ + ... + x_n\mathbf{a}_n$ نوشت به قسمی که $x_۱, ..., x_n \in \mathbb{R}$. پس

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}_i \cdot (x_۱\mathbf{a}_۱ + ... + x_n\mathbf{a}_n) = x_i\|\mathbf{a}_i\|^۲$$

در نتیجه $x_i = \dfrac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}_i\|^۲}$، به عبارت دیگر

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}_۱ \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}_۱\|^۲}\, \mathbf{a}_۱ + ... + \frac{\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}_n\|^۲}\, \mathbf{a}_n \qquad (۱)$$

در حالت کلی برای بردار غیر صفر $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$، اسکالر $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ را **مؤلفه‌ی $\mathbf{a}$ در راستای $\mathbf{b}$** می‌نامیم و با نماد $\mathbf{Comp_b a}$ نمایش می‌دهیم. همچنین بردار $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^۲}\,\mathbf{b}$ را **تصویر $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}$** می‌نامیم و با نماد $\mathbf{Proj_b a}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱−۱۲).



شکل ۱−۱۲ بردارهای $\mathbf{Proj_b a}$ و $(\mathbf{a} - \mathbf{Proj_b a})$.

در این صورت $\mathbf{Proj_b a} = (\mathbf{Copm_b a})\mathbf{u_b}$ که در آن $\mathbf{u_b} := \dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ بردار یکه‌ی هم‌جهت با $\mathbf{b}$ است. به سادگی تحقیق می‌شود که

$$\mathbf{Proj_b a} \parallel \mathbf{b} \quad , \quad (\mathbf{a} - \mathbf{Proj_b a}) \perp \mathbf{b}$$

بنابر این $\mathbf{a}$ را می‌توان به مجموع یک بردار موازی با $\mathbf{b}$ و یک بردار عمود بر $\mathbf{b}$ تجزیه کرد. رابطه‌ی (۱) را می‌توان به صورت زیر هم بیان کرد:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Copm}_{\mathbf{a}_۱}\mathbf{a})\mathbf{u}_{\mathbf{a}_۱} + ... + (\mathbf{Copm}_{\mathbf{a}_n}\mathbf{a})\mathbf{u}_{\mathbf{a}_n} = \mathbf{Proj}_{\mathbf{a}_۱}\mathbf{a} + ... + \mathbf{Proj}_{\mathbf{a}_n}\mathbf{a} \qquad (۲)$$

این رابطه‌ی را می‌توان به شکل دیگری برای یک فضای ضرب داخلی بیان کرد.

بر اساس قضیه‌ای موسوم به قضیه‌ی گرام—اشمیت، اگر V یک فضای ضرب داخلی با بعد باپایان روی $\mathbb{R}$ باشد، همواره می‌توان یک پایه‌ی متعامد یکه‌ی $B = \{\mathbf{u}_۱, ..., \mathbf{u}_n\}$ برای V به دست آورد. بنابر این هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{a} = x_۱\mathbf{u}_۱ + ... + x_n\mathbf{u}_n$ نوشت به قسمی که $x_۱, ..., x_n \in \mathbb{R}$، $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = ۰$ (برای $i \neq j$) و $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = ۱$. با ضرب داخلی دو طرف در $\mathbf{u}_i$ نتیجه می‌گیریم:

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{u}_i \ , \ x_۱\mathbf{u}_۱ + ... + x_n\mathbf{u}_n \rangle = x_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = x_i$$

به عبارت دیگر:

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{u}_۱, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u}_۱ + ... + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u}_n \qquad (۳)$$

مثال ۱–۴–۵ بردارهای $\mathbf{a}_۱ = (۱, ۱, ۰)$ ، $\mathbf{a}_۲ = (۱, -۱, ۱)$ و $\mathbf{a}_۳ = (-۱, ۱, ۲)$ را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیریم.

الف) نشان می‌دهیم مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}_۱, \mathbf{a}_۲, \mathbf{a}_۳\}$ تشکیل یک پایه‌ی متعامد برای $\mathbb{R}^۳$ می‌دهد.

ب) بردار $\mathbf{a} = (۱, ۱, ۱)$ را به صورت یک ترکیب خطی از اعضای پایه‌ی $\{\mathbf{a}_۱, \mathbf{a}_۲, \mathbf{a}_۳\}$ بیان می‌کنیم.

ج) به ازای $\mathbf{b} = (۱, ۲, ۳)$، بردار $\mathbf{a}$ را به مجموع یک بردار موازی و یک بردار عمود بر $\mathbf{b}$ تجزیه می‌کنیم.

الف) به سادگی تحقیق می‌شود که بردارهای $\mathbf{a}_۳, \mathbf{a}_۲, \mathbf{a}_۱$ دو به دو متعامد هستند و در نتیجه تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^۳$ می‌دهند.

ب) بنا بر رابطه‌ی (۱)،

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}_۱ \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}_۱||^۲}\ \mathbf{a}_۱ + \frac{\mathbf{a}_۲ \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}_۲||^۲}\ \mathbf{a}_۲ + \frac{\mathbf{a}_۳ \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}_۳||^۲}\ \mathbf{a}_۳ = \frac{۲}{۲}\mathbf{a}_۱ + \frac{۱}{۳}\mathbf{a}_۲ + \frac{۲}{۶}\mathbf{a}_۳$$

ج) بنا به تعریف داریم:

$$\mathbf{Proj_b\ a} = (\mathbf{Copm_b\ a})\ \mathbf{u_b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^۲}\ \mathbf{b} = \frac{۶}{۱۴}\mathbf{b} = (\frac{۳}{۷}, \frac{۶}{۷}, \frac{۹}{۷})$$

بنابر این $\mathbf{a} = (\frac{۳}{۷}, \frac{۶}{۷}, \frac{۹}{۷}) + (\frac{۴}{۷}, \frac{۱}{۷}, -\frac{۲}{۷})$.

۱–۵ ضرب خارجی

در ادامه‌ی بحث مفهوم ضرب خارجی بردارها و مفاهیم وابسته را در $\mathbb{R}^3$ مطرح می‌کنیم. از جنبه‌ی تاریخی برای نخستین بار، ضرب خارجی دو بردار برای بیان مفاهیمی مانند گشتاور و میدان مغناطیسی حاصل از یک ذره‌ی متحرک باردار به صورت ضرب دو بردار دیگر مطرح شد. در علم فیزیک، حاصل ضرب خارجی بردار $\mathbf{a}$ در بردار $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نمایش داده می‌شود برداری است عمود بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به قسمی که $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ طبق قانون دست راست، یک دستگاه راست‌گرد تشکیل می‌دهد و اندازه‌ی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برابر $||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\sin\theta$ است که θ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است (شکل ۱–۱۳).

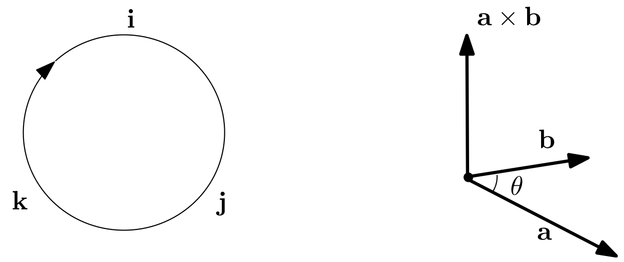
برای سادگی محاسبات و اثبات قضایا، در این بخش به جای تعریف فوق از تعریف معادل دیگری استفاده می‌کنیم. خواهیم دید که با این تعریف، تمام ویژگی‌های فوق برای ضرب داخلی به عنوان قضیه ثابت می‌شوند.

برای دو بردار $\mathbf{a}=(x_1,x_2,x_3)$ و $\mathbf{b}=(y_1,y_2,y_3)$ در فضای $\mathbb{R}^3$ حاصل ضرب خارجی بردار $\mathbf{a}$ در بردار $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} := (x_2y_3-x_3y_2)\mathbf{i}-(x_1y_3-x_3y_1)\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}$$

مشاهده می‌شود که برای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در $\mathbb{R}^3$ داریم $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$، $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

اگر بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ را به ترتیب روی یک دایره قرار دهیم حاصل ضرب خارجی دو بردار متوالی، بردار سوم است (شکل ۱–۱۳).



شکل ۱–۱۳ ضرب خارجی و رابطه‌ی دوری $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$، $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

در واقع به همین دلیل $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ یک دستگاه **راست گرد** $\mathbb{R}^3$ نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دترمینان برای اسکالرهای x_i,y_i,z_i به ازای $i=1,2,3$،

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} := x_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_1\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

به قسمی که $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$. با این سهو که درایه‌های دترمینان می‌توانند بردار هم باشند، برای سادگی، حاصل ضرب خارجی دو بردار $\mathbf{a} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\mathbf{b} = (y_1, y_2, y_3)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

در قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین ویژگی‌های هندسی و تحلیلی ضرب خارجی و رابطه‌ی آن با ضرب داخلی بررسی می‌شود.

قضیه ۱-۵-۱ برای سه بردار دلخواه $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ و اسکالرهای دلخواه λ, μ داریم

الف) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

ب) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

ج) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

د) $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}|| ||\mathbf{b}|| \sin\theta$، به قسمی که θ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

ه) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وابسته‌ی خطی باشند.

و) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

اثبات. ویژگی‌های الف) تا ج) به سادگی از محاسبه‌ی دو طرف تساوی به دست می آید. اثبات د) به صورت زیر است. برای $\mathbf{a} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\mathbf{b} = (y_1, y_2, y_3)$،

$$\begin{aligned} ||a \times b||^2 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\ &= ||a||^2 ||b||^2 - (a \cdot b)^2 = ||a||^2 ||b||^2 - ||a||^2 ||b||^2 \cos^2\theta \\ &= ||a||^2 ||b||^2 (1 - \cos^2\theta) = ||a||^2 ||b||^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

از $0 \leq \theta \leq \pi$ نتیجه می‌شود $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}|| ||\mathbf{b}|| \sin\theta$.

و) مشاهده می‌شود که برای $\mathbf{a} = (x_1, x_2, x_3)$، $\mathbf{b} = (y_1, y_2, y_3)$ و $\mathbf{c} = (z_1, z_2, z_3)$،

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

اگر $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ یا $\mathbf{a}=\mathbf{c}$، دو سطر دترمینان برابر و در نتیجه حاصل دترمینان صفر است.

برای دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نظیر بردارهای مکان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ که زاویه‌ی بین راستای آنها θ باشد بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برداری است عمود بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با اندازه‌ی $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta$. در حالت خاص اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یکه و متعامد باشند آنگاه:

الف) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$

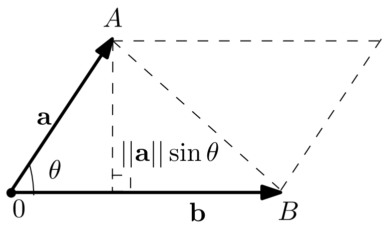
ب) $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}$

پس در این حالت $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ یک پایه‌ی یکه، متعامد و راست‌گرد برای $\mathbb{R}^۳$ است.

ارتفاع مثلث $\triangle OAB$ عبارت است از $\|\mathbf{a}\|\sin\theta$ (شکل ۱ــ۱۴). بنابر این مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر اضلاع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ عبارت است از $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$. به ویژه برای بردارهای $\mathbf{a}=x_۱\mathbf{i}+x_۲\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=y_۱\mathbf{i}+y_۲\mathbf{j}$،

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_۱ & x_۲ & ۰\\ y_۱ & y_۲ & ۰\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_۱ & x_۲\\ y_۱ & y_۲\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

به این ترتیب $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$ برابر است با قدرمطلق $\begin{vmatrix}x_۱ & x_۲\\ y_۱ & y_۲\end{vmatrix}$. به عبارت دیگر تعبیر هندسی $\begin{vmatrix}x_۱ & x_۲\\ y_۱ & y_۲\end{vmatrix}$، مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر اضلاع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است.



شکل ۱ــ۱۴ متوازی‌الاضلاع با اضلاع $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

به همین ترتیب برای بردارهای $\mathbf{a}=x_۱\mathbf{i}+x_۲\mathbf{j}+x_۳\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=y_۱\mathbf{i}+y_۲\mathbf{j}+y_۳\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=z_۱\mathbf{i}+z_۲\mathbf{j}+z_۳\mathbf{k}$،

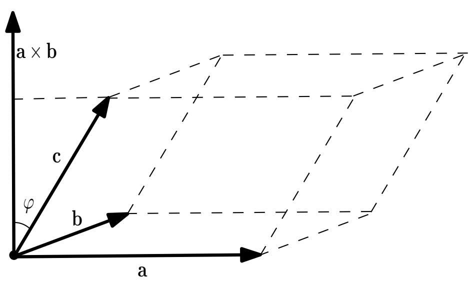
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix}x_۱ & x_۲ & x_۳\\ y_۱ & y_۲ & y_۳\\ z_۱ & z_۲ & z_۳\end{vmatrix}$$

از سوی دیگر داریم:

۱) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\varphi$ که φ زاویه‌ی بین بردارهای $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ است.

۲) حجم متوازی‌السطوح واقع بر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ عبارت‌است از $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\varphi$ (شکل ۱ــ۱۵).

به این ترتیب $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\varphi$ برابر است با قدرمطلق $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$. به عبارت دیگر تعبیر هندسی قدرمطلق $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$، حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=y_1\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+y_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=z_1\mathbf{i}+z_2\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$ است.



شکل ۱ــ۱۵ متوازی‌السطوح با اضلاع a، b و c.

برای سه بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در فضای $\mathbb{R}^3$، **ضرب سه‌گانه** عبارت است از اسکالر $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]:=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. با استفاده از ویژگی‌های دترمینان می‌توان نوشت:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=-[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]=-[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}]=[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

فرض کنیم سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهایی با رأس مشترک O در فضا و T متوازی‌السطوح ساخته شده بر این سه بردار باشد. در این صورت بنابر آنچه بیان کردیم

$$\text{حجم } T=|\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|=|\ [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]\ |=|\ [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\ |$$

پس **سه بردار a، b و c در $\mathbb{R}^3$ هم صفحه هستند اگر و تنها اگر** $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=0$.

تاکنون به بخش عمده‌ای از مفاهیم برداری مورد نیازمان اشاره شده است. در بخش بعد، با استفاده از روش برداری، برخی از قضایای هندسه‌ی مقدماتی را ثابت می‌کنیم.

۱ـ۶ کاربرد روش برداری در حل مسائل هندسه‌ی مقدماتی

روش برداری یک روش بسیار کارآمد برای اثبات برخی از قضایا و حل دسته‌ای از مسائل هندسه مقدماتی در چارچوب هندسه‌ی تحلیلی است. در این بخش به چند مثال جالب در این مورد می‌پردازیم.

مثال ۱ـ۶ـ۱ فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار متمایز و $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ بردارهای مکان نظیر آنها باشند.

الف) نشان می‌دهیم اگر بردار $\mathbf{c}$ نظیر بردار مکان $\overrightarrow{OC}$ و L خط واقع بر دو نقطه‌ی A و B باشد آنگاه $C \in L$ اگر و تنها اگر به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$، $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + (۱-\lambda)\mathbf{b}$.

ب) با استفاده از قسمت الف) نشان می‌دهیم به ازای هر بردار دلخواه $\mathbf{c}$ در صفحه اسکالرهای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ وجود دارند به قسمی که $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. به عبارت دیگر هر بردار دلخواه $\mathbf{c}$ در صفحه یک ترکیب خطی از دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. به این ترتیب دو بردار ناصفر و غیر موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^۲$ هستند.

الف) از $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ و $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} C \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} || \overrightarrow{AB} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{a} - \mathbf{c} \mathbin{||} \mathbf{b} - \mathbf{a} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R} \quad \mathbf{a} - \mathbf{c} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = (۱ + \mu)\mathbf{a} - \mu\mathbf{b} \end{aligned}$$

پس به ازای $\lambda = ۱ + \mu$ داریم

$$C \in L \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + (۱ - \lambda)\mathbf{b}$$

ب) دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

۱) امتداد بردار $\mathbf{c}$ با خط L موازی است. در این صورت $\mathbf{c} \mathbin{||} \mathbf{b} - \mathbf{a}$ و درنتیجه به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

۲) امتداد بردار c خط L را قطع می‌کند. فرض کنیم C' محل برخورد امتداد بردار $\mathbf{c}$ با خط L باشد. در این صورت بنا بر قسمت قبل به ازای یک $\mu \in \mathbb{R}$ داریم $\overrightarrow{OC'} = \mu\mathbf{a} + (۱ - \mu)\mathbf{b}$. به این ترتیب از $\mathbf{c} \mathbin{||} \overrightarrow{OC'}$ نتیجه می‌شود $\mathbf{c} = \lambda\, \overrightarrow{OC'}$ که $\lambda \in \mathbb{R}$. پس $\mathbf{c} = \lambda(\mu\mathbf{a} + (۱ - \mu)\mathbf{b})$، یعنی $\mathbf{c} = (\lambda\mu)\mathbf{a} + (\lambda - \lambda\mu)\mathbf{b}$. بنابر این به ازای $\alpha = \lambda\mu$ و $\beta = \lambda - \lambda\mu$ داریم $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

مثال ۱–۶–۲ با استفاده از روش برداری ثابت می‌کنیم

الف) در هر مثلث، سه میانه‌ی مثلث یک نقطه‌ی مشترک دارند و دو میانه یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ می‌برند.

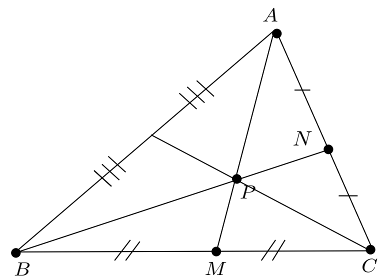
ب) در هر مثلث، سه ارتفاع مثلث یک نقطه‌ی مشترک دارند.

ج) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

د) در هر لوزی، قطرها بر یکدیگر عمودند.

ه) در هر دایره، زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر یک زاویه‌ی قائمه است.

الف) فرض کنیم در مثلث $\triangle ABC$ نقطه‌ی P محل تلاقی میانه‌های AM و BN باشد (شکل ۱–۱۶). ابتدا نشان می‌دهیم P میانه‌ی AM را به نسبت ۲ به ۱ می‌برد. از این که M وسط BC و N وسط AC است نتیجه می‌شود $\frac{CM}{CB}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{CN}{CA}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\overrightarrow{NM}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}$ (چرا؟) که معادل است با $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})$. ازسوی دیگر $\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{PM}$، پس به ازای $\alpha\in\mathbb{R}$، $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{PM}$. به همین ترتیب $\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{NP}$،یعنی به ازای $\beta\in\mathbb{R}$، $\overrightarrow{PB}=\beta\overrightarrow{NP}$. پس $۲\overrightarrow{NP}+۲\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\alpha\overrightarrow{PM}+\beta\overrightarrow{NP}$ که معادل است با $(\alpha-۲)\overrightarrow{PM}+(\beta-۲)\overrightarrow{NP}=۰$. اما از $\overrightarrow{PM}\nparallel\overrightarrow{NP}$ نتیجه می‌شود $\overrightarrow{PM}$ و $\overrightarrow{NP}$ مستقل خطی هستند. بنابر این $\alpha=۲$ و $\beta=۲$. به این ترتیب $\overrightarrow{AP}=۲\overrightarrow{PM}$. با استدلالی مشابه دیده می‌شود که اگر P' محل تلاقی AM با میانه‌ی سوم باشد داریم $\overrightarrow{AP'}=۲\overrightarrow{P'M}$. در نتیجه باید $P=P'$.

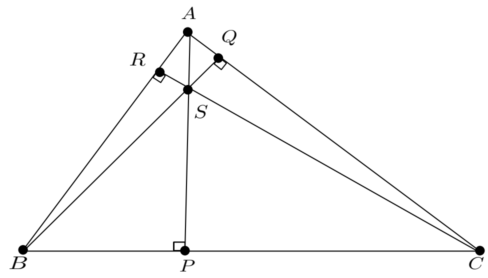


شکل ۱–۱۶ میانه‌های هر مثلث یک نقطه‌ی مشترک دارند.

ب) فرض کنیم AP و BQ دو ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ و S محل تلاقی آنها باشد. باید ثابت کنیم CS بر AB عمود است یعنی $\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AB}=۰$. در این صورت اگر CS

قاعده‌ی AB را در R ببرد، CR ارتفاع سوم است (شکل ۱—۱۷). از این که AP و BQ ارتفاع‌های مثلث هستند نتیجه می‌شود $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ و $\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. بنابراین

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CS}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\ &= (\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BS})\cdot\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS})\cdot\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CB}\\ &= -\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{aligned}$$

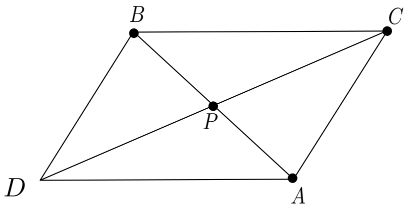


شکل ۱—۱۷ ارتفاع‌های هر مثلث یک نقطه‌ی مشترک دارند.

ج) فرض کنیم در متوازی‌الاضلاع $OACB$ □ که O مبدأ مختصات در نظر گرفته شده است ، P محل تلاقی قطرها باشد (شکل ۱—۱۸)، $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}$. در این صورت می‌توان بردار $\overrightarrow{OP}$ را به دو شکل زیر بیان کرد.

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-\mu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OC}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$$

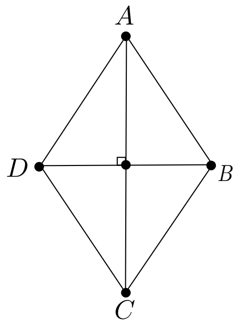
پس $\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1-\mu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$، یعنی $(\lambda+\mu-1)\overrightarrow{OA}+(\lambda-\mu)\overrightarrow{OB}=0$. از این که بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ناموازی هستند نتیجه می‌شود که مستقل خطی‌اند. پس $\lambda+\mu-1=\lambda-\mu=0$، یعنی $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$. در نتیجه $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



شکل ۱—۱۸ در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

د) لوزی $\Diamond ABCD$ را در نظر می‌گیریم. در هر لوزی طول همه‌ی اضلاع برابر و اضلاع روبه‌رو موازی هستند (شکل ۱ــ۱۹). بنابر این

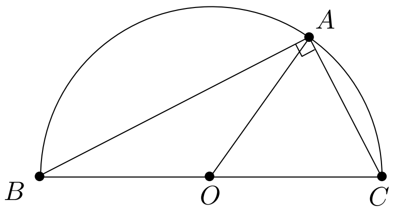
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\\ &= (-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\\ &= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^{۲}-\|\overrightarrow{DA}\|^{۲}=۰\end{aligned}$$



شکل ۱ــ۱۹ در هر لوزی، قطرها بر یکدیگر عمودند.

ه) فرض کنیم BC قطری از یک دایره به مرکز O و A نقطه ای بر کمان BC باشد (شکل ۱ــ۲۰). از $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}$ و $\|\overrightarrow{OA}\|=\|\overrightarrow{OC}\|=\|\overrightarrow{OB}\|$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\ &= \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\ &= -\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\ &= -\|\overrightarrow{OB}\|^{۲}+\|\overrightarrow{OA}\|^{۲}=۰\end{aligned}$$



شکل ۱ــ۲۰ در هر دایره، زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر، یک زاویه‌ی قائمه است.

مثال ۱–۶–۳ چهار نقطه‌ی متمایز $A = (۰, ۰, ۴)$، $B = (۰, ۱, ۲)$، $C = (۱, ۰, ۳)$ و $D = (۲, ۱, ۰)$ را در نظر می‌گیریم.

الف) نشان می‌دهیم چهار نقطه‌ی فوق در یک صفحه قرار دارند.

ب) مساحت چهارضلعی $\square ABCD$ را به دست می‌آوریم.

ج) مساحت مثلث $\triangle A'B'C'$، تصویر مثلث $\triangle ABC$ بر صفحه‌ی xoz را به دست می‌آوریم.

الف)سه بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ در یک صفحه واقعند اگر و تنها اگر $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \mathbf{0}$. بنابر فرض $\overrightarrow{AD} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$، $\overrightarrow{AC} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\overrightarrow{AB} = \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$. پس:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۴ \end{pmatrix} = -۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

در نتیجه $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = -۲ + ۲ = ۰$ و این معادل است با $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = ۰$. بنابر این سه بردار فوق در یک صفحه قرار دارند. پس چهار نقطه‌ی D, C, B, A نیز در همان صفحه هستند.

ب) $\square ABCD$ مساحت $= \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \| -۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}\| = ۲\sqrt{۶}$.

ج) از $C' = (۱, ۰, ۳)$، $B' = (۰, ۰, ۲)$ و $A' = (۰, ۰, ۴)$ نتیجه می‌شود $\overrightarrow{A'C'} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$,$\overrightarrow{A'B'} = -۲\mathbf{k}$. پس $\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = -۲\mathbf{k} \times (\mathbf{i} - \mathbf{k}) = -۲\mathbf{j}$ و

$$\triangle A'B'C' \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\| = ۱$$

مثال ۱–۶–۴ فرض کنیم A و B و C سه نقطه‌ی ناهم‌خط واقع در یک صفحه‌ی π و $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ و $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ بردارهای مکان نظیر سه نقطه باشند. برای بردار دلخواه $\mathbf{d}$ نظیر بردار مکان $\overrightarrow{OD}$ نشان می‌دهیم $D \in \pi$ اگر و تنها اگر اعداد حقیقی α، β و γ وجود داشته باشند به قسمی که $\alpha + \beta + \gamma = ۱$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

فرض کنیم $D \in \pi$. در این صورت:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \quad &\Rightarrow \quad \exists\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AD} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{d} - \mathbf{a} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{d} = (۱ - \beta - \gamma)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \end{aligned}$$

پس برای β، γ و $\alpha = 1 - \beta - \gamma$ داریم $\alpha + \beta + \gamma = 1$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

به عکس فرض کنیم برای اسکالرهای α و β و γ با شرط $\alpha + \beta + \gamma = 1$ داشته باشیم $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. در این صورت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} \in \pi \quad &\Leftrightarrow \quad \text{سه بردار } \overrightarrow{AB}\text{، } \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AD} \text{ هم‌صفحه‌اند} \\
&\Leftrightarrow \quad [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\mathbf{d}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\mathbf{d}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = 0
\end{aligned}$$

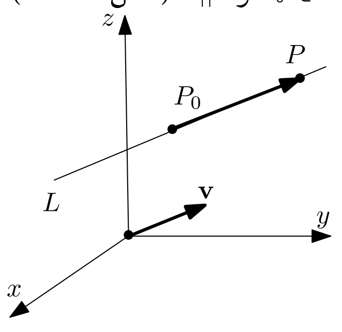
اما از $\alpha + \beta + \gamma = 1$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ نتیجه می‌شود:

$$[d,c,b] - [d,c,a] - [d,a,b] - [a,c,b] = \alpha[a,c,b] + \beta[b,c,b] - \beta[b,c,a] - \gamma[c,a,b] - [a,c,b] = \alpha[a,c,b] + \beta[a,c,b] + \gamma[a,c,b] - [a,c,b] = (\alpha+\beta+\gamma-1)[a,c,b] = 0$$

در بخش بعد به معرفی خط و صفحه از جنبه‌ی تحلیلی می‌پردازیم.

۱ـ۷ خط و صفحه

با توجه به تعریف بردارهای هندسی، هر بردار مشخص کننده‌ی یک دسته از خطوط موازی است. بنابر این به ازای نقطه‌ی $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و بردار $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ یک و تنها یک خط L وجود دارد که $P_0 \in L$ و $L \| \mathbf{v}$ (شکل ۱ـ۲۱).



شکل ۱ـ۲۱ خط شامل نقطه‌ی $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ با بردار هادی $\mathbf{v}$.

در این صورت برای $P=(x,y,z)$،

$$\begin{aligned}
P\in L \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_\circ P} \parallel \mathbf{v}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in\mathbb{R}\ :\ \overrightarrow{P_\circ P}=t\mathbf{v}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in\mathbb{R}\ :(x-x_\circ)\mathbf{i}+(y-y_\circ)\mathbf{j}+(z-z_\circ)\mathbf{k}=ta\ \mathbf{i}+tb\ \mathbf{j}+tc\ \mathbf{k}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in\mathbb{R}\ :\ x=at+x_\circ\ \ ,\ \ y=bt+y_\circ\ \ ,\ \ z=ct+z_\circ
\end{aligned}$$

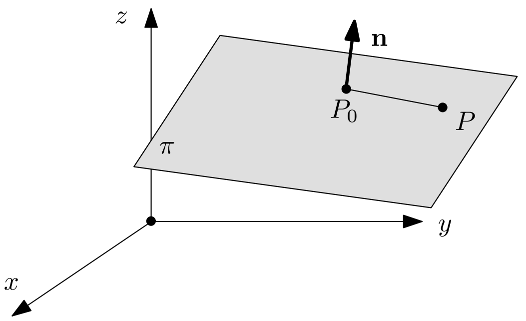
معادلات فوق ، **معادلات پارامتری** خط L نامیده می‌شوند. اسکالر $t\in\mathbb{R}$ را **پارامتر خط** و بردار $\mathbf{v}$ را یک **بردار هادی** برای خط L می‌نامیم. معادلات پارامتری یک خط منحصربه‌فرد نیستند. در صورتی که اعداد a، b و c غیر صفر باشند می‌توان با ادغام معادلات پارامتری، معادله‌ی خط را به شکل زیر بیان کرد.

$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c}$$

این معادلات را **معادلات تقارنی** خط می‌نامند. مقادیر c,b,a را **پارامترهای هادی خط** می‌نامند. اگر یکی از این پارامترها برابر صفر باشد، مثلاً اگر $c=\circ$ آنگاه معادلات تقارنی به شکل زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}\quad ,\quad z=z_\circ$$

به همین ترتیب بنابر هندسه‌ی مقدماتی، یک و تنها یک صفحه‌ی π شامل نقطه‌ی $P_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ وجود دارد که بر امتداد بردار $\mathbf{n}$ عمود است (شکل ۱—۲۲).



شکل ۱—۲۲ صفحه‌ی شامل نقطه‌ی $P_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ با بردار نرمال $\mathbf{n}$.

برای نقطه‌ی $P=(x,y,z)$ واقع بر این صفحه داریم

$$\begin{aligned}
P\in\pi \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_\circ P}\perp\mathbf{n}\\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_\circ P}\cdot\mathbf{n}=\circ\\
&\Leftrightarrow \quad a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ
\end{aligned}$$

این معادله که آن را به شکل $ax+by+cz+d=\circ$ هم بیان می‌کنیم، **معادله‌ی دکارتی** صفحه‌ی π نامیده می‌شود. بردار $\mathbf{n}$، **بردار نرمال یا قائم** صفحه نامیده می‌شود.

مثال ۱-۷-۱ خطوط $L_1 : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t \end{cases}$ و $L_2 : \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t \\ z = t + 2 \end{cases}$ مفروضند.

الف) نشان می‌دهیم L_1 و L_2 متقاطع هستند.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی π شامل مبدأ و موازی با دو خط فوق را به دست می‌آوریم.

ج) تصویر قائم خط L_1 را بر صفحه‌ی π تعیین می‌کنیم .

د) فاصله‌ی خط L_1 را از صفحه‌ی π به دست می‌آوریم.

ه) قرینه‌ی خط L_2 را نسبت به صفحه‌ی π به دست می‌آوریم.

و) معادله‌ی نیمساز دو خط L_1 و L_2 را مشخص می‌کنیم.

الف) بردارهای $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ مستقل خطی‌اند پس بردارهای هادی دو خط موازی نیستند. به این ترتیب $L_1 \nparallel L_2$.

اگر L_1 و L_2 متنافر باشند آنگاه هم صفحه نیستند. در نتیجه به ازای نقاط P_1 و P_2 که به ترتیب بر L_1 و L_2 واقعند ، سه بردار $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ و $\overrightarrow{P_1P_2}$ غیر هم صفحه هستند. به سادگی تحقیق می‌شود $[\overrightarrow{P_1P_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0$. پس L_1 و L_2 هم صفحه هستند.

ب) فرض کنیم π صفحه‌ی مورد نظر باشد. در این صورت طبق فرض $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \pi$ و بردار

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

بردار قائم این صفحه خواهد بود. پس معادله‌ی π به شکل $1(x-0) - 3(y-0) - 5(z-0) = 0$ یا به طور معادل $x - 3y - 5z = 0$ است.

ج) فرض کنیم P'_1 تصویر قائم نقطه‌ی دلخواه $P_1 \in L$ بر صفحه‌ی π باشد. در این صورت L'_1 تصویر قائم خط L_1 بر صفحه‌ی π به شکل زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{P'_1P_1} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_1} \Rightarrow \overrightarrow{OP'_1} = \overrightarrow{OP_1} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_1}$$

$$\overrightarrow{OP_1} = (t-1)\mathbf{i} + (2t+2)\mathbf{j} - t\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{n} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_1} = \frac{\mathbf{n}.\overrightarrow{OP_1}}{\|\mathbf{n}\|^2}\ \mathbf{n} = \frac{t-1-6t-6+5t}{35}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = -\frac{1}{5}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$$

و از آنجا

$$\overrightarrow{OP'_1} = (t-1)\mathbf{i}+(2t+2)\mathbf{j}-t\mathbf{k}-\frac{1}{5}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}) = (t-\frac{4}{5})\mathbf{i}+(2t+\frac{7}{5})\mathbf{j}-(t+1)\mathbf{k}$$

پس معادلات پارامتری خط L' به شکل $x = t - \frac{4}{5}$، $y = 2t + \frac{7}{5}$ و $z = -t - 1$ خواهد بود.

د) در این قسمت نیز فرض کنیم P'_1 تصویر قائم نقطه‌ی دلخواه $P_1 \in L$ بر صفحه‌ی π باشد. در این صورت فاصله‌ی خط L با صفحه‌ی π به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} d(L,\pi) &= d(P_1,\pi) = \|\overrightarrow{P'_1P_1}\| = \|\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP}\| = \|\frac{\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OP_1}}{\|\mathbf{n}\|^2}\ \mathbf{n}\| \\ &= \|-\frac{1}{5}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k})\| = \frac{\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

ه) فرض کنیم L'_2 قرینه‌ی خط L_2 نسبت به صفحه‌ی π ، $P_2 \in L_2$ ، $P_1 \in \pi$ تصویر قائم نقطه‌ی P_2 بر صفحه‌ی π و P'_2 قرینه‌ی نقطه‌ی P_2 نسبت به صفحه‌ی π باشد. در این صورت

$$\overrightarrow{P_2O} = -(2t+3)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+-(t+2)\mathbf{k} \qquad , \qquad \mathbf{n} = \mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_2O} = \frac{-2t-3-3t+5t+10}{35}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \frac{1}{5}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}) \qquad , \qquad \overrightarrow{P_2P'_2} = 2\overrightarrow{P_2P_1} = \frac{2}{5}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{OP'_2} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P'_2} = (2t+\frac{17}{5})\mathbf{i}-(t+\frac{6}{5})\mathbf{j}+t\mathbf{k}$$

بنابر این معادلات پارامتری خط L'_2 به شکل زیر است.

$$x = 2t+\frac{17}{5}\ ,\ y = -t-\frac{6}{5}\ ,\ z = t$$

و) فرض کنیم P نقطه‌ی تلاقی دو خط L_1 و L_2 باشد. اگر t_1 پارامتر خط L_1 و t_2 پارامتر خط L_2 باشد آنگاه مختصات نقطه‌ی P در دستگاه زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} t_1 - 1 = 2t_2 + 3 \\ 2t_1 + 2 = -t_2 \\ -t_1 = t_2 + 2 \end{cases}$$

پس $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ و در نتیجه $P = (-1, 2, 0)$. از سوی دیگر بردارهای هادی دو خط عبارتند از $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. طبق قسمت (الف) مثال ۱−۴−۴، بردار $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}_1\|\mathbf{v}_2 + \|\mathbf{v}_2\|\mathbf{v}_1$ در راستای نیمساز دو خط است. پس $\mathbf{v} = \sqrt{6}(3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \,\|\, 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \,\|\, L'_1$. بنابر این معادلات پارامتری خط L'_1 به شکل زیر است.

$$x = 3t - 1 \ , \ \ y = t + 2 \ , \ \ z = 0$$

تمرین‌های فصل اول

۱) برای $\mathbf{a} = (۲, ۰)$ و $\mathbf{b} = (۰, -۲)$، بردارهای $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ، $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ ، $۲\mathbf{a}+۳\mathbf{b}$ و $۳\mathbf{a}-۴\mathbf{b}$ را به دست آورید.

۲) برای $A = (\frac{-۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ و $B = (\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲})$ بردار $\overrightarrow{AB}$ را تعیین کنید.

۳) فرض کنید $\mathbf{a} = (۷, -۱)$ ، $\mathbf{b} = (۱۳, ۲)$ و $\mathbf{c} = (۴, ۵)$. بردار $\mathbf{x}$ را چنان پیدا کنید که $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{x} = ۳\mathbf{c}-\mathbf{x}$.

۴) فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار متمایز و $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ بردارهای مکان نظیر آنها باشند. نشان دهید برای $۰ \leq t \leq ۱$ نقطه‌ی P انتهای بردار $(۱-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$، پاره خط AB را به‌نسبت $\frac{t}{۱-t}$ تقسیم می‌کند.

۵) برای چهار بردار $\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$ در $\mathbb{R}^۳$ نشان دهید

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

٦) هر یک از سه بردار $\mathbf{a} = (۷, -۴)$ ، $\mathbf{b} = (-۲, ۱)$ و $\mathbf{c} = (۳, -۲)$ را به صورت ترکیب خطی از دو بردار دیگر بنویسید.

۷) فرض کنید $\mathbf{a} = (۳, -۱)$ ، $\mathbf{b} = (۱, -۲)$ و $\mathbf{c} = (-۱, ۷)$. بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ را به صورت ترکیب خطی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بیان کنید.

۸) بردار یکه‌ای را که در راستا و جهت بردار $-٦\mathbf{i}-۸\mathbf{j}$ باشد پیدا کنید. زاویه‌ای را که این بردار با جهت مثبت محور x می‌سازد محاسبه کنید.

۹) حاصل‌ضرب نقطه‌ای و زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a} = ۷\mathbf{i}-۲۴\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i}+\mathbf{j}$ را محاسبه کنید.

۱۰) فرض کنید زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ باشد، $||\mathbf{a}|| = ۳$ و $||\mathbf{b}|| = ۴$. مقدار $(۳\mathbf{a}-۲\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+۲\mathbf{b})$ را محاسبه کنید.

۱۱) فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار ناصفر باشند. ثابت کنید

الف) اگر $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ آنگاه دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند.
ب) اگر $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| < ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ آنگاه زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بیشتراز $\frac{\pi}{۲}$ است.
ج) اگر $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| > ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ آنگاه زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ کمتر از $\frac{\pi}{۲}$ است.

۱۲) ثابت کنید اگر معادله‌ی خط L در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ به شکل $ax + by + c = ۰$ باشد آنگاه بردار $\mathbf{v} = (a, b)$ بر L عمود است.

۱۳) بردار یکه‌ای را مشخص کنید که با هر سه محور مختصات زاویه‌ی مساوی می‌سازد.

۱۴) برای سه بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در $\mathbb{R}^۳$ ثابت کنید $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| \leq ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \, ||\mathbf{c}||$. توضیح دهید در این رابطه چه موقع تساوی برقرار است.

۱۵) در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ بردارهای یکه‌ی $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را چنان پیدا کنید که $\mathbf{u} + ۲\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

۱۶) فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار یکه باشند که با یکدیگر زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازند. مساحت مثلثی را محاسبه کنید که دو ضلع آن بردارهای $۲\mathbf{u} + \mathbf{v}$ و $\mathbf{u} + ۳\mathbf{v}$ هستند.

۱۷) مطلوب است تعیین زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ و $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ در صورتی که $||\mathbf{a}|| = \sqrt{۳}$، $||\mathbf{b}|| = ۱$ و $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{٦}$.

۱۸) رئوس مثلثی عبارتند از $A = (۴, ۵, ٦)$، $B = (۴, ۴, ۵)$ و $C = (۳, ۵, ۵)$. مساحت این مثلث را به دست آورید.

۱۹) فرض کنید $P = (۱, ۲, -۱)$، $Q = (۳, -۱, ۴)$ و $R = (۲, ۴, ۲)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $PQRS$ باشند.

الف) مختصات رأس S را به دست آورید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع $PQRS$ را محاسبه کنید.

۲۰) نقاط A، B و C، $(B \neq C)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید فاصله‌ی A از خط BC برابر است با

$$d = \frac{\| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \|}{\| \overrightarrow{BC} \|}$$

۲۱) برای سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، غیر واقع بر یک صفحه **بردارهای متقابل** عبارتند از $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$، $\mathbf{b}' = \dfrac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}}$ و $\mathbf{c}' = \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}}$. ثابت کنید

الف) $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = ۱$.

ب) $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

ج) اگر $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{V}$ آنگاه $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = \frac{۱}{V}$.

۲۲) بردارهای $\overrightarrow{OA} = (\alpha, ۲, ۱)$ ، $\overrightarrow{OB} = (۱, \beta, ۲)$ و $\overrightarrow{OC} = (۱, ۱, \gamma)$ مفروضند. اعداد α و β و γ را به قسمی تعیین کنید که

الف) نقاط A ، B و C بر یک استقامت باشند.

ب) زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ دو برابر زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ باشد.

۲۳) فرض کنید $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ دو بردار یکه باشند و $\angle(\mathbf{m},\mathbf{n}) = \frac{\pi}{۳}$. مطلوب است تعیین طول قطرها و مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر دو بردار $\mathbf{a} = ۲\mathbf{m} + \mathbf{n}$ و $\mathbf{b} = ۲\mathbf{m} - ۲\mathbf{n}$ بنا می‌شود.

۲۴) نقاط $A = (۰, ۰, ۴)$ ، $B = (۰, ۱, ۲)$ ، $C = (۱, ۰, ۳)$ و $D = (۲, ۱, ۰)$ مفروضند.

الف) نشان دهید این چهار نقطه بر یک صفحه واقعند.

ب) مساحت چهار ضلعی $ABCD$ را تعیین کنید.

ج) اگر این چهار ضلعی را بر صفحه‌ی xoz تصویر کنیم، مساحت چهار ضلعی حاصل را به‌دست آورید.

۲۵) حجم متوازی‌السطوحی را که روی بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$، $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = \mathbf{k} + \mathbf{i}$ ساخته می‌شود محاسبه کنید.

۲۶) حجم هرمی را که رئوس آن $A = (-۱, ۲, ۱)$ ، $B = (۵, ۵, ۴)$ ، $C = (۲, ۳, -۱)$ و $D = (۱, ۴, ۳)$ می‌باشد محاسبه کنید.

۲۷) فرض کنید $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار دلخواه در فضای برداری $\mathbb{R}^۳$ باشند. ابتدا ثابت کنید $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. سپس نشان دهید $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

۲۸) معادله کره‌ای را بنویسید که بر دو صفحه‌ی $\pi_۱ : x + y + z = ۳$ و $\pi_۲ : x + y + z = ۹$ مماس باشد و دو صفحه $p_۱ : ۳x - z = ۰$ و $p_۲ : ۲x - y = ۰$ از مرکز آن بگذرند.

۲۹) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که هیچ یک از دو خط متنافر $L_۱ : x = ۲t \ , \ y = ۰ \ , \ z = -t$ ، $L_۲ : x = ۰ \ , \ y = t + ۱ \ , \ z = -t$ را قطع نکند و از $L_۱$ و $L_۲$ به یک فاصله باشد.

۳۰) صفحات $\pi_۱ : ۲x + y + z = ۱$ و $\pi_۲ : ۳x + y - z = ۲$ را در نظر بگیرید. معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که بر $\pi_۱$ عمود و شامل فصل مشترک دو صفحه $\pi_۱$ و $\pi_۲$ باشد.

۳۱) نقطه‌ی $M = (۱, ۲, ۳)$ و صفحات $\pi_۱ : ۲x - y + ۳z = ۲$ و $\pi_۲ : x - ۳y + ۴z = ۱$ مفروضند. مختصات نقطه‌ی M' قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به فصل مشترک $\pi_۱$ و $\pi_۲$ را پیدا کنید.

۳۲) معادله‌ی صفحاتی را بیابید که موازی صفحه $۲x - ۲y - z = ۳$ و به فاصله‌ی ۵ از آن باشند.

۳۳) الف) نشان دهید دو خط L و L' با معادله‌های $L : \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۱}{-۵}$ و $L' : \frac{x+۱}{۳} = \frac{y+۳}{-۲} = \frac{z-۲}{-۱}$ متنافرند.

ب) معادله‌ی صفحه‌ای را به‌دست آورید که خط L را دربرداشته و موازی خط L' باشد.

ج) معادله‌ی عمود مشترک L و L' را بیابید.

۳۴) خطوط $L_۱$ و $L_۲$ با معادلات زیر مفروضند

$$L_۱ : \frac{x - x_۱}{a_۱} = \frac{y - y_۱}{b_۱} = \frac{z - z_۱}{c_۱}$$

$$L_۲ : \frac{x - x_۲}{a_۲} = \frac{y - y_۲}{b_۲} = \frac{z - z_۲}{c_۲}$$

ثابت کنید $L_۱$ و $L_۲$ متنافرند اگر و تنها اگر

$$\begin{vmatrix} x_۲ - x_۱ & y_۲ - y_۱ & z_۲ - z_۱ \\ a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \end{vmatrix} \neq ۰$$

۳۵) الف) ثابت کنید خط L به معادله‌ی $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z+۱}{۲}$ با صفحه‌ی π به معادله‌ی $۶x - ۲y - ۳z = ۰$ نقطه‌ی مشترکی ندارد.

ب) معادله‌ی خط L'، تصویر قائم خط L بر صفحه‌ی π را پیدا کنید.

۳۶) فرض کنید فاصله‌ی دو خط متنافر به معادله‌های $\frac{x - x_۱}{\alpha_۱} = \frac{y - y_۱}{\beta_۱} = \frac{z - z_۱}{\gamma_۱}$ و $\frac{x - x_۲}{\alpha_۲} = \frac{y - y_۲}{\beta_۲} = \frac{z - z_۲}{\gamma_۲}$ برابر d باشد. ثابت کنید اگر داشته باشیم $\alpha_۱^۲ + \beta_۱^۲ + \gamma_۱^۲ = \alpha_۲^۲ + \beta_۲^۲ + \gamma_۲^۲ = ۱$ و بردارهای هادی خطوط متعامد باشند آنگاه

$$d = \begin{vmatrix} x_۱ - x_۲ & y_۱ - y_۲ & z_۱ - z_۲ \\ \alpha_۱ & \beta_۱ & \gamma_۱ \\ \alpha_۲ & \beta_۲ & \gamma_۲ \end{vmatrix}$$

۳۷) ثابت کنید سه صفحه‌ی متمایز که بردارهای نرمال مستقل خطی داشته باشند یک و تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند.

۳۸) الف) ثابت کنید خطوط زیر موازی‌اند

$$L : \frac{x}{-۱} = \frac{y-۱}{۱} = \frac{z-۱}{۱} \quad ; \quad L' : \begin{cases} x+y=۱ \\ y=z \end{cases}$$

ب) معادله‌ی صفحه‌ای را که بر L و L' می‌گذرد به دست آورید.

۳۹) ثابت کنید خط راستی وجود ندارد که از مبدأ مختصات بگذرد و به ازای هر نقطه $p=(x,y,z)$ روی آن داشته باشیم $x^۲+y^۲=z$.

۴۰) مثلث OAB با رأس‌های $A=(۲,۳,۱)$ و $B=(۱,۱,-۱)$ و $O=(۰,۰,۰)$ مفروض است. معادله‌ی ارتفاع نظیر رأس O رابه دست آورید.

۴۱) نقاط $A=(۰,۰,bt)$ و $B=(a,bt,۰)$ را که $a,b\neq ۰$ ثابت هستند در نظر بگیرید. معادله‌ی صفحه‌ی پدید آمده توسط خطوط AB رابه دست آورید.

۴۲) الف) معادله‌ی خطی را که از نقاط $A=(۰,۰,۴)$ و $B=(۲,۲,۰)$ می‌گذرد بیابید.

ب) نقطه‌ی تقاطع این خط را با صفحه‌ی $x+y-z=۰$ به دست آورید.

۴۳) خط L به معادله‌ی $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z-۱۲}{-۱}$ و نقطه‌ی $M=(۱,۱,۱)$ مفروضند. مختصات نقطه‌ی قرینه‌ی M نسبت به خط L را به دست آورید.

۴۴)

۴۵) الف) ثابت کنید خط L به معادله‌ی $x=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۳}{۳}$ صفحه‌ی π به معادله‌ی $۳x+۳y-z=۴$ را در یک نقطه قطع می‌کند و نقطه‌ی تقاطع آنها را به دست آورید.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی شامل L و نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ واقع بر صفحه‌ی π را بنویسید.

ج) مطلوب است تعیین معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه.

۴۶) صفحه‌ی π از فصل مشترک صفحات $۲x+۳z=۴$ و $x+y=۳$ گذشته و موازی بردار $a=۳i-j+۲k$ است. معادله‌ی صفحه‌ی π را بیابید.

۴۷) دو خط $L_{\text{۱}} : \frac{x+\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{y+\text{۴}}{-\text{۵}} = \frac{z-\text{۲}}{\text{۳}}$ و $L_{\text{۲}} : \frac{x-\text{۳}}{-\text{۲}} = \frac{y+\text{۴}}{\text{۵}} = \frac{z-\text{۸}}{\text{۳}}$ مفروضند.

الف) نشان دهید $L_{\text{۱}}$ و $L_{\text{۲}}$ متنافرند.

ب) فاصله‌ی $L_{\text{۱}}$ و $L_{\text{۲}}$ و معادله‌ی خط عمود مشترک آنها را بدست آورید.

ج) معادله‌ی صفحه‌ای را تعیین کنید که هیچیک از دو خط $L_{\text{۱}}$ و $L_{\text{۲}}$ را قطع نکند و از دو خط به یک فاصله باشد.

د) معادله‌ی خطی را به دست آورید که از مبدأ مختصات گذشته و $L_{\text{۱}}$ و $L_{\text{۲}}$ را قطع کند.

۴۸) مثلث OAB به رئوس $O = (\text{۰}, \text{۰}, \text{۰})$، $A = (\text{۲}, \text{۲}, \text{۲})$ و $B = (\text{۱}, \text{۱}, -\text{۲})$ مفروض است. معادله‌ی ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر رأس O را به دست آورید.

۴۹) الف) اگر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار در فضا باشند تعبیر هندسی $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ چیست ؟

ب) به کمک قسمت الف) تحقیق کنید آیا می‌توان صفحه‌ای شامل سه خط زیر داشت؟ $L_{\text{۱}} : x-\text{۱} = y = z+\text{۲}$, $L_{\text{۲}} : x+\text{۱} = \frac{y-\text{۲}}{\text{۳}} = \frac{z}{\text{۲}}$, $L_{\text{۳}} : \frac{x}{\text{۲}} = \frac{y-\text{۲}}{\text{۲}} = \frac{z+\text{۱}}{-\text{۱}}$.

در صورت مثبت بودن جواب، معادله‌ی صفحه را پیدا کنید.

۵۰) معادله‌ی صفحه‌ای را تعیین کنید که بر دو صفحه‌ی $x-y+z = \text{۰}$ و $\text{۲}x+y-\text{۴}z = \text{۵}$ عمود باشد و شامل نقطه‌ی $A(\text{۴}, \text{۰}, -\text{۲})$ باشد.

۵۱) معادله‌ی خط حاصل از تصویر قائم خط $L : \frac{x+\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{\text{۲}y+\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{\text{۲}-z}{\text{۳}}$ بر صفحه‌ی $x-y+z = \text{۳}$ را به دست آورید.

۵۲) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که موازی دو خط $L_{\text{۱}} : \begin{cases} x = t+\text{۱} \\ y = \text{۲}t \\ z = t \end{cases}$ و $L_{\text{۲}} : \begin{cases} x = -t \\ y = \text{۲}t+\text{۱} \\ z = t \end{cases}$ و شامل قرینه‌ی نقطه‌ی $M = (\text{۱}, \text{۲}, \text{۳})$ نسبت به صفحه‌ی $x-y = \text{۲}$ باشد.

فصل ۲

توابع برداری و توابع حقیقی چندمتغیره

مفهوم تابع در حسابان نقشی اساسی بر عهده دارد. در بسیاری از پدیده‌های طبیعت، وابستگی کمیت‌های مختلف به یکدیگر توسط مفهوم تابع بیان می‌شود. در مواردی که کمیتی فقط به یک متغیر وابسته باشد، توابع حقیقی یک متغیره‌ی $f : I \to \mathbb{R}$ برای $I \subseteq \mathbb{R}$ مطرح می‌شوند ولی در بسیاری از موارد تعداد متغیرها بیش از یکی است و در این موارد توابع چند متغیره‌ی (حقیقی و برداری) $f : D \to \mathbb{R}^m$ برای $D \subseteq \mathbb{R}^n$ مورد توجه قرار می‌گیرند که موضوع بحث این فصل است. اگر چه این توابع تنوع زیادی دارند، در بیشتر مدل‌های کاربردی، حالت‌های $n = ۲, ۳$ و $m = ۱, ۲, ۳$ ظاهر می‌شوند. این حالت‌ها از جنبه‌ی هندسی و شهودی بیشتر قابل تجسم هستند.

۲–۱ توابع برداری

در مدل‌سازی پدیده‌هائی مانند مسیر حرکت یک متحرک در فضا از قبیل مسیر ماهواره‌ها، سیارات و $\cdots$ نسبت به متغیر زمان، از توابعی استفاده می‌کنیم که بر بازه‌ای از اعداد حقیقی تعریف شده‌اند و برد آنها زیر مجموعه‌ای از فضای دکارتی است.

تابع $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ که اسکالر $t \in I$ را به یک بردار $(x_۱, \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m$ تصویر می‌کند **تابع برداری** روی I نامیده می‌شود. ضابطه‌ی تابع برداری در حالت کلی به شکل $\mathbf{f}(t) = x_۱(t)\ \mathbf{e}_۱ + \ \cdots\ + x_m(t)\ \mathbf{e}_m$ است که $x_۱(t), \cdots, x_m(t)$ توابع حقیقی یک متغیره و بردارهای $\mathbf{e}_۱ = (۱, ۰, \cdots, ۰)$، $\cdots$ و $\mathbf{e}_m = (۰, \cdots, ۰, ۱)$ پایه‌ی استاندارد فضای $\mathbb{R}^m$ را تشکیل می‌دهند. به دلیل اهمیت حالت‌های خاص $m = ۲, ۳$، شکل کلی این رده از توابع برداری را جداگانه بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ توابعی حقیقی روی یک بازه‌ی مشترک $I \subseteq \mathbb{R}$ باشند. در این صورت برد تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j}$، زیرمجموعه‌ی $\{(x(t), y(t)) : t \in I\}$ از صفحه‌ی دکارتی و برد تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j} + z(t)\ \mathbf{k}$، زیر مجموعه‌ی $\{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$ از فضای دکارتی است. در عمل برد توابع برداری دارای اهمیت هستند که در بخش خم‌های پارامتری به آن می‌پردازیم.

مثال ۲–۱–۱ توابع با ضابطه‌های زیر توابع برداری هستند.

$$\mathbf{f} : [\circ, \pi] \to \mathbb{R}^۲ \qquad \mathbf{f}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{g} : [-۱, ۱] \to \mathbb{R}^۲ \qquad \mathbf{g}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{۱ - t^۲}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳ \qquad \mathbf{h}(t) = (x_\circ + at)\mathbf{i} + (y_\circ + bt)\mathbf{j} + (z_\circ + ct)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} : [\circ, \infty) \to \mathbb{R}^۳ \qquad \mathbf{r}(t) = \sin(۱\circ t)\mathbf{i} + \cos(۱\circ t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

پیش از بیان مفاهیم وابسته به توابع برداری به بررسی یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۲–۱–۲ برای تابع برداری $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = ۲t\ \mathbf{i} + (t^۲ + ۱)\mathbf{j}$،

الف) زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{f}(۱)$ و $\mathbf{f}(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم.

ب) مقادیری از t را تعیین می‌کنیم که بردار $\mathbf{f}(t)$ بر بردار $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ عمود باشد.

ج) مقادیری از t را مشخص می‌کنیم که بردار $\mathbf{f}(t)$ موازی بردار $\mathbf{v}$ است.

الف) فرض کنیم θ زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{f}(۱)$ و $\mathbf{f}(-۱)$ باشد. از $\mathbf{f}(۱) = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j}$ و $\mathbf{f}(-۱) = -۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j}$ نتیجه می‌شود $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{f}(۱) \cdot \mathbf{f}(-۱)}{\|\mathbf{f}(۱)\|\ \|\mathbf{f}(-۱)\|} = \circ$، پس $\theta = \dfrac{\pi}{۲}$.

ب) بردارهای $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{v}$ بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} = \circ$. این رابطه معادل است با $۲t - (t^۲ + ۱) = \circ$ یعنی $t = ۱$.

ج) دو بردار $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{v}$، با در نظر گرفتن مؤلفه‌ی سوم برابر با صفر، بردارهائی در $\mathbb{R}^۳$ هستند. پس $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{v}$ با هم موازیند اگر و تنها اگر $\mathbf{f}(t) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. این رابطه معادل است با

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲t & t^۲ + ۱ & \circ \\ ۱ & -۱ & \circ \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

یعنی $-(t + ۱)^۲\mathbf{k} = \mathbf{0}$، پس $t = -۱$.

۲-۲ حد توابع برداری

مشابه توابع حقیقی یک متغیره، مطالعه‌ی رفتار حدی یک تابع برداری در برخی نقاط اهمیت خاصی دارد. به دلیل تشابه حالت کلی با حالت $n = ۳$، در این بخش تنها به بیان مفهوم حد آن دسته از تابع برداری می‌پردازیم که برد آنها زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ است.

فرض کنیم $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ یک تابع برداری روی I باشد، $t_\circ \in I$ و $\mathbf{v} = x_\circ\mathbf{i} + y_\circ\mathbf{j} + z_\circ\mathbf{k}$ برداری در $\mathbb{R}^۳$ باشد. می‌گوییم f در $t_\circ$ دارای حد $\mathbf{v}$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{t\to t_\circ} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$، هرگاه $\lim\limits_{t\to t_\circ} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\| = \circ$. به عبارت دیگر هرگاه

$$\forall\, \varepsilon > \circ \quad \exists\, \delta > \circ\ \forall\, t \quad (\circ < |t - t_\circ| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\| < \varepsilon)$$

قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین حد تابع برداری $\mathbf{f}$ و حد مؤلفه‌های آن را بیان می‌کند.

قضیه ۲-۲-۱ تابع برداری $\mathbf{f}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ در $t_\circ$ حد برابر $\mathbf{v} = x_\circ\mathbf{i} + y_\circ\mathbf{j} + z_\circ\mathbf{k}$ دارد اگر و تنها اگر $\lim\limits_{t\to t_\circ} x(t) = x_\circ$ ، $\lim\limits_{t\to t_\circ} y(t) = y_\circ$ و $\lim\limits_{t\to t_\circ} z(t) = z_\circ$.

اثبات. با توجه به نامساوی‌های

$$|x(t) - x_\circ| \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\|,$$
$$|y(t) - y_\circ| \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\|,$$
$$|z(t) - z_\circ| \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\|,$$
$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\| \leq |x(t) - x_\circ| + |y(t) - y_\circ| + |z(t) - z_\circ|$$

قضیه اثبات می‌شود.

مثال ۲-۲-۲ تابع $\mathbf{f}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = \dfrac{\ln t}{t-۱}\mathbf{i} + \dfrac{۱}{t}\mathbf{j} + \dfrac{t^۲-۱}{t-۱}\mathbf{k}$ در $t = ۱$ حد برابر $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ دارد زیرا $\lim\limits_{t\to ۱} \dfrac{\ln t}{t-۱} = ۱$ ، $\lim\limits_{t\to ۱} \dfrac{۱}{t} = ۱$ و $\lim\limits_{t\to ۱} \dfrac{t^۲-۱}{t-۱} = ۲$.

تابع برداری $\mathbf{f}$ را در $t_\circ$ **پیوسته** می‌نامیم هرگاه در این نقطه حد داشته باشد و $\lim\limits_{t\to t_\circ} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_\circ)$.

تابع $\mathbf{f}$ روی فاصله‌ی باز $I \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته نامیده می‌شود هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

مثال ۲–۲–۳ تابع $\mathbf{f}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = \ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ در $t = 1$ دارای حد برابر $\mathbf{f}(1) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ است. پس $\mathbf{f}$ در $t = 1$ پیوسته است. این تابع در تمام نقاط بازه‌ی $(0, \infty)$ پیوسته است پس روی این بازه پیوسته است.

از قضیه‌ی ۲–۲–۱ قضیه‌ی زیر به دست می‌آید.

قضیه ۲–۲–۴ تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ در $t_0 \in I$ پیوسته است اگر و تنها اگر هریک از توابع با ضابطه‌های $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ در t_0 پیوسته باشند.

مشتق تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$ در نقطه‌ی $t_0 \in I$ که نقطه‌ی انتهایی بازه‌ی I نیست در صورت وجود با $\mathbf{f}'(t_0)$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از:

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0))$$

یکی از نتیجه‌های قضیه‌ی ۲–۲–۱، قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۲–۲–۵ تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ در $t_0 \in I$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هریک از مؤلفه‌های آن در این نقطه مشتق‌پذیر باشند. علاوه بر این، در صورت وجود مشتقات، $\mathbf{f}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$.

تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$ را در بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر گوییم هرگاه در کلیه‌ی نقاط این بازه مشتق‌پذیر باشد. تابع برداری $\mathbf{f}' : I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \mathbf{f}'(t)$ **تابع برداری مشتق** نامیده می‌شود.

مشتقات مراتب بالاتر توابع برداری به شکل مشابه تعریف می‌شوند.

به کمک قضیه‌ی ۲–۲–۵ قضیه‌ی زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۲–۲–۶ فرض کنیم توابع برداری $\mathbf{f}\ ,\ \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ و تابع اسکالر $\alpha : I \to \mathbb{R}$ در $t_0 \in I$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت هر یک از توابع $\mathbf{f} \pm \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌های $t \mapsto \mathbf{f}(t) \pm \mathbf{g}(t)$، $\alpha\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \alpha(t)\mathbf{f}(t)$، $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$ و $\mathbf{f} \times \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)$ در t_0 مشتق‌پذیر هستند و

$$(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0) \pm \mathbf{g}'(t_0)\ ,$$
$$(\alpha\mathbf{f})'(t_0) = \alpha'(t_0)\mathbf{f}(t_0) + \alpha(t_0)\mathbf{f}'(t_0)\ ,$$
$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0) \cdot \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \cdot \mathbf{g}'(t_0)\ ,$$
$$(\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}'(t_0).$$

در مثال بعد یکی از کاربردهای قضیه‌ی ۲–۲–۶ مشاهده می‌شود.

مثال ۲–۲–۷ برای تابع برداری مشتق‌پذیر $\mathbf{f}$ نشان می‌دهیم $\|\mathbf{f}(t)\|$ مقداری ثابت و مستقل از t است اگر وتنها اگر $\mathbf{f}(t)\perp\mathbf{f}'(t)$.

بنابر قضیه‌ی ۲–۲–۶برای $t\in\mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(t)\perp\mathbf{f}'(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad 2\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\|\mathbf{f}(t)\|^2\right)'=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{f}(t)\|^2=\text{عدد ثابت}\\
&\Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{f}(t)\|=\text{عدد ثابت}
\end{aligned}$$

۲–۳ خم‌های پارامتری

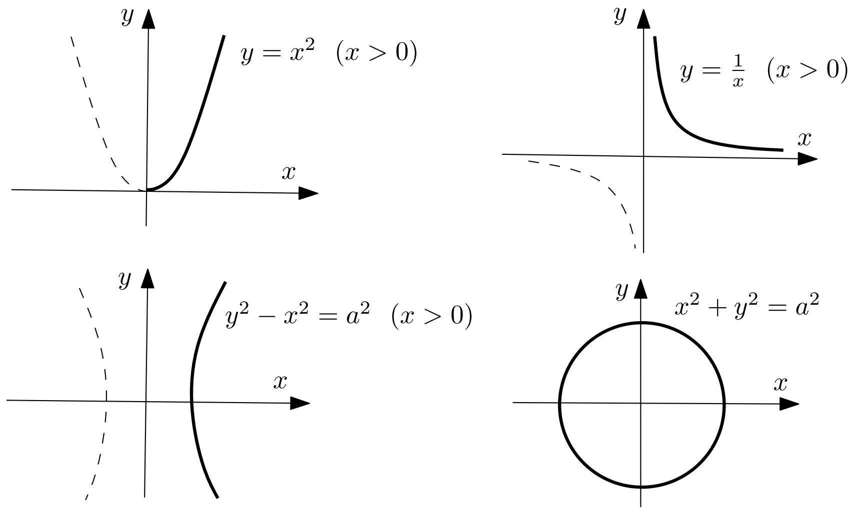
فرض کنیم $\mathbf{r}$ یک تابع برداری با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ باشد که روی بازه‌ی $I\subseteq\mathbb{R}$ تعریف شده است. در این صورت متناظر با هر $t\in I$، بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ نقطه‌ای مانند P را به مختصات $(x(t),y(t),z(t))$ در فضا مشخص می‌کند. با تغییر مقادیر $t\in I$، بردار $\mathbf{r}(t)$ تغییر می‌کند و نسبت به مبداء مختصات زیرمجموعه‌ای از فضا مشخص می‌شود. در بسیاری از حالت‌ها این زیرمجموعه از فضا یک **خم (منحنی)** مانند C است. در این حالت C را خم یا **منحنی پارامتری** با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}:I\to\mathbb{R}^3$، یا خم با معادلات پارامتری $x=x(t)$، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ به ازای $t\in I$ می‌نامیم. بردار $\mathbf{r}(t)$، **بردار شعاعی** حامل نقطه‌ی P نامیده می‌شود.

مثال ۲–۳–۱ توابع برداری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\ , \qquad \mathbf{f}(t)=t^2\ \mathbf{i}+t^4\ \mathbf{j},\\
&\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\ , \qquad \mathbf{g}(t)=e^t\ \mathbf{i}+e^{-t}\ \mathbf{j},\\
&\mathbf{h}:[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\ , \qquad \mathbf{h}(t)=a\cos t\ \mathbf{i}+a\sin t\ \mathbf{j},\\
&\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\ , \qquad \mathbf{r}(t)=a\cosh t\ \mathbf{i}+a\sinh t\ \mathbf{j}
\end{aligned}$$

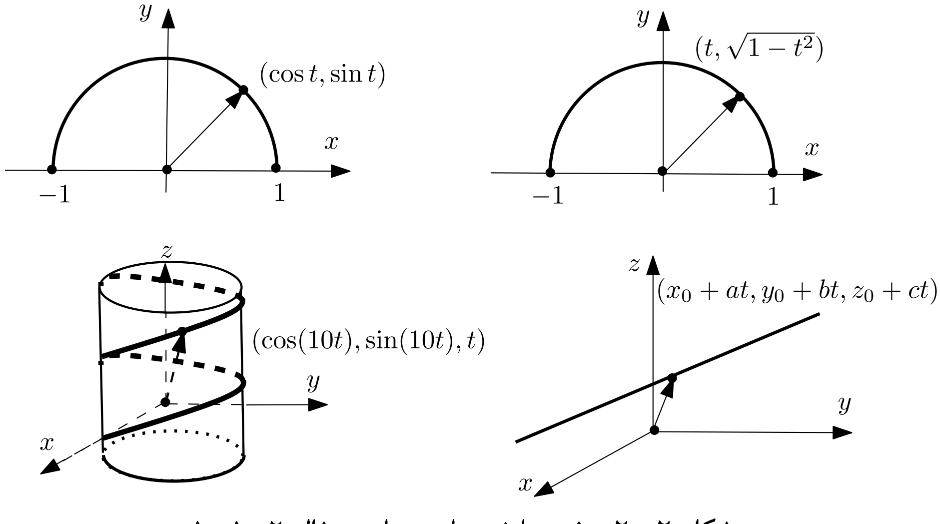
خم‌های نظیر $\mathbf{f}$، $\mathbf{g}$، $\mathbf{h}$ و $\mathbf{r}$ به ترتیب بخشی از سهمی $y=x^2$ $(x\geq 0)$، یک شاخه از هذلولی $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$، دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ و یک شاخه از هذلولی $x^2-y^2=a^2$ $(x\geq 0)$ هستند (شکل ۲–۱). در ادامه‌ی این مثال به بررسی خم‌هایی می‌پردازیم که

در مثال ۲–۱–۱ مطرح شده‌اند. توابع $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ در مثال ۲–۱–۱، دو تابع متفاوت هستند، اما برد هر دو یک نیم دایره به شعاع ۱ در صفحه‌ی دکارتی است.



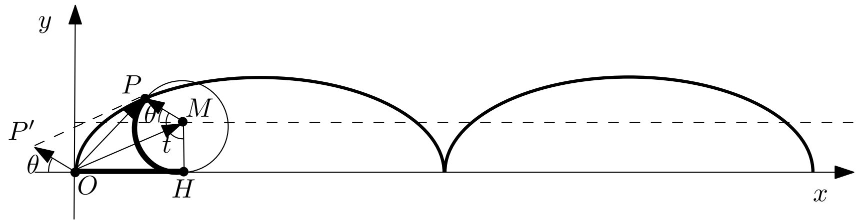
شکل ۲–۱ خم نمایش توابع برداری مثال ۲–۳–۱

برد تابع برداری $\mathbf{h}$ در مثال ۲–۱–۱ یک خط راست در فضای دکارتی با بردار هادی $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ و شامل نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ است. برد تابع برداری $\mathbf{r}$ در مثال ۲–۱–۱ یک مارپیچ استوانه‌ای، یعنی یک خم مارپیچی شکل روی استوانه‌ی واحد در $\mathbb{R}^۳$ است (شکل ۲–۲).



شکل ۲–۲ خم نمایش توابع برداری مثال ۲–۱–۱.

مثال ۲-۳-۲ خم C مکان هندسی نقطه‌ی ثابت P بر یک دایره به شعاع a است که روی محور x می‌غلطد. معادله‌ی پارامتری C را به دست می‌آوریم (شکل ۲-۳).



شکل ۲-۳ چرخزاد.

فرض کنیم M مرکز دایره، H نقطه‌ی تماس دایره با محور x و نقطه‌ی P در شروع حرکت بر مبدأ مختصات منطبق باشد. زاویه‌ی بین $\overrightarrow{MP}$ و $\overrightarrow{MH}$ را با t نمایش می‌دهیم (در صورتی که دایره با سرعت ثابت بچرخد می‌توان t را پارامتر زمان فرض کرد). در این صورت OH مسافت پیموده شده به وسیله‌ی P برابر طول کمان $\widehat{PH}$ از دایره، یعنی کمانی به طول at است. بنابر این $M = (at, a)$. اگر θ زاویه‌ی بردار $\overrightarrow{MP}$ با جهت منفی محور xها و $\overrightarrow{OP'}$ بردار مکان هم‌سنگ با $\overrightarrow{MP}$ باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP'} &= (at\ \mathbf{i} + a\ \mathbf{j}\ ) + (-a\cos\theta\ \mathbf{i} + a\sin\theta\ \mathbf{j}\ ) \\
&= (at\ \mathbf{i} + a\ \mathbf{j}\ ) + (-a\cos(t - \frac{\pi}{۲})\ \mathbf{i} + a\sin(t - \frac{\pi}{۲})\ \mathbf{j}\ ) \\
&= (at\ \mathbf{i} + a\ \mathbf{j}\ ) + (-a\sin t\ \mathbf{i} - a\cos t\ \mathbf{j}\ ) \\
&= a(t - \sin t)\ \mathbf{i} + a(۱ - \cos t)\ \mathbf{j}
\end{aligned}$$

این خم **چرخزاد** نامیده می‌شود و بنابر آنچه گفته شد برد تابع برداری $\mathbf{r}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\ \mathbf{i} + a(۱ - \cos t)\ \mathbf{j}$ است.

مثال ۲-۳-۳ خم C را با معادلات پارامتری $x = \cos t$، $y = \sin t$ و $z = t$ برای $t \in [۰, \infty)$ در نظر می‌گیریم.

الف) معادلات پارامتری تصویر خم C بر صفحه‌ی xoy را تعیین می‌کنیم.

ب) تصویر C را بر صفحه‌ی π با معادله‌ی $x + z = ۱$ در جهت $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ به دست می‌آوریم.

ج) تصویر قائم C را بر صفحه‌ی π به دست می‌آوریم.

الف) مختص سوم تصویر نقاط C بر صفحه‌ی xoy برابر صفر است. پس معادلات پارامتری تصویر خم C بر صفحه‌ی xoy عبارت است از $x = \cos t$ و $y = \sin t$ به قسمی که $t \in [۰, \infty)$. بنابر این تصویر خم C بر صفحه‌ی xoy دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات است.

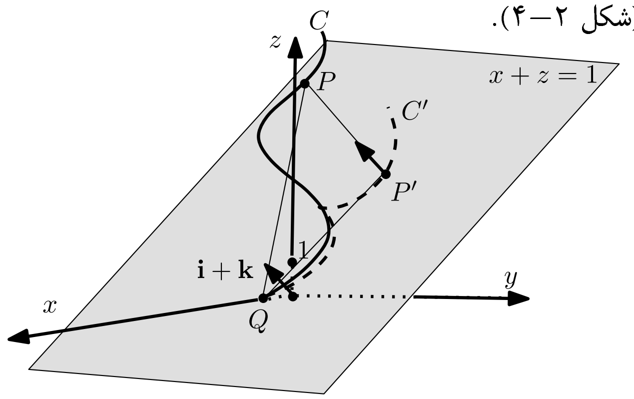
ب) به تعبیر فیزیکی می‌خواهیم یک شعاع نور موازی با بردار $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ بر خم C بتابانیم و معادله‌ی C'، سایه‌ی C را بر صفحه‌ی π به دست آوریم. فرض کنیم L_P خط گذرنده از نقطه‌ی $P = (\cos t, \sin t, t) \in C$ با بردار هادی $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ باشد. معادلات پارامتری خط L_P برای $\lambda \in \mathbb{R}$ به شکل $x = \lambda + \cos t$، $y = \lambda + \sin t$ و $z = t$ است. پس مختصات نقاط C'، تصویر خم C بر صفحه‌ی π،در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} x = \lambda + \cos t \\ y = \lambda + \sin t \\ z = t \\ x + z = ۱ \end{cases}$$

از $x + z = ۱$ نتیجه می‌شود $\lambda + \cos t + t = ۱$. پس $\lambda = ۱ - t - \cos t$. با جایگذاری λ مختصات نقطه‌ی دلخواه $P' = L_p \cap \pi$ عبارت است از $P' = (۱ - t, ۱ - t - \cos t + \sin t, t)$. بنابر این خم C' را می‌توان برد تابع برداری $\mathbf{R}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{R}(t) = (۱ - t)\mathbf{i} + (۱ - t - \cos t + \sin t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ در نظر گرفت.

ج) یک روش حل این قسمت شبیه به قسمت (ب) است. در این روش، تصویر C بر صفحه‌ی π را در جهت بردار نرمال صفحه، $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ به دست می‌آوریم. ادامه‌ی حل این قسمت با روش قسمت (ب) را به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

در روش دوم، نقطه‌ی دلخواهی مانند $Q = (۱, ۰, ۰)$ را در صفحه‌ی π در نظر می‌گیریم (شکل ۲ـ۴).



شکل ۲ـ۴ خم C' در قسمت (ج) مثال ۲ـ۳ـ۳.

فرض کنیم نقطه‌ی P' تصویر قائم نقطه‌ی $P = (\cos t, \sin t, t) \in C$ بر صفحه‌ی π باشد. در این صورت داریم

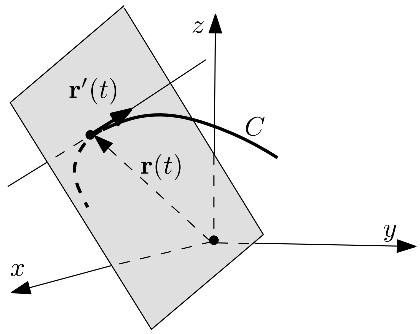
$$\overrightarrow{PQ} = (1 - \cos t)\ \mathbf{i} - \sin t\ \mathbf{j} - t\ \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} = \frac{1 - \cos t - t}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

بنابر این $P' = (\cos t + \frac{1 - \cos t - t}{2}\ ,\ \sin t\ ,\ t + \frac{1 - \cos t - t}{2})$.

۲–۴ خط مماس و صفحه‌ی قائم اصلی

فرض کنیم C خم نظیر تابع برداری $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ ، $P \in C$ نقطه‌ی نظیر $t \in I$ و $Q \in C$ نقطه‌ی نظیر $t + h \in I$ باشند. در این صورت بردار $\frac{1}{h}[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)]$، یک بردار هادی برای خط L_{PQ} شامل دو نقطه‌ی P و Q است. اگر تابع برداری $\mathbf{r}$ در t مشتق‌پذیر باشد و $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ آنگاه وقتی $h \to 0$، خط L_{PQ} به سمت خطی با بردار هادی $\mathbf{r}'(t)$ میل می‌کند (شکل ۲–۵).



شکل ۲–۵ خط مماس و صفحه‌ی قائم اصلی.

خط گذرنده از نقطه‌ی $P \in C$ با بردار هادی $\mathbf{r}'(t)$ **خط مماس** بر خم C در نقطه‌ی P نام دارد. صفحه‌ی شامل این نقطه با بردار نرمال $\mathbf{r}'(t)$ **صفحه‌ی قائم اصلی** بر C در P نامیده می‌شود.

مثال ۲–۴–۱ خم C با معادلات پارامتری $x = \cosh t\ ,\ y = \sinh t\ ,\ z = t$، برای $t \in \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم.

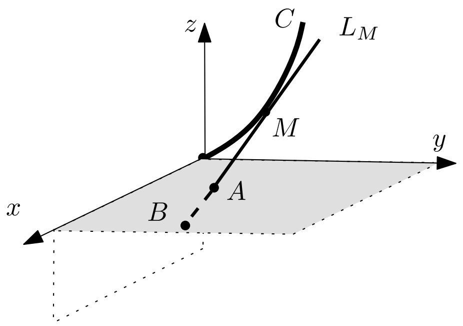
الف) معادله‌ی خط مماس بر این خم در نقطه‌ی نظیر $t = 0$ و محل برخورد این خط با صفحه‌ی xoz را تعیین می‌کنیم.

ب) خطوط مماس بر خم C، صفحه‌ی xoz را در امتداد یک خم مانند C' قطع می‌کنند. معادلات پارامتری خم C' را به دست می‌آوریم.

الف) به ازای $t = ۰$، نقطه‌ی $P_۰ = (۱, ۰, ۰)$ بر C مشخص می‌شود. این خم نظیر تابع برداری با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = \cosh t\ \mathbf{i} + \sinh t\ \mathbf{j} + t\ \mathbf{k}$ است، پس $\mathbf{r}'(t) = \sinh t\ \mathbf{i} + \cosh t\ \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$ بردار هادی خط مماس بر C در نقطه‌ی نظیر پارامتر t است. در نتیجه $\mathbf{r}'(۰) = \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$ بردار هادی خط مماس بر C در نقطه‌ی $P_۰$ خواهد بود. بنابر این معادلات پارامتری خط مماس بر این خم در نقطه‌ی $P_۰$ عبارت است از $x = ۱$، $y = t$ و $z = t$. نقطه‌ی $P'_۰$ نقطه‌ی مشترک خط $L_۰$ با صفحه‌ی xoz، به ازای مقادیری از t به دست می‌آید که برای آن داریم $y = ۰$. پس $t = ۰$، یعنی $P'_۰ = (۱, ۰, ۰) = P_۰$.

ب) فرض کنیم نقطه‌ی $P \in C$ نقطه‌ای متناظر با $t \in \mathbb{R}$ و L_P خط مماس بر خم C در نقطه‌ی P باشد. در این صورت $P = (\cosh t, \sinh t, t) \in L_P$ و $\mathbf{r}'(t) = \sinh t\ \mathbf{i} + \cosh t\ \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$ بردار هادی این خط است. بنابر این L_P دارای معادلات پارامتری $x(\lambda) = (\sinh t)\lambda + \cosh t$ ، $y(\lambda) = (\cosh t)\lambda + \sinh t$ و $z(\lambda) = \lambda + t$ است. خم C'، مکان هندسی نقاط تلاقی خط L_P با صفحه‌ی xoz، به ازای مقادیری از پارامتر λ به دست می‌آید که برای آن داشته باشیم $y = ۰$. پس $\lambda = -\dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ و خم C' به کمک معادلات پارامتری $x(t) = \dfrac{۱}{\cosh t}$, $y(t) = ۰$, $z(t) = t - \dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ مشخص می‌شود.

مثال ۲ـ۴ـ۲ خم C به معادلات پارامتری $x = ۳t$، $y = ۳t^۲$ و $z = ۲t^۳$ برای $t \neq ۰$ مفروض است. خط مماس بر C در نقطه‌ی دلخواه $M \in C$ صفحات xoy و xoz را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. نشان می‌دهیم $\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|}$ مقداری ثابت و مستقل از انتخاب نقطه‌ی $M \in C$ است (شکل ۲ـ۶).

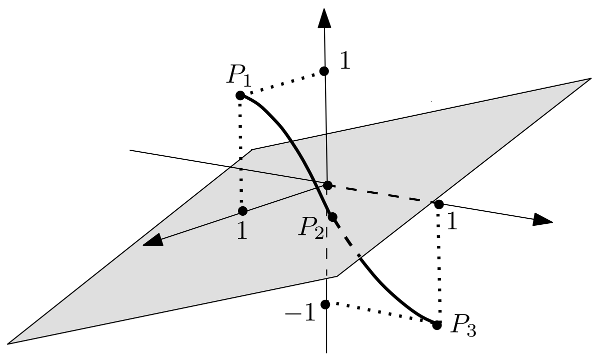


شکل ۲ـ۶ خم مثال ۲ـ۴ـ۲ با معادلات پارامتری $x = ۳t$، $y = ۳t^۲$ و $z = ۲t^۳$.

خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t) = ۳t\mathbf{i} + ۳t^۲\ \mathbf{j} + ۲t^۳\mathbf{k}$ است. فرض کنیم L_M خط مماس بر خم C در نقطه‌ی $M = (۳t, ۳t^۲, ۲t^۳)$ باشد. در این صورت $L_M \parallel \mathbf{r}'(t) = ۳\ \mathbf{i} + ٦t\ \mathbf{j} + ٦t^۲\ \mathbf{k}$ و معادلات پارامتری L_M عبارت است از $x = ۳\lambda + ۳t$، $y = ٦t\lambda + ۳t^۲$ و $z = ٦t^۲\lambda + ۲t^۳$. محل برخورد L_M با صفحه‌ی xoy به ازای $z = ۰$ به دست می‌آید. پس $٦t^۲\lambda + ۲t^۳ = ۰$ و در نتیجه $\lambda = -\frac{t}{۳}$. به این ترتیب $A = (۲t, t^۲, ۰)$. به همین ترتیب محل برخورد L_M با صفحه‌ی xoz به ازای $y = ۰$ به دست می‌آید. پس $٦t\lambda + ۳t^۲ = ۰$ و در نتیجه $\lambda = -\frac{۱}{۲}t$. بنابراین $B = (\frac{۳}{۲}t, ۰, -t^۳)$. پس $\overrightarrow{MA} = -t\ \mathbf{i} - ۲t^۲\ \mathbf{j} - ۲t^۳\ \mathbf{k}$ و $\overrightarrow{MB} = -\frac{۳}{۲}t\ \mathbf{i} - ۳t^۲\ \mathbf{j} - ۳t^۳\ \mathbf{k}$ یعنی $\overrightarrow{MB} = \frac{۳}{۲}\overrightarrow{MA}$ و در نتیجه $\frac{||\overrightarrow{MA}||}{||\overrightarrow{MB}||} = \frac{۲}{۳}$.

مثال ۲–۴–۳ خم C به معادلات پارامتری $x = \cos t$، $y = \sin t$ و $z = \cos ۲t$ برای $t \in \mathbb{R}$ مفروض است. می‌خواهیم نقاطی از خم را تعیین کنیم که صفحه‌ی قائم در این نقاط شامل مبداء مختصات باشد.

تابع برداری نظیر C عبارت است از $\mathbf{r}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j} + \cos ۲t\ \mathbf{k}$. فرض کنیم π_P صفحه‌ی قائم بر C در نقطه‌ی $P \in C$ شامل مبدأ مختصات O باشد. در این صورت از $P, O \in \pi_P$ نتیجه می‌شود $OP \subseteq \pi_P$. پس $\mathbf{r}'(t) \perp \overrightarrow{OP}$ که معادل است با $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰$. با توجه به این که $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j} - ۲\sin ۲t\ \mathbf{k}$، تساوی $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰$ معادل است با $-۲\sin ۲t \cos ۲t = ۰$، یعنی $\sin ۴t = ۰$ یا $t = \frac{k\pi}{۴}$ $(k \in \mathbb{Z})$. سه نقطه‌ی $P_۰$، $P_۱$ و $P_۲$ بر خم C، به ترتیب متناظر با $t = ۰, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}$ در شکل ۲–۷ مشاهده می‌شوند.



شکل ۲–۷ خم C و صفحه‌ی قائم بر آن در مثال ۲–۴–۳.

۲–۵ توابع حقیقی چند متغیره

دسته‌ی دیگری از توابع که در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و علوم فنی و مهندسی مطرح می‌شوند توابع حقیقی چند متغیره هستند. تابع $f: D \to \mathbb{R}$ برای $D \subseteq \mathbb{R}^n$ که $\mathbf{x} = (x_۱, \cdots, x_n) \in D$ را به $f(x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$ تصویر می‌کند **تابع حقیقی n متغیره** روی D نامیده می‌شود. برای مثال دمای نقطه‌ای مانند $P = (x, y, z)$ از یک جسم فیزیکی را می‌توان یک تابع حقیقی سه متغیره با ضابطه‌ی $T(x, y, z)$ از مختصات نقاط آن در نظر گرفت.

به دلیل اهمیت حالت‌های خاص $n = ۲, ۳$، این حالت‌ها را جداگانه بیان می‌کنیم.

تابع $f: D \to \mathbb{R}$، برای $D \subseteq \mathbb{R}^۲$، که به هر (x, y) در D عدد حقیقی $z = f(x, y)$ را نظیر می‌کند **تابع حقیقی ۲ متغیره** نامیده می‌شود.

به همین ترتیب تابع $f: D \to \mathbb{R}$، برای $D \subseteq \mathbb{R}^۳$، که به هر (x, y, z) در D عدد حقیقی $w = f(x, y, z)$ را نظیر می‌کند **تابع حقیقی ۳ متغیره** نامیده می‌شود.

مثال ۲–۵–۱ توابع زیر نمونه‌هایی از توابع ۲، ۳ و n متغیره‌ی حقیقی هستند.

۱) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۱\}, \quad f: D \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$

۲) $D = \{(x, y, z) : \ x^۲ + y^۲ \neq ۱\}, \quad f: D \to \mathbb{R}, \ f(x, y, z) = \dfrac{z}{۱ - x^۲ - y^۲}$

۳) $D = \mathbb{R}^n, \quad f: D \to \mathbb{R}, \ f(x_۱, ..., x_n) = x_۱$

۴) $D = \mathbb{R}^n, \quad f: D \to \mathbb{R}, \ f(x_۱, ..., x_n) = \sqrt{x_۱^۲ + ... + x_n^۲}$

نظیر توابع حقیقی یک متغیره، برای توابع حقیقی چند متغیره مفاهیم دامنه، برد، جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ترکیب با توابع حقیقی یک متغیره و توابع برداری مطرح می‌شوند. در مثال زیر به اختصار حالت‌های مختلف عنوان شده است.

مثال ۲–۵–۲ تابع حقیقی دو متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x, y) = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$، تابع حقیقی دو متغیره‌ی g با ضابطه‌ی $g(x, y) = \dfrac{۱}{۱ - x^۲ - ۲y^۲}$، تابع حقیقی یک متغیره‌ی h با ضابطه‌ی $h(x) = x^۲ - ۱$ و تابع برداری $\mathbf{r}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t \ \mathbf{i} + e^t \cos t \ \mathbf{j}$ را در نظر می‌گیریم. دامنه‌ی این توابع و ضابطه‌ی توابع $f + g$، f/g ،fg، $h \circ f$ و $f \circ \mathbf{r}$ را به دست می آوریم.

یادآوری می‌کنیم که دامنه‌ی توابع، اگر به طور صریح مشخص نشده باشند، بزرگترین مجموعه‌ای در نظر گرفته می‌شود که ضابطه‌ی تابع برای آن معنی‌دار است و با D_f نمایش داده می‌شود. به این ترتیب دامنه‌ی f و g عبارت است از:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۱\} \ , \ D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + ۲y^۲ \neq ۱\}$$

ضابطه‌ی توابع $f+g$، f/g و fg با دامنه‌ی $D_f \cap D_g$ به شکل زیر است.

$$(f+g)(x,y) = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲} + \frac{۱}{۱ - x^۲ - ۲y^۲}$$

$$(f/g)(x,y) = (۱ - x^۲ - ۲y^۲)\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$$

$$(fg)(x,y) = \frac{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}}{۱ - x^۲ - ۲y^۲}$$

به همین ترتیب ضابطه‌ی توابع $h \circ f$ و $f \circ \mathbf{r}$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(h \circ f)(x,y) = h(f(x,y)) = (\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲})^۲ - ۱ = -x^۲ - y^۲$$

$$(f \circ \mathbf{r})(t) = f(x(t), y(t)) = \sqrt{۱ - (e^t \sin t)^۲ - (e^t \cos t)^۲} = \sqrt{۱ - e^{۲t}}$$

۲–۶ نمودار توابع حقیقی

یکی از مفاهیم مفید در بررسی رفتار توابع حقیقی، مفهوم نمودار است. برای تابع یک متغیره‌ی حقیقی مانند $f : I \to \mathbb{R}$ که I بازه‌ای از مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، **نمودار** تابع f عبارت است از مجموعه‌ی

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x \in I \ , \ y = f(x) \ \}$$

به این ترتیب نمودار یک تابع حقیقی یک متغیره زیر مجموعه‌ای از صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ است.

به همین ترتیب اگر $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ و $f : D \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی دو متغیره روی D باشد، نمودار تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ (x,y) \in D \ , \ z = f(x,y) \ \}$$

پس نمودار یک تابع دومتغیره زیر مجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ است. در حالتی که نمودار یک تابع دومتغیره تشکیل یک رویه در فضای $\mathbb{R}^۳$ دهد آن را **رویه‌ی نظیر** f یا رویه‌ی S_f با معادله‌ی $z = f(x,y)$ می‌نامیم.

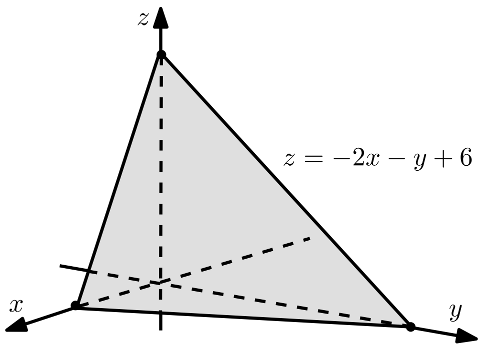
نمودار توابع حقیقی n متغیره برای $n \geq ۳$ به شکل مشابه تعریف می‌شود ولی برای این توابع نمی‌توان رویه‌ی نظیر را تجسم کرد.

مثال ۲-۶-۱ چند تابع دو متغیره و رویه‌ی نظیر آنها در زیر داده شده است.

۱) $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x,y)=-۲x-y+۶$

$$S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳}\ :\ z=-۲x-y+۶\}$$

نمودار این تابع یک صفحه است (شکل ۲-۸)

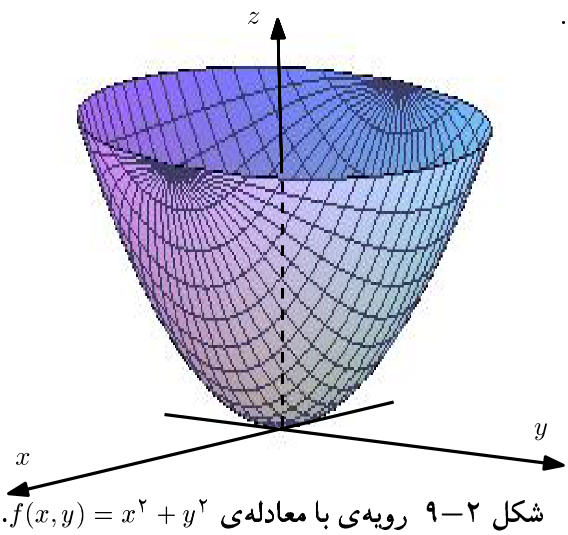


شکل ۲-۸ رویه‌ی با معادله‌ی $f(x,y)=-۲x-y+۶$.

۲) $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}$

$$S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳}\ :\ z=x^{۲}+y^{۲}\}$$

نمودار این تابع **سهمی‌گون دوار** نامیده می‌شود. به این رویه در بخش‌های بعد نیز خواهیم پرداخت. در شکل ۲-۹ بخشی از این رویه روی ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\ :\ x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\}$ مشاهده می‌شود.

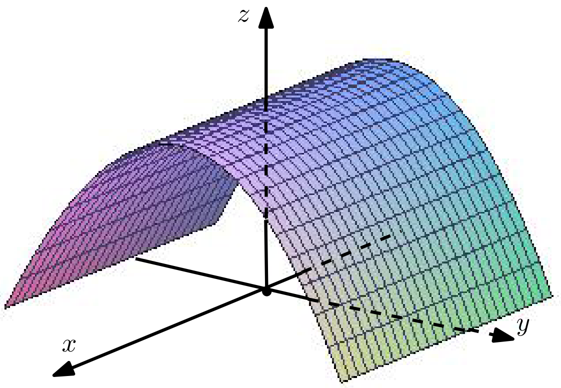


شکل ۲-۹ رویه‌ی با معادله‌ی $f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}$.

۳) $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}\,,\ f(x,y)=۱-y^{۲}$

$$S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳} : z=۱-y^{۲}\}\subseteq\mathbb{R}^{۳}$$

در شکل ۲–۱۰ رویه را روی ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\ :\ -۱\le x\le ۱\ ,\ -۱\le y\le ۱\}$ مشاهده می‌کنیم.

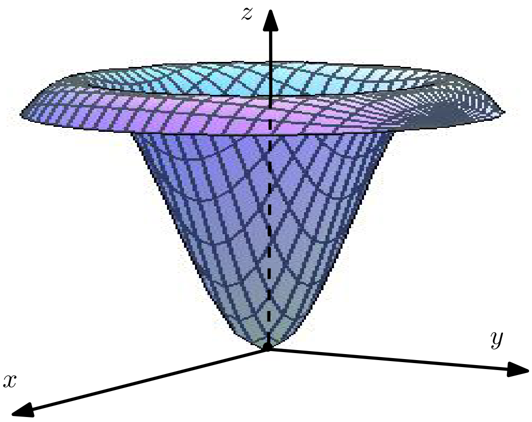


شکل ۲–۱۰ رویه‌ی با معادله‌ی $f(x,y)=۱-y^{۲}$.

۴) $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}\,,\ f(x,y)=(x^{۲}+y^{۲})e^{-x^{۲}-y^{۲}}$

$$S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳}\ :\ z=(x^{۲}+y^{۲})e^{-x^{۲}-y^{۲}}\}$$

در شکل ۲–۱۱ بخشی از این رویه روی ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\ :\ x^{۲}+y^{۲}\le ۲\}$ مشاهده می‌شود.

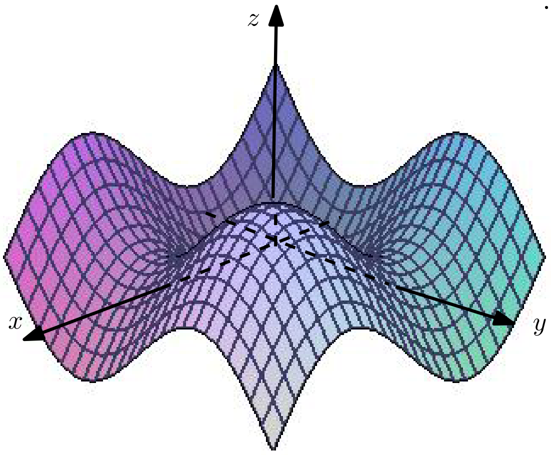


شکل ۲–۱۱ رویه‌ی با معادله‌ی $f(x,y)=(x^{۲}+y^{۲})e^{-x^{۲}-y^{۲}}$.

۵) $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x,y)=\sin x+\sin y$

$$S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳}\ :\ z=\sin x+\sin y\}$$

در شکل ۲—۱۲ رویه را روی ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\ :\ -\pi\leq x\leq\pi\ ,\ -\pi\leq y\leq\pi\}$ مشاهده می‌کنیم.



شکل ۲—۱۲ رویه‌ی با معادله‌ی $z=\sin x+\sin y$.

مثال ۲–۶–۲ تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=y^{۲}-x^{۲}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) می‌خواهیم مقطع نمودار تابع f را با صفحه‌های مختصات و صفحه‌ی $z=k$ تعیین کنیم.

ب) نشان می‌دهید خم C با معادلات پارامتری $x=\sin t$، $y=\cos t$ و $z=\cos ۲t$ برای $t\in[۰,۲\pi]$ بر S_f قرار گرفته است.

ج) نقاطی از خم C را تعیین کنید که خط مماس بر خم در این نقاط بر رویه‌ی S_f قرار گرفته‌اند.

د) برای نقطه‌ی $A=(۱,۲,۳)\in S_f$ نشان می‌دهیم دقیقاً دو خط راست وجود دارد که از این نقطه می‌گذرند و بر رویه‌ی S_f قرار دارند.

الف) فرض کنیم $\pi_{x=۰}$، $\pi_{y=۰}$ ، $\pi_{z=۰}$ و $\pi_{z=k}$ به ترتیب صفحه‌های yoz، zox، xoy و صفحه‌ی $z=k$ باشند. از $S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳}\ :\ z=y^{۲}-x^{۲}\}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
S_f\cap\pi_{z=۰} &= \{(x,y,۰)\ :\ y^{۲}-x^{۲}=۰\}=\{(x,y,۰)\ :\ y=\pm x\}\\
S_f\cap\pi_{x=۰} &= \{(۰,y,z)\ :\ z=y^{۲}\},\quad S_f\cap\pi_{y=۰}=\{(x,۰,z)\ :\ z=-x^{۲}\}\\
S_f\cap\pi_{z=k} &= \{(x,y,k)\ :\ y^{۲}-x^{۲}=k\}
\end{aligned}$$

ب) برای نقطه‌ی $Q=(x,y,z)\in C$ یک $t\in[\circ,\text{۲}\pi]$ وجود دارد به قسمی که $x=\sin t$، $y=\cos t$ و $z=\cos\text{۲}t$. از رابطه‌ی $y^{\text{۲}}-x^{\text{۲}}=\cos^{\text{۲}}t-\sin^{\text{۲}}t=\cos\text{۲}t=z$ نتیجه می‌شود که مختصات Q در معادله‌ی رویه صدق می‌کنند و در نتیجه $C\subseteq S_f$.

ج) فرض کنیم $P=(\sin t,\cos t,\cos\text{۲}t)\in C$ نقطه‌ای دلخواه از خم C و L_p خط مماس بر C در P باشد. برای تابع برداری $\mathbf{r}(t)=\sin t\ \mathbf{i}+\cos t\ \mathbf{j}+\text{۲}\cos\text{۲}t\ \mathbf{k}$ که C را مشخص می‌کند، $\mathbf{r}'(t)=\cos t\ \mathbf{i}-\sin t\ \mathbf{j}-\text{۲}\sin\text{۲}t\ \mathbf{k}$. پس معادله‌ی خط مماس بر C در P عبارت است از:

$$L_P:\begin{cases} x=(\cos t)\lambda+\sin t \\ y=(-\sin t)\lambda+\cos t \\ z=(-\text{۲}\sin\text{۲}t)\lambda+\cos\text{۲}t\end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

اگر $P\in C$ نقطه‌ای باشد که $L_P\subseteq S_f$ آنگاه برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ باید داشته باشیم:

$$(-\text{۲}\sin\text{۲}t)\lambda+\cos\text{۲}t=[(-\sin t)\lambda+\cos t]^{\text{۲}}-[(\cos t)\lambda+\sin t]^{\text{۲}}$$

این معادل است با این که برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$، $(\sin^{\text{۲}}t-\cos^{\text{۲}}t)\lambda^{\text{۲}}=\cos\text{۲}t\ \lambda^{\text{۲}}=\circ$، بنابر این باید داشته باشیم $\cos\text{۲}t=\circ$. جواب‌های این معادله برای $t\in[\circ,\text{۲}\pi]$ عبارتند از $t=\frac{\pi}{\text{۴}},\frac{\text{۳}\pi}{\text{۴}},\frac{\text{۵}\pi}{\text{۴}},\frac{\text{۷}\pi}{\text{۴}}$. مثلاً برای $t_\circ=\frac{\pi}{\text{۴}}$ معادله‌ی خط $L_{P_\circ}$ به شکل زیراست (شکل ۳—۲):

$$L_{P_\circ}:\begin{cases} x=\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}\lambda+\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}} \\ y=(-\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}})\lambda+\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}} \\ z=-\text{۲}\lambda\end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

د) برای $P=(\text{۱},\text{۲},\text{۳})$ فرض کنیم L_P خط گذرنده از P با بردار هادی $\mathbf{v}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}+c\,\mathbf{k}$ باشد. معادله‌ی L_P به شکل زیر است:

$$L_P:\begin{cases} x=at+\text{۱} \\ y=bt+\text{۲} \\ z=ct+\text{۳}\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

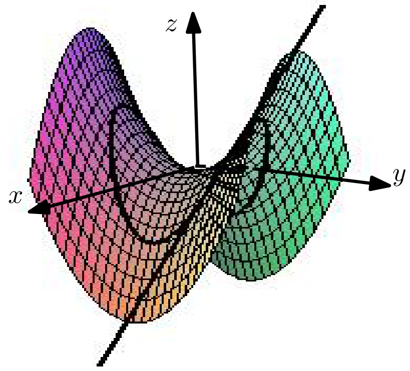
به این ترتیب $L_P\subseteq S_f$ معادل است با این که برای هر عددی حقیقی t داشته باشیم $ct+\text{۳}=(bt+\text{۲})^{\text{۲}}-(at+\text{۱})^{\text{۲}}$، یعنی برای هر t، $(b^{\text{۲}}-a^{\text{۲}})t^{\text{۲}}+(\text{۴}b-\text{۲}a-c)t=\circ$. در نتیجه باید داشته باشیم $b^{\text{۲}}-a^{\text{۲}}=\circ$ و $\text{۴}b-\text{۲}a-c=\circ$. پس یا $c=\text{۲}a$ و $b=a$ یا $c=-\text{۶}a$ و $b=-a$. به این ترتیب بردارهای هادی $\mathbf{v}_{\text{۱}}$ و $\mathbf{v}_{\text{۲}}$ عبارتند از:

$$\mathbf{v}_{\text{۱}}=a\ \mathbf{i}+a\ \mathbf{j}+\text{۲}a\ \mathbf{k}=a(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\text{۲}\mathbf{k})\ ||\ \mathbf{i}+\mathbf{j}+\text{۲}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_{\text{۲}}=a\ \mathbf{i}-a\ \mathbf{j}-\text{۶}a\ \mathbf{k}=a(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\text{۶}\mathbf{k})\ ||\ \mathbf{i}-\mathbf{j}-\text{۶}\mathbf{k}$$

و در نتیجه معادلات پارامتری خطوط $L_۱$ و $L_۲$ عبارتند از:

$$L_۱ : \begin{cases} x = t + ۱ \\ y = t + ۲ \\ z = ۲t + ۳ \end{cases} , \qquad L_۲ : \begin{cases} x = t + ۱ \\ y = -t + ۲ \\ z = -۶t + ۳ \end{cases}$$



شکل ۲–۱۳ رویه‌ی با معادله‌ی $z = y^۲ - x^۲$، **خم** C **و خط** $L_{P_۰}$ **در مثال ۲–۶–۲.**

۲–۷ مجموعه‌های تراز توابع چند متغیره

یکی دیگر از مفاهیم هندسی مربوط به توابع حقیقی چند متغیره، مفهوم مجموعه‌ی تراز است. به کمک مجموعه‌های تراز اطلاعات زیادی از رفتار هندسی تابع به دست می آید. مجموعه‌ی تراز در نقشه‌های جریانهای هوا، نقشه‌ی مناطق جغرافیایی و توموگرافی و زمینه‌های گسترده‌ای به کار می‌روند.

برای تابع دو متغیره‌ی $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ که $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ و $c \in \mathbb{R}$، **مجموعه‌ی تراز** تابع f نظیر c عبارت است از:

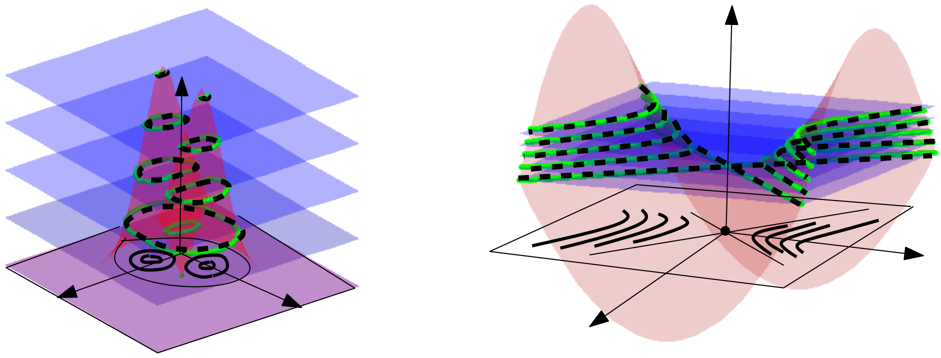
$$L_c := \{(x, y) \in D \ : \ f(x, y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^۲$$

اگر این مجموعه در صفحه‌ی xoy یک خم باشد آنگاه این خم را **خم (منحنی) تراز** تابع f به ازای ثابت c می‌نامیم (شکل ۲–۱۴).

به همین ترتیب برای تابع سه متغیره‌ی $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ که $D \subseteq \mathbb{R}^۳$ و عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$، **مجموعه‌ی تراز** تابع f به ازای c عبارت است از:

$$L_c := \{(x, y, z) \in D \ : \ f(x, y, z) = c\} \subseteq \mathbb{R}^۳$$

اگر این مجموعه‌ی یک رویه باشد آنگاه این مجموعه را **رویه‌ی تراز** تابع f به ازای ثابت c و یا رویه‌ی S_f به معادله‌ی $f(x,y,z) = c$ می‌نامیم. دو رویه یا دو خم تراز متفاوت

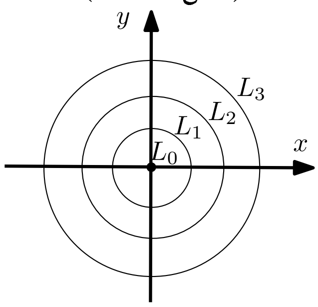


شکل ۲—۱۴ خم‌های تراز در صفحه‌ی xoy.

مثال ۲—۷—۱ مجموعه‌های تراز توابع زیر را برای $c = -۱, ۰, ۱$ تعیین کنید.

الف) تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x^۲ + y^۲$.

برای این تابع $L_{-۱} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; ; \;\; f(x,y) = x^۲ + y^۲ = -۱\}$ مجموعه‌ی تهی است. به همین ترتیب $L_۰ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; f(x,y) = x^۲ + y^۲ = ۰\} = \{(۰,۰)\}$ مجموعه‌ای تک نقطه‌ای و $L_۱ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; f(x,y) = x^۲ + y^۲ = ۱\}$ یک دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۱ است (شکل ۲—۱۵).



شکل ۲—۱۵ خم‌های تراز تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = y^۲ + x^۲$ **برای** $c = ۰, ۱, ۲, ۳$.

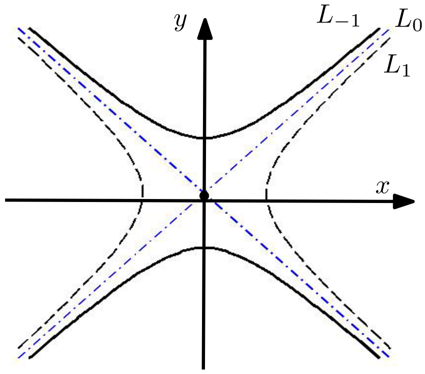
ب) تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = y^۲ - x^۲$.

$$L_{-۱} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; f(x,y) = -۱\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; x^۲ - y^۲ = ۱\}$$

$$L_۰ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; f(x,y) = y^۲ - x^۲ = ۰\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; y = \pm x\}$$

$$L_۱ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; f(x,y) = y^۲ - x^۲ = ۱\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;\; : \;\; y^۲ - x^۲ = ۱\}$$

مشاهده می‌کنیم که خم‌های $L_۱$ و $L_{-۱}$ هذلولی هستندُ در حالی که $L_۰$ اجتماع دو خط متقاطع است (شکل ۲—۱۶).

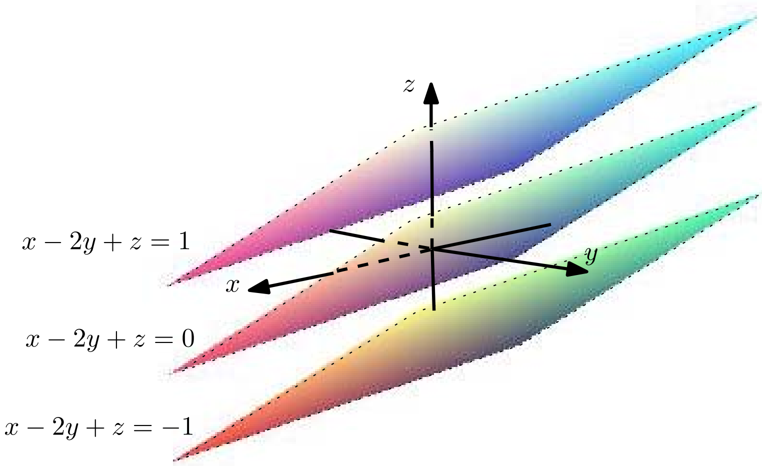


شکل ۲—۱۶ خم‌های تراز تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = y^۲ - x^۲$ **برای** $c = -۱, ۰, ۱$.

ج) تابع $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x - ۲y + z$.

$$L_{-۱} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ f(x,y,z) = x - ۲y + z = -۱\} \subseteq \mathbb{R}^۳$$
$$L_۰ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ f(x,y,z) = x - ۲y + z = ۰\} \subseteq \mathbb{R}^۳$$
$$L_۱ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ f(x,y,z) = x - ۲y + z = ۱\} \subseteq \mathbb{R}^۳$$

برای این تابع همه‌ی رویه‌های تراز صفحه هستند (شکل ۲—۱۷).

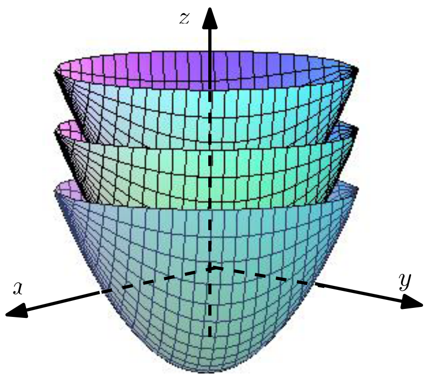


شکل ۲—۱۷ رویه‌های تراز تابع با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x - ۲y + z$ **برای** $c = -۱, ۰, ۱$.

د) تابع $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=-x^2-y^2+z$.

$L_{-1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : z=x^2+y^2-1\}$
$L_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : z=x^2+y^2\}$
$L_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : z=x^2+y^2+1\}$

برای این تابع همه‌ی رویه‌های تراز سهمی‌گون دوار هستند (شکل ۲–۱۸).



شکل ۲–۱۸ رویه‌های تراز تابع با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=-x^2-y^2+z$ برای $c=-1,0,1$.

ه) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $c=-1,0,1$

$L_{-1}:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=-1\}=\emptyset$
$L_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=0\}=\{(0,0,0)\}$
$L_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1\}\subseteq\mathbb{R}^3$ کره

و) $f(x,y,z)=x^2+y^2$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $c=0,1,2$

$L_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2=0\}=\{(0,0,z) \ : \ z\in\mathbb{R}\}$ محور z
$L_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z)=x^2+y^2=1\}$ استوانه
$L_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z)=x^2+y^2=2\}$ استوانه

۲–۸ رویه‌های درجه دو

رده‌ای از رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$ رویه‌های اصطلاحاً درجه‌ی دو هستند. این رویه‌ها را می‌توان تعمیم ساده‌ای از مخروط به حساب آورد. به کمک این رویه‌ها که در مسائل کاربردی زیادی ظاهر می‌شوند مثال‌های خوبی برای بسیاری از قضیه‌های حساب دیفرانسیل مطرح می‌شوند. از اینرو آنها را با جزییات بیشتری بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ و J اعداد حقیقی ثابتی باشند که A, B, C, D, E و F همگی صفر نیستند. در این صورت تابع $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x, y, z) = Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J$$

یک **تابع درجه‌ی** دو نامیده می‌شود.

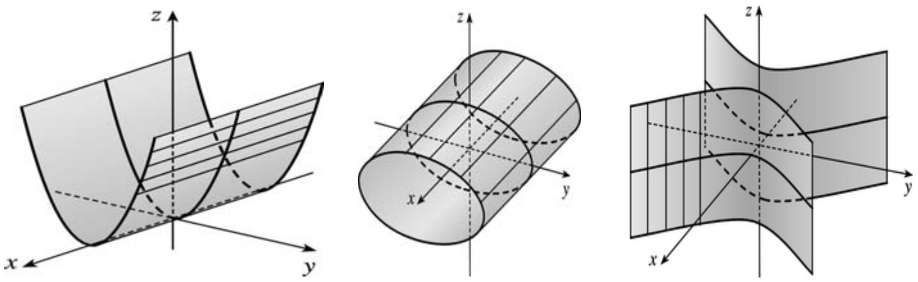
رویه‌های تراز توابع درجه‌ی دو را **رویه‌های درجه دو** می‌نامیم. به عبارت دیگر، یک رویه‌ی درجه‌ی دو، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ به شکل زیر است:

$$Q = \{(x, y, z) \ : \ Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = ۰ \}$$

مخروط، کره و استوانه نمونه‌هایی از رویه‌های درجه دو هستند. با تغییر مختصات مناسب معادله‌ی یک سطح درجه‌ی دو همواره به شکل اصطلاحاً استاندارد قابل بیان است:

$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dx + Ey + Fz + G = ۰$$

در حالتی که ضرایب یکی از متغیرها، مثلاً ضریب متغیر z، صفر باشد (ولی A و B هر دو با هم صفر نباشند)، رویه‌ی درجه‌ی دو $Ax^۲ + By^۲ + Dx + Ey + G = ۰$ یک **رویه‌ی استوانه‌ای درجه دو** نامیده می‌شود. مقطع این رویه با صفحه‌ی xoy یکی از مقاطع مخروطی است (شکل ۲ــ۱۹).



شکل ۲ــ۱۹ چند رویه‌ی درجه‌ی دو استوانه‌ای.

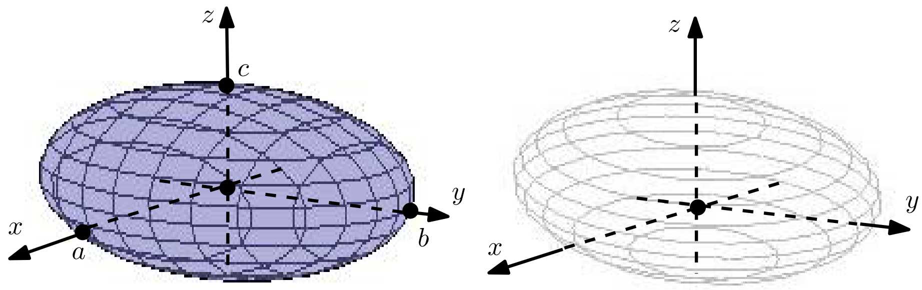
برخی از رویه‌های درجه‌ی دو **تباهیده** نامیده می‌شوند و مورد توجه ما نیستند، برای مثال:

مجموعه‌ی تهی	$x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۱ = ۰$
مبدأ مختصات	$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$
محور z	$x^۲ + y^۲ = ۰$
یک صفحه $(x = ۱)$	$(x - ۱)^۲ = ۰$
دو صفحه‌ی موازی $(x = \pm ۱)$	$x^۲ - ۱ = ۰$
دو صفحه‌ی متقاطع $(x = \pm y)$	$x^۲ - y^۲ = ۰$

تعدادی از رویه‌های درجه‌ی دو در عمل اهمیت بیشتری دارند. این حالت‌های خاص را به صورت اصطلاحاً استاندارد مطرح می‌کنیم (شکل‌های ۲—۲۰ تا ۲—۲۵).

۱) بیضی‌گون

معادله‌ی بیضی گون به صورت استاندارد، $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ است. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن بیضی‌گون هستند. این رویه با مجموعه‌ی $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳\ :\ \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱\}$ مشخص می‌شود (شکل ۲—۲۰).



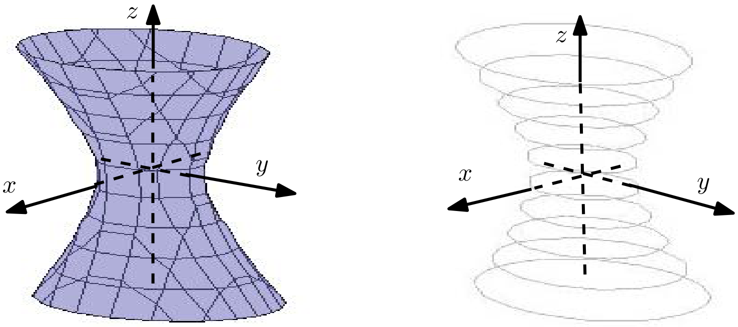
شکل ۲—۲۰ بیضی‌گون.

برای $-a<k<a$ مقطع بیضی‌گون با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک بیضی به معادله‌ی $\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱-\frac{k^۲}{a^۲}$ است. به همین ترتیب مقطع بیضی‌گون با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ برای $-b<k<b$ بیضی به معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱-\frac{k^۲}{b^۲}$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ برای $-c<k<c$ بیضی با معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱-\frac{k^۲}{c^۲}$ است. درحالت خاص $a=b=c$، بیضی‌گون یک کره است. لازم به ذکر است که کره یک رویه‌ی دوار نیز محسوب می‌شود که در بخش بعد از چشم‌انداز دیگری بررسی می‌شود.

۲) هذلولی‌گون یک‌پارچه

معادله‌ی هذلولی‌گون یک‌پارچه به صورت استاندارد، $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ است. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن هذلولی‌گون یک‌پارچه هستند. این رویه با مجموعه‌ی $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳\ :\ \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱\}$ مشخص می‌شود.
مقطع هذلولی‌گون یک‌پارچه با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک هذلولی به معادله‌ی

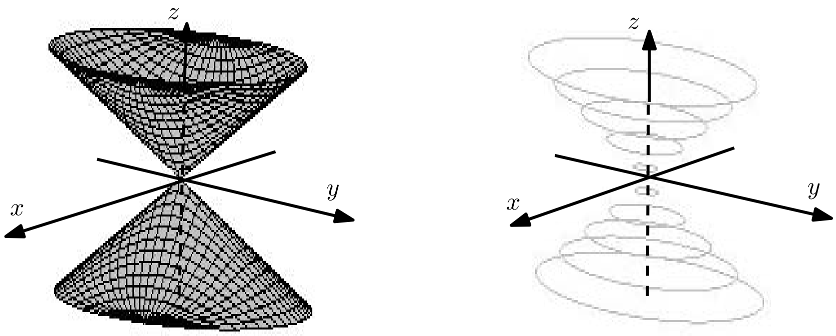
$\frac{y^۲}{b^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۱ - \frac{k^۲}{a^۲}$ است. به همین ترتیب مقطع این رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $y = k$، هذلولی به معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۱ - \frac{k^۲}{b^۲}$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z = k$ یک بیضی با معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ + \frac{k^۲}{c^۲}$ است (شکل ۲—۲۱)



شکل ۲—۲۱ هذلولی‌گون یک‌پارچه.

۳) مخروط بیضوی

معادله‌ی مخروط بیضوی به صورت استاندارد، $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۰$ است. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن مخروط بیضوی هستند (شکل ۲—۲۲).

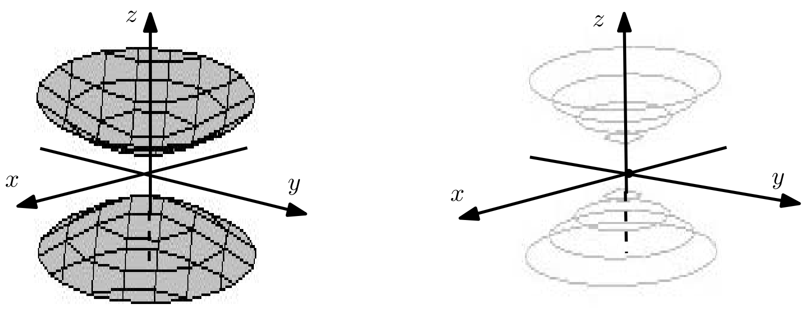


شکل ۲—۲۲ مخروط بیضوی.

مقطع مخروط بیضوی با صفحه‌ی به معادله‌ی $x = k$ یک هذلولی به معادله‌ی $\frac{z^۲}{c^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{k^۲}{a^۲}$، با صفحه‌ی به معادله‌ی $y = k$ هذلولی به معادله‌ی $\frac{z^۲}{c^۲} - \frac{x^۲}{a^۲} = \frac{k^۲}{b^۲}$ و با صفحه‌ی به معادله‌ی $z = k$ یک بیضی با معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{k^۲}{c^۲}$ است.

۴) هذلولی‌گون دوپارچه

معادله‌ی هذلولی‌گون دوپارچه به صورت استاندارد، $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن هذلولی‌گون یک‌پارچه هستند (شکل ۲—۲۳).



شکل ۲—۲۳ هذلولی‌گون دوپارچه.

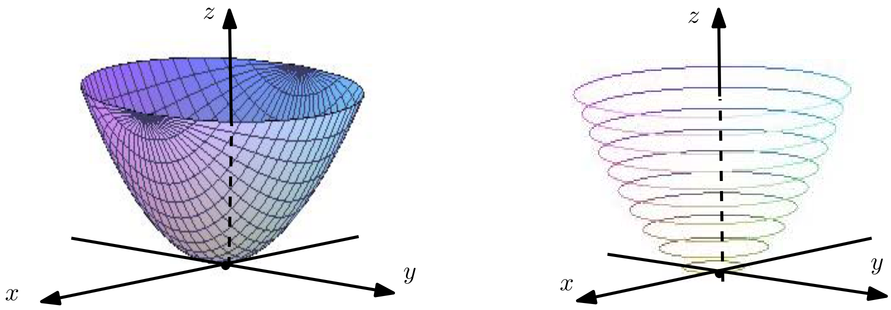
مقطع هذلولی‌گون یک‌پارچه با صفحه‌ی $x=k$ یک هذلولی به معادله‌ی $\frac{k^2}{a^2}+1=\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ است. به همین ترتیب مقطع این رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ هذلولی به معادله‌ی $\frac{k^2}{b^2}+1=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ برای $c<|k|$ بیضی با معادله‌ی $\frac{k^2}{c^2}-1=\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}$ است.

همان‌گونه که پیش از این گفته شد، کره، بیضی‌گون، هذلولی‌گون یک‌پارچه، هذلولی‌گون دوپارچه و مخروط رویه‌هایی با مرکز تقارن هستند. در ادامه به معرفی دو رویه‌ی درجه دوم بدون مرکز تقارن می‌پردازیم.

۵) سهمی‌گون بیضوی

معادله‌ی سهمی‌گون بیضوی به صورت استاندارد، $cz=\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}$ است. محورهای مختصات، محور تقارن سهمی‌گون بیضوی هستند (شکل ۲—۲۴). مقطع این رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک سهمی به معادله‌ی $cz=\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ است. به همین ترتیب مقطع رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ سهمی به معادله‌ی $cz=\frac{k^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}$ و

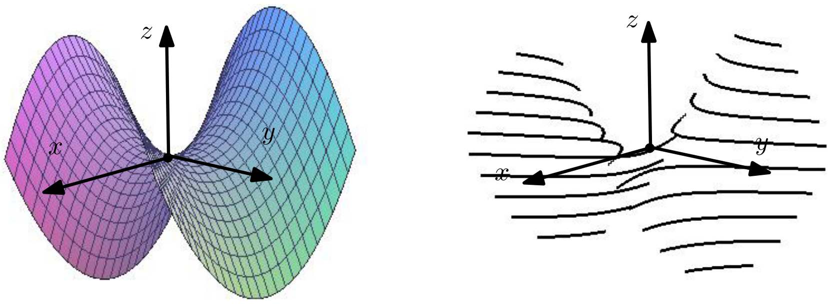
مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ برای $k>0$ بیضی با معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=kc$ است. در حالت $k=0$، صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$، بیضی‌گون استاندارد در راستای محور z را فقط در مبدأ مختصات قطع می‌کند و برای $k<0$ صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ با این رویه نقطه‌ی مشترک ندارد.



شکل ۲—۲۴ سهمی‌گون بیضوی.

۶) سهمی‌گون هذلولوی (رویه‌ی زین اسبی)

معادله‌ی سهمی‌گون هذلولوی که رویه‌ی زین اسبی هم نامیده می‌شود به صورت استاندارد، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$ است. محورهای مختصات، محور تقارن زین اسبی هستند (شکل ۲—۲۵).



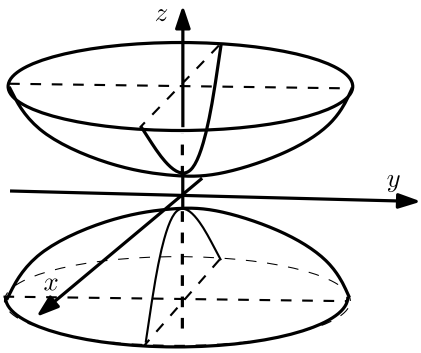
شکل ۲—۲۵ رویه‌ی زین اسبی.

مقطع زین اسبی با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک سهمی به معادله‌ی $\frac{k^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$ است. به همین ترتیب مقطع سهمی‌گون بیضوی با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ سهمی به معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=cz$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ یک هذلولی با معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=kc$ است.

مثال ۲-۸-۱ برای رویه‌ی S به معادله‌ی $x^{2}-y^{2}+z^{2}=-1$ مقطع S با صفحه‌های xoy، xoz و yoz و خم‌های تراز را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{rcll} S\cap\pi_{x=0} &=& \{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ y^2-z^2=1\} & \text{هذلولی}\\ S\cap\pi_{y=0} &=& \{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ x^2+z^2=-1\} & \text{مجموعه‌ی تهی}\\ S\cap\pi_{z=0} &=& \{(z,y,0)\in\mathbb{R}^3 \ :\ y^2-x^2=1\} & \text{هذلولی}\\ S\cap\pi_{y=k} &=& \{(x,k,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ x^2+z^2=k^2-1\} & \text{دایره} \end{array}$$

مقطع S با صفحات $y=k$، در حالتی که $|k|>1$ یک دایره، در حالت $|k|=1$ یک نقطه و برای $|k|<1$ تهی است. رویه‌ی S هذلولی‌گون دوپارچه‌ی دوار است.



شکل ۲-۲۵ رویه‌ی S به معادله‌ی $x^{2}-y^{2}+z^{2}=-1$ و مقطع آن با صفحه‌های xoy، xoz و yoz.

مثال ۲-۸-۲ رویه‌ی S به معادله‌ی $x^{2}+y^{2}-z^{2}=2z+2$ را در نظر می‌گیریم.

الف) رویه‌ی S را به شکل استاندارد بیان می‌کنیم.

ب) نشان می‌دهیم از نقطه‌ی $P_0=(1,1,0)\in S$ دقیقاً دو خط راست می‌گذرند که تماماً بر رویه‌ی S قرار دارند.

الف) با تغییر متغیر $X=x\ ,\ Y=y\ ,\ Z=z+1$ معادله‌ی S به شکل $X^{2}+Y^{2}-Z^{2}=1$ در می‌آید. بنابر این S هذلولی‌گون یک پارچه‌ی دوار با محور z به عنوان محور دوران و مرکز تقارن $(0,0,-1)$ است

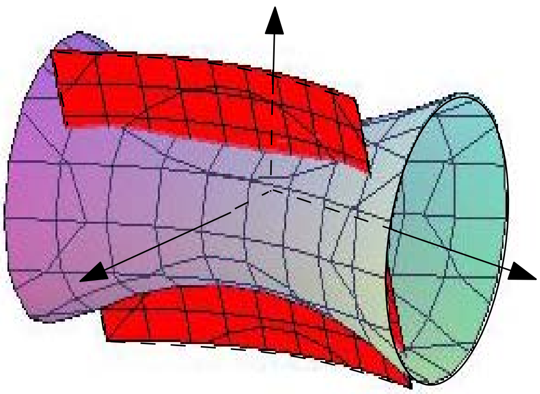
ب) فرض کنیم L_0 خط دلخواهی با بردار هادی $\mathbf{v}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}+c\,\mathbf{k}$ باشد که از

$P_0 = (1, 1, 0)$ می‌گذرد. معادله‌ی L_0 به شکل زیر است:

$$L_0 : \begin{cases} x = at + 1 \\ y = bt + 1 \\ z = ct + 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

شرط $L_0 \subseteq S$ معادل است با این که برای هر t، $(at+1)^2 + (bt+1)^2 - (ct+1)^2 = 1$، یعنی برای هر t، $(a^2 + b^2 - c^2)t^2 + 2(a+b-c)t = 0$. بنابر این $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ و $2(a+b-c) = 0$. از این دو معادله نتیجه می‌شود $a^2 + b^2 + 2ab = c^2$. با استفاده از معادله‌ی اول باید داشته باشیم $ab = 0$. پس $a = 0$ یا $b = 0$. به این ترتیب برای این معادله دقیقاً دو جواب $a = 0, b = c$ و $b = 0, a = c$ به دست می‌آید. بنابر این $\mathbf{v}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ بردارهای هادی دو خط مورد نظر هستند.

مثال ۲–۸–۳ رویه‌های $S_1 : x^2 - y^2 + z^2 = 1$ و $S_2 : y^2 - 2x + z = 0$ را برای $y \geq 0$ در نظر می‌گیریم. معادلات پارامتری C، خم حاصل از تلاقی دو رویه‌ی S_1 و S_2 را به دست می‌آوریم



شکل ۲–۲۶ مقطع رویه‌های $S_1 : x^2 - y^2 + z^2 = 1$ و $S_2 : y^2 - 2x + z = 0$.

مختصات نقطه‌ی $P = (x, y, z) \in S_1 \cap S_2$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$$

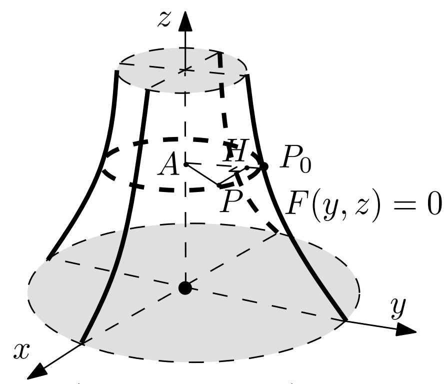
از این دستگاه نتیجه می‌شود $x^2 - 2x + z^2 + z = 1$ که معادل است با $(x-1)^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$. مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که در این معادله صدق می‌کنند به صورت پارامتری به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}\cos t \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin t \end{cases}$$

از سوی دیگر چون $y \geq 0$، از $z = 2x - y^2$ نتیجه می‌شود $y^2 = \frac{5}{2} + 3\cos t - \frac{3}{2}\sin t$، یعنی $y = \sqrt{\frac{5}{2} + 3\cos t - \frac{3}{2}\sin t}$. پس P روی خم C به معادلات پارامتری $x = 1 + \frac{3}{2}\cos t$، $y = \sqrt{\frac{5}{2} + 3\cos t - \frac{3}{2}\sin t}$ و $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin t$ واقع است.

۲–۹ رویه‌های دوار

آن دسته از رویه‌های درجه‌ی دو که خم تراز آنها دایره است، حالت‌های خاصی از رویه‌های اصطلاحاً دوار هستند. این رویه‌ها از دوران یک خم حول یک خط به دست می‌آیند. برای مثال کره از دوران یک دایره حول یک خط شامل قطر آن به دست می‌آید. فرض کنیم C یک خم مسطح واقع در صفحه‌ی π باشد. از دوران C حول خط $L \subseteq \pi$ یک رویه مانند S به دست می‌آید که آن را یک **رویه‌ی دوار** می‌نامیم. خم C یک **مولد** و خط L **محور دوران** رویه‌ی S نامیده می‌شوند. در این قسمت برای سادگی تنها حالتی را بررسی می‌کنیم که خم C در یکی از صفحات xoz، xoy یا yoz و محور دوران یکی از محورهای مختصات در این صفحه‌ها باشند. به دلیل شباهت این حالت‌ها تنها به ذکر حالتی می‌پردازیم که خم C در صفحه‌ی yoz به وسیله‌ی رابطه‌ی ضمنی $F(y,z) = 0$ مشخص شده و محور دوران، محور z است. فرض کنیم نقطه‌ی $P = (x,y,z)$ بر رویه واقع است. در این صورت مقطع رویه و صفحه‌ی با بردار نرمال $\mathbf{k}$ و شامل P یک دایره است. این دایره صفحه‌ی yoz رادر نقطه‌ای مانند $P_0 = (0, y_0, z_0)$ قطع می‌کند (شکل ۲–۲۷).



شکل ۲–۲۷ رویه‌ی دوار در صفحه‌ی yoz با محور دوران z.

از $P_0 \in C$ نتیجه می‌شود $F(y_0, z_0) = 0$. فرض کنیم $A = (0, 0, z_0)$ و H پای ارتفاع وارد بر AP_0 از نقطه‌ی P باشد. در مثلث $\triangle APH$ داریم $AP^2 = HP^2 + AH^2$. از $AP = AP_0$ (شعاع‌های یک دایره هستند) نتیجه می‌شود $AP_0^2 = HP^2 + AH^2$. از

سوی دیگر داریم $AP_\circ = y_\circ$، $AH = y$ و $HP = x$. بنابر این $y_\circ^2 = x^2 + y^2$ یعنی $y_\circ = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. در نتیجه $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = F(y_\circ, z) = F(y_\circ, z_\circ) = 0$. به این ترتیب مختصات نقطه‌ی $P = (x,y,z)$ در معادله‌ی $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z) = 0$ صدق می‌کند. برخی از حالت‌های دیگر در جدول زیر مطرح شده‌اند.

صفحه‌ی حاوی C	معادله‌ی ضمنی C	محور دوران	معادله‌ی رویه
صفحه‌ی yoz $(x=0)$	$F(y,z)=0$	محور z	$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z)=0$
صفحه‌ی yoz $(x=0)$	$F(y,z)=0$	محور y	$F(y\ ,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
صفحه‌ی xoy $(z=0)$	$F(x,y)=0$	محور y	$F(\pm\sqrt{x^2+z^2}\ ,\ y)=0$
صفحه‌ی xoy $(z=0)$	$F(x,y)=0$	محور x	$F(x\ ,\ \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
صفحه‌ی xoz $(y=0)$	$F(x,z)=0$	محور z	$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z)=0$
صفحه‌ی xoz $(y=0)$	$F(x,z)=0$	محور x	$F(x\ ,\ \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

مثال ۲−۹−۱ خم C را به معادله‌ی $y^2 - x^2 = 1$ در صفحه‌ی xoy در نظر می‌گیریم. معادله‌ی رویه‌های حاصل از دوران خم C را حول محورهای y و x به دست می‌آوریم.

معادله‌ی خم C به صورت $F(x,y) = y^2 - x^2 - 1 = 0$ است. بنابر آنچه گفته شد، معادله‌ی رویه‌های حاصل از دوران خم C حول محورهای y و x به ترتیب $F(\pm\sqrt{x^2+z^2}\ ,\ y) = 0$ و $F(x\ ,\ \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$ خواهد بود. با جایگزینی در ضابطه‌ی F، معادلات $y^2 - (\pm\sqrt{x^2+z^2})^2 - 1 = 0$ و $(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2 - x^2 - 1 = 0$ که معادل هستند با $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ (هذلولی‌گون دو پارچه‌ی دوار با محور y) و $y^2 + z^2 - x^2 = 1$ (هذلولی‌گون یک‌پارچه‌ی دوار با محور x) به دست می‌آیند.

مثال ۲−۹−۲ نقطه‌ی $P_\circ = (0,0,2)$ و دایره‌ی $x^2 + y^2 = 16$ را در صفحه‌ی xoy در نظر می‌گیریم. خطوط گذرنده بر نقاط دایره‌ی فوق و نقطه‌ی $P_\circ$ تشکیل یک مخروط می‌دهند. معادله‌ی این مخروط را به دست می‌آوریم.

چون مقطع مخروط مورد نظر با صفحه‌ی xoy یک دایره است، این مخروط دوار است. کافی است یک مولد آن را به دست آوریم. نقطه‌ی تلاقی دایره‌ی $x^2 + y^2 = 16$ و محور y در صفحه‌ی zoy نقطه‌ی $Q_\circ = (0,4,0)$ است. به این ترتیب معادله‌ی خط گذرنده از $P_\circ$ و $Q_\circ$ به شکل $x = 0\ ,\ 2z + y - 4 = 0$ است. مخروط مورد نظر از دوران این خط حول محور z به دست می‌آید. اگر قرار دهیم $F(y,z) = 2z + y - 4$

آنگاه معادله‌ی مخروط به شکل $F(\pm\sqrt{x^۲+y^۲}\ ,\ z)=۰$ می‌شود که معادل است با $\pm\sqrt{x^۲+y^۲}+۲z-۴=۰$ یا $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۴}-(z-۴)^۲=۰$.

مثال ۲-۹-۳ رویه‌ی S را به معادله‌ی $x+xy^۲+xz^۲-y^۲-z^۲=۰$ در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که S یک رویه‌ی دوار است و محور دوران و یک خم مولد S را مشخص می‌کنیم.

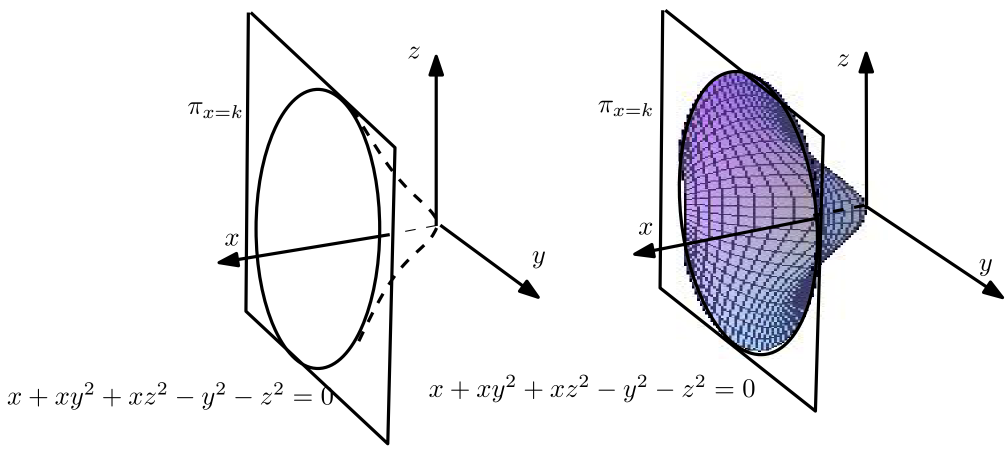
برای این رویه داریم:

$$\begin{aligned} S\cap\pi_{x=k} &= \{(k,y,z)\in\mathbb{R}^۳\ :\ k+k(y^۲+z^۲)=(y^۲+z^۲)\} \\ &= \{(k,y,z)\in\mathbb{R}^۳\ :\ y^۲+z^۲=\frac{k}{۱-k}\} \end{aligned}$$

مقطع S با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ برای کلیه‌ی مقادیر ممکن k، یعنی $۰<k<۱$، یک دایره و به ازای $k=۰$ یک نقطه است. بنابر این S یک رویه‌ی دوار حول محور x است. برای به دست آوردن یک خم مولد S کافی است مقطع S را با صفحه‌ی $z=۰$ یا $y=۰$ به دست آوریم. برای مثال

$$S\cap\pi_{z=۰}=\{(x,y,۰)\in\mathbb{R}^۳\ :\ x=\frac{y^۲}{۱+y^۲}\}$$

بنابر این محور دوران رویه‌ی S محور x و یک مولد آن، خم با معادله‌ی $x=\frac{y^۲}{۱+y^۲}$ در صفحه‌ی xoy است (شکل ۲—۲۸).



شکل ۲—۲۸ رویه‌ی دوار به معادله‌ی $x+xy^۲+xz^۲-y^۲-z^۲=۰$.

مثال ۲-۹-۴ رویه‌ی S را به معادله‌ی $x^۲ - y^۲ - z^۲ = ۰$ در نظر می‌گیریم.

الف) نوع رویه‌ی S را مشخص می‌کنیم.

ب) برای نقطه‌ی $P_۰ \in S$ ($P_۰ \neq (۰,۰,۰)$) نشان می‌دهیم دقیقاً یک خط راست وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد و تماماً روی S قرار دارد.

ج) نشان می‌دهیم خم C به معادلات پارامتری $x = e^t$، $y = e^t \cos t$ و $z = e^t \sin t$ روی S قرار گرفته است.

د) برای نقطه‌ی $P_۰ \in S$ فرض کنیم $L_۰$ خط گذرنده از این نقطه واقع بر رویه‌ی S و $L'_۰$ خط مماس بر منحنی C در این نقطه باشد. نشان می‌دهیم زاویه‌ی بین دو خط $L_۰$ و $L'_۰$ مقداری ثابت و مستقل از نقطه‌ی $P_۰$ است.

الف) معادله‌ی $x^۲ - y^۲ - z^۲ = ۰$ هم ارز معادله‌ی $-x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$ است. پس رویه‌ی S یک مخروط دوار حول محور x است.

ب) فرض کنیم نقطه‌ی $P_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ نقطه‌ای از سطح S غیر از مبدأ مختصات و $L_۰$ خط گذرنده از نقطه‌ی $P_۰$ و مبدأ مختصات باشد. بردار هادی این خط $\mathbf{v}_۰ = x_۰\,\mathbf{i} + y_۰\,\mathbf{j} + z_۰\,\mathbf{k}$ و در نتیجه معادله‌ی آن عبارت است از:

$$L_۰ : \begin{cases} x = x_۰ t \\ y = y_۰ t \\ z = z_۰ t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

چون $P_۰ \in S$، برای $(x,y,z) \in L_۰$ داریم $x^۲ - y^۲ - z^۲ = (x_۰^۲ - y_۰^۲ - z_۰^۲)t^۲ = ۰$. بنابراین $L_۰ \subseteq S$. حال فرض کنیم $L : \begin{cases} x = at + x_۰ \\ y = bt + y_۰ \\ z = ct + z_۰ \end{cases}$ خط دیگری گذرنده از نقطه‌ی $P_۰ \in S$ باشد. از $L \subseteq S$ نتیجه می‌شود که برای هر t، $(at + x_۰)^۲ - (bt + y_۰)^۲ - (ct + z_۰)^۲ = ۰$، یا $(a^۲ - b^۲ - c^۲)t^۲ + ۲(ax_۰ - by_۰ - cz_۰)t + x_۰^۲ - y_۰^۲ - z_۰^۲ = ۰$. این معادله وقتی برای تمام مقادیر t امکان پذیر است که ضرایب آن برابر صفر باشند یعنی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ و $ax_۰ = by_۰ + cz_۰$. از معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود $a^۲x_۰^۲ = b^۲y_۰^۲ + c^۲z_۰^۲ + ۲bcy_۰z_۰$ و از معادله‌ی اول داریم $b^۲(y_۰^۲ - x_۰^۲) - c^۲(z_۰^۲ - x_۰^۲) + ۲bcy_۰z_۰ = ۰$. چون $x_۰^۲ - y_۰^۲ - z_۰^۲ = ۰$، نتیجه می‌گیریم $b^۲z_۰^۲ + c^۲y_۰^۲ - ۲bcy_۰z_۰ = ۰$. بنابراین $(bz_۰ - cy_۰)^۲ = ۰$، یعنی $bz_۰ = cy_۰$. از دو ثابت $z_۰$ و $y_۰$ حداقل یکی غیر صفر است. فرض کنیم $y_۰ \neq ۰$. دراین صورت $c = \frac{z_۰}{y_۰}b$ و در نتیجه $a = \frac{y_۰}{x_۰}b + \frac{z_۰}{y_۰}c = b\frac{y_۰^۲ + z_۰^۲}{x_۰ y_۰} = \frac{x_۰}{y_۰}\,b$.

به این ترتیب بردار هادی خط L به شکل $\mathbf{v} = \frac{b}{y_۰}(x_۰\,\mathbf{i} + y_۰\,\mathbf{j} + z_۰\,\mathbf{k})$ و موازی $\mathbf{v}_۰$ است. به عبارت دیگر خط L همان خط $L_۰$ است.

ج) از این که برای هر t داریم $-(e^t)^2+(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2=-e^{2t}+e^{2t}=0$ نتیجه می‌شود $C\subseteq S$.

د) برای خم C با معادله‌ی $\mathbf{r}(t)=e^t\ \mathbf{i}+e^t\cos t\ \mathbf{j}+e^t\sin t\ \mathbf{k}$، بردار مماس در P_0، بردار $\mathbf{r}'(t_0)=e^{t_0}\ \mathbf{i}+e^{t_0}(\cos t_0-\sin t_0)\ \mathbf{j}+e^{t_0}(\sin t_0+\cos t_0)\ \mathbf{k}$ است.

بردار هادی خط شامل P_0، $\mathbf{v}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}=e^{t_0}\ \mathbf{i}+e^{t_0}\cos t_0\ \mathbf{j}+e^{t_0}\sin t_0\ \mathbf{k}$ است. پس زاویه‌ی بین خط مماس بر P_0 و خط فوق عبارت است از:

$$\cos\theta=\frac{r'(t_0)\cdot v_0}{\|r'(t_0)\|\ \|v_0\|}=\frac{e^{2t_0}}{\sqrt{6}\ e^{2t_0}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

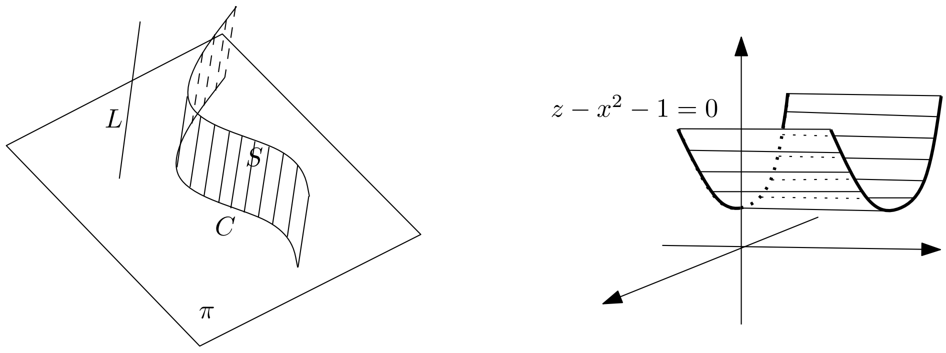
مشاهده می‌شود که این زاویه مقداری ثابت و مستقل از t_0 است.

۲–۱۰ رویه‌های استوانه‌ای

برخی از رویه‌های درجه‌ی دو مانند استوانه حالت‌های خاصی از رویه‌های اصطلاحاً استوانه‌ای هستند. فرض کنیم C یک خم مسطح واقع در صفحه‌ای مانند π و L خطی غیر موازی بااین صفحه باشد. از اجتماع خط‌های موازی با L که خم C را قطع می‌کنند یک رویه مانند S به دست می‌آید که آن را یک **رویه‌ی استوانه‌ای** می‌نامیم. خم C یک **خم مولد** و خط L یک **مولد** رویه‌ی S نامیده می‌شوند (شکل ۲–۲۹).

مثال ۲–۱۰–۱ الف) دایره‌ی C با معادله‌ی ضمنی $x^2+y^2=1$ و محور z به عنوان مولد، یک رویه‌ی استوانه‌ای پدید می‌آورند که معادله‌ی آن $x^2+y^2=1$ است.

ب) سهمی C با معادله‌ی ضمنی $z-x^2-1=0$ و محور y به عنوان مولد، یک رویه‌ی استوانه‌ای پدید می‌آورد که معادله‌ی آن $z-x^2-1=0$ است.



شکل ۲–۲۹ رویه‌های استوانه‌ای.

ج) هذلولی C به معادله‌ی $z^{۲} - y^{۲} = ۱$ و محور x به عنوان مولد، یک رویه‌ی استوانه‌ای با معادله‌ی $z^{۲} - y^{۲} = ۱$ پدید می‌آورد.

۲–۱۱ حد و پیوستگی توابع حقیقی چند متغیره

مفاهیم حد و پیوستگی برای توابع حقیقی چند متغیره تعمیم طبیعی و ساده‌ی این مفاهیم برای توابع حقیقی یک متغیره هستند. برای تعریف این مفاهیم ابتدا به یادآوری مفاهیم همسایگی محذوف و نقطه‌ی انباشتگی می‌پردازیم. برای $x_{\circ} \in \mathbb{R}$، همسایگی محذوف به شعاع δ، بازه‌ی بدون مرکز $(x_{\circ} - \delta\ , x_{\circ} + \delta) - \{x_{\circ}\}$، یعنی مجموعه‌ی زیر است.

$$\{x \in \mathbb{R} \ :\ |x - x_{\circ}| < \delta\ , x \neq x_{\circ}\}$$

به همین ترتیب برای $(x_{\circ}, y_{\circ}) \in \mathbb{R}^{۲}$ یک همسایگی محذوف به شعاع δ (شکل ۲–۳۰) قرص بدون مرکز زیر است.

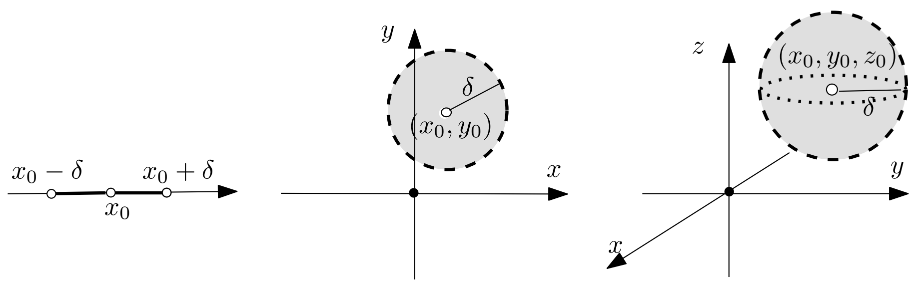
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{۲} \ :\ \|(x, y) - (x_{\circ}, y_{\circ})\| < \delta\ , (x, y) \neq (x_{\circ}, y_{\circ})\}$$

شرط $\|(x, y) - (x_{\circ}, y_{\circ})\| < \delta$ را گاهی به شکل معادل $\sqrt{(x - x_{\circ})^{۲} + (y - y_{\circ})^{۲}} < \delta$ بیان می‌کنیم.

یک همسایگی محذوف به شعاع δ برای $(x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}) \in \mathbb{R}^{۳}$، گوی بدون مرکز زیر است (شکل ۲–۳۰).

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{۳} \ :\ \|(x, y, z) - (x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})\| < \delta\ , (x, y, z) \neq (x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})\}$$

برای این حالت نیز شرط $\|(x, y, z) - (x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})\| < \delta$ را گاهی به شکل معادل $\sqrt{(x - x_{\circ})^{۲} + (y - y_{\circ})^{۲} + (z - z_{\circ})^{۲}} < \delta$ بیان می‌کنیم.



شکل ۲–۳۰ همسایگی محذوف در $\mathbb{R}^{۳}$، $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}$.

یک نقطه را **نقطه‌ی انباشتگی** برای دامنه‌ی تابع حقیقی f می‌نامیم هرگاه هر همسایگی از این نقطه با دامنه‌ی f اشتراک ناتهی داشته باشد. باید توجه داشت که لزومی ندارد که نقطه‌ی انباشتگی در دامنه‌ی f باشد. برای مثال نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ یک نقطه‌ی انباشتگی تابع حقیقی دو متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sin(x+y)}$ است اگر چه برای این تابع در هر همسایگی $(\circ,\circ)$ نقاطی خارج از دامنه‌ی تابع وجود دارد.

در صورتی که نقطه‌ی $x_\circ$ یک نقطه‌ی انباشتگی برای دامنه‌ی تابع یک متغیره‌ی $f:D_f\to\mathbb{R}$ باشد، گوییم حد تابع در $x_\circ$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\ell$ هرگاه

$$\forall\,\varepsilon>\circ\ \ \exists\,\delta>\circ\ \ \forall\,x\in D_f\ (\circ<|x-x_\circ|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon)$$

تعریف فوق را به شکل زیر برای توابع حقیقی دو و سه متغیره تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $\mathbf{x}_\circ=(x_\circ,y_\circ)$ یک نقطه‌ی انباشتگی دامنه‌ی تابع دو متغیره‌ی $f:D_f\to\mathbb{R}$ باشد. گوییم تابع f در $(x_\circ,y_\circ)$ حد برابر l دارد و می‌نویسیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y)=\ell$ هرگاه

$$\forall\,\varepsilon>\circ\ \ \exists\,\delta>\circ\ \forall\,(x,y)\in D_f\ (\circ<\|(x,y)-(x_\circ,y_\circ)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-\ell|<\varepsilon)$$

به همین ترتیب گوییم تابع سه متغیره‌ی f در $\mathbf{x}_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ حد برابر l دارد و می‌نویسیم $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_\circ} f(x,y,z)=l$ هرگاه:

$$\forall\,\varepsilon>\circ\ \ \exists\,\delta>\circ\ \ \forall\,\mathbf{x}\in D_f\ (\circ<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\circ\|<\delta\Rightarrow|f(\mathbf{x})-\ell|<\varepsilon)$$

مثال ۲–۱۱–۱ نشان می‌دهیم تابع $f:\ \mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=۲x^۲-xy$ در نقطه‌ی $P=(۱,-۱)$ حد برابر با ۳ دارد.

باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon>\circ$ عدد $\delta>\circ$ وجود دارد که برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$،

$$\circ<\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-۳|<\varepsilon$$

از روابط $|x-۱|\le\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲}$ و $|y+۱|\le\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲}$ رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}|f(x,y)-۳|=|۲x^۲-xy-۳| &= |۲x^۲-۲-xy-x+x-۱|\\ &= |۲(x-۱)(x+۱)-x(y+۱)+x-۱|\\ &\le ۲|x+۱||x-۱|+|x||y+۱|+|x-۱|\\ &\le (۲|x+۱|+|x|+۱)\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲}\end{aligned}$$

از سوی دیگر برای $\delta \leq ۱$، از رابطه‌ی $|x-۱| \leq \sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲} < ۱$ نتیجه می‌شود $۰ \leq x \leq ۲$، پس $|x| + |x+۱| + ۱ < ۹$. در نتیجه برای نقاطی که $\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲} < ۱$، داریم:

$$|f(x,y)-۳| < ۹\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲}$$

پس برای $\varepsilon > ۰$ کافی است $\delta \leq \mathrm{Min}\{۱, \frac{\varepsilon}{۹}\}$ اختیار شود.

مثال ۲-۱۱-۲ با استفاده از تعریف حد درستی گزاره‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

$$۱)\ \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = ۰$$

$$۲)\ \lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} x\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|}) + z^۲ = ۰$$

الف) باید نشان دهیم:

$$\forall\, \varepsilon > ۰\ \exists\, \delta > ۰\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^۲ (۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \Rightarrow |\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} - ۰| < \varepsilon)$$

با توجه به رابطه‌ی،

$$|\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} - ۰| = \frac{|x||\sin(xy)|}{x^۲+y^۲} \leq \frac{|x||xy|}{x^۲+y^۲} = \frac{x^۲}{x^۲+y^۲}|y| \leq |y| \leq \sqrt{x^۲+y^۲}$$

برای $\varepsilon > ۰$ کافی است قرار دهیم $\delta \leq \varepsilon$.

ب) باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ وجود دارد به قسمی که‌برای هر $(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳$،

$$۰ < \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < \delta \Rightarrow |x\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|}) + z^۲| < \varepsilon$$

با فرض $\delta \leq ۱$، $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$. در نتیجه $|z| < \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$ پس $|z|^۲ < |z|$ و

$$\begin{aligned} |x\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|}) + z^۲| &\leq |x|\,|\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|})| + |z|^۲ \\ &\leq |x| + |z| \leq ۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \end{aligned}$$

به این ترتیب برای $\varepsilon > ۰$ کافی است قرار دهیم $\delta = \mathrm{Min}\{\frac{\varepsilon}{۲}, ۱\}$.

در مورد توابع حقیقی چند متغیره، چند قضیه برای محاسبه‌ی حد وجود دارد که به دلیل شباهت زیاد با حالت یک متغیره، تنها به ذکر یک قضیه در این باره می‌پردازیم.

قضیه ۲–۱۱–۳ اگر توابع $f: D_f \to \mathbb{R}$ و $g: D_g \to \mathbb{R}$ در $(x_\circ, y_\circ)$ به ترتیب حدهای برابر ℓ و m داشته باشند آنگاه توابع $f+g$، $f-g$، $f \cdot g$ و f/g (به شرط $m \neq \circ$) در $(x_\circ, y_\circ)$ به ترتیب حدهای برابر $\ell + m$، $\ell - m$، ℓm و ℓ / m دارند.

مفهوم مهم دیگر برای توابع چند متغیره، پیوستگی است که آن را برای توابع حقیقی دو متغیره بیان می‌کنیم. تعمیم آن به توابع حقیقی چند متغیره به دانشجویان واگذار می‌شود.

تابع حقیقی دو متغیره‌ی f را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ) \in D_f$ پیوسته گوییم هرگاه در $(x_\circ, y_\circ)$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y) = f(x_\circ, y_\circ)$.

تابع f را روی D پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه از D پیوسته باشد.

با استفاده از قضیه‌ی ۲–۱۱–۳، قضیه‌ی زیر به دست می‌آید.

قضیه ۲–۱۱–۴ اگر توابع حقیقی دو متغیره‌ی f و g در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته باشند آنگاه توابع $f+g$، $f-g$، $f \cdot g$ و f/g (به شرط $g(x_\circ, y_\circ) \neq \circ$) در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته هستند.

از پیوستگی توابع $f(x,y) = x$ و $g(x,y) = y$ که به سادگی قابل تحقیق است و قضیه‌ی ۲–۱۱–۴ مشاهده می‌شود که هر تابع چندجمله‌ای $P(x,y)$ بر حسب x و y روی تمام $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است. پس برای توابع چندجمله‌ای $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ بر حسب x و y، تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ در هر نقطه که $Q(x,y)$ صفر نباشد پیوسته است.

مثال ۲–۱۱–۵ نشان دهید تابع $f: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر بر $\mathbb{R}^۳$ پیوسته است.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^۲ + y^۲ z^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} & (x,y,z) \neq (\circ,\circ,\circ) \\ \circ & (x,y,z) = (\circ,\circ,\circ) \end{cases}$$

توابع P و Q با ضابطه‌های $P(x,y,z) = xy^۲ + y^۲ z^۲$ و $Q(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ بر $\mathbb{R}^۳$ پیوسته هستند. بنابر این اگر $Q(x,y,z) \neq \circ$، یعنی $(x,y,z) \neq (\circ,\circ,\circ)$، آنگاه $f = \frac{P}{Q}$ در (x,y,z) پیوسته است. نشان می‌دهیم f در $(\circ,\circ,\circ)$ پیوسته است، یعنی $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} f(x,y,z) = \circ$. برای این منظور طبق تعریف باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon > \circ$ یک $\delta > \circ$ وجود دارد که برای هر $(x,y,z) \neq (\circ,\circ,\circ)$،

$$\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - f(\circ,\circ,\circ)| < \varepsilon$$

با توجه به رابطه‌ی

$$\begin{aligned} |f(x,y,z) - f(\circ,\circ,\circ)| = |\frac{xy^۲ + y^۲ z^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲}| &\leq |x| \frac{y^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} + y^۲ \frac{z^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} \\ &\leq |x| + y^۲ \end{aligned}$$

اگر $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$ آنگاه:

$$|y| \leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$$

با ضرب دو طرف نامساوی فوق در $|y|$ داریم $|y| \leq y^۲$. پس برای $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$،

$$|f(x,y,z)-f(\circ,\circ,\circ)| \leq |x|+|y| \leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}+\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = ۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

به این ترتیب برای $\varepsilon > \circ$ کافی است $\delta \leq \operatorname{Min}\{۱, \frac{\varepsilon}{۲}\}$ اختیار شود.

۲–۱۲ حد روی یک مسیر

در این بخش به یک تفاوت بنیادی حد توابع حقیقی یک‌متغیره و چند متغیره می‌پردازیم. برای توابع حقیقی یک متغیره، انتخاب مقادیر x که به $x_\circ$ میل کنند از سمت چپ یا راست امکان‌پذیر است. برای این توابع وجود حدهای یک‌طرفه برابر در $x_\circ$ معادل وجود حد در این نقطه است. اما برای توابع دو متغیره مفهوم دو طرف نقطه معنایی ندارد و مفهوم دیگری موسوم به حد روی مسیر مطرح می‌شود.

فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی f در $(x_\circ, y_\circ)$ حد برابر ℓ داشته باشد، یعنی $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y) = \ell$. در این صورت برای هر خم C واقع در دامنه‌ی f که $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه‌ی واقع بر C باشد داریم

$$\forall\, \varepsilon > \circ \quad \exists\, \delta > \circ \quad \forall\, (x,y) \in C \ (\circ < \|(x,y)-(x_\circ,y_\circ)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-\ell| < \varepsilon)$$

به عبارت دیگر مستقل از مسیر، حد تابع f برابر ℓ است. به کمک این نکته و یکتائی حد می‌توان در برخی از موارد عدم وجود حد توابع را بررسی کرد.

مثال ۲–۱۲–۱ نشان می‌دهیم که هیچ یک از حدهای زیر وجود ندارند.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \dfrac{x}{|x|+|y|}$.

ب) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} \dfrac{x^۲+yz}{x^۲+y^۲+z^۲}$.

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \dfrac{x^۳y}{x^۶+y^۲}$.

د) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-۱,۱,\circ)} \dfrac{(x+۱)^۳(y-۱)^۲}{(x+۱)^۶+(y-۱)^۴+z^۲}$.

ه) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \dfrac{x}{\sqrt[۳]{x^۳+y^۳}}$.

الف) خم C به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = \circ$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y) \in C$ داریم

$$\frac{x}{|x|+|y|} = \frac{t}{|t|}$$

روی خم C داریم $(x,y) \to (\circ,\circ)$ اگر وتنها اگر $t \to \circ$. اما $\lim\limits_{t\to\circ} \frac{t}{|t|}$ وجود ندارد. بنابر این تابع $\frac{x}{|x|+|y|}$ در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ حد ندارد.

ب) فرض کنیم $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} \frac{x^{۲}+yz}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$ وجود داشته و برابر ℓ باشد. در این صورت روی هر خم C که حاوی مبدأ مختصات باشد داریم $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} \frac{x^{۲}+yz}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} = \ell$.

خم $C_{۱}$ به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = t \ , \ z = \circ$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y,z) \in C_{۱}$ داریم

$$\frac{x^{۲}+yz}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} = \frac{t^{۲}}{t^{۲}+t^{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

حال خم $C_{۲}$ به معادلات پارامتری $x = \circ \ , \ y = t \ , \ z = \circ$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y,z) \in C_{۲}$ داریم

$$\frac{x^{۲}+yz}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} = \circ$$

روی هر دو خم $C_{۱} \ , \ C_{۲}$ داریم $(x,y,z) \to (\circ,\circ,\circ)$ اگر وتنها اگر $t \to \circ$.

اما $\lim\limits_{t\to\circ} \frac{t^{۲}}{t^{۲}+t^{۲}} = \frac{۱}{۲} \neq \circ$. بنابر این تابع $\frac{x^{۲}+yz}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$ در نقطه‌ی $(\circ,\circ,\circ)$ حد ندارد.

ج) فرض کنیم $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} \frac{x^{۳}y}{x^{٦}+y^{۲}}$ وجود داشته و برابر ℓ باشد. خم $C_{۱}$ به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = t$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y) \in C_{۱}$ داریم

$$\frac{x^{۳}y}{x^{٦}+y^{۲}} = \frac{t^{۴}}{t^{٦}+t^{۲}} = \frac{t^{۲}}{t^{۴}+۱}$$

خم $C_{۲}$ به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = t^{۳}$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y) \in C_{۲}$،

$$\frac{x^{۳}y}{x^{٦}+y^{۲}} = \frac{t^{٦}}{t^{٦}+t^{٦}} = \frac{۱}{۲}$$

روی هر دو خم $C_{۱} \ , \ C_{۲}$ داریم $(x,y) \to (\circ,\circ)$ اگر وتنها اگر $t \to \circ$. اما $\frac{۱}{۲} \neq \circ = \lim\limits_{t\to\circ} \frac{t^{۲}}{t^{۴}+۱}$. بنابر این تابع $\frac{x^{۳}y}{x^{٦}+y^{۲}}$ در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ حد ندارد.

د) خم C_1 به معادلات پارامتری $x = t - 1 \ , \ y = t + 1 \ , \ z = t$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x, y, z) \in C_1$ داریم

$$\frac{(x+1)^3(y-1)^2}{(x+1)^6 + (y-1)^4 + z^2} = \frac{t^3 t^2}{t^6 + t^4 + t^2} = \frac{t^3}{t^4 + t^2 + 1}$$

در حالی که برای خم C_2 به معادلات پارامتری $x = \sqrt[3]{t^2} - 1 \ , \ y = t + 1 \ , \ z = 0$ داریم

$$\frac{(x+1)^3(y-1)^2}{(x+1)^6 + (y-1)^4 + z^2} = \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

روی هر دو خم $C_1 \ , \ C_2$ واضح است که $(x, y, z) \to (-1, 1, 0)$ اگر وتنها اگر $t \to 0$. با توجه به این که $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t^3}{t^4 + t^2 + 1} = 0 \neq \frac{1}{2}$، تابع $\frac{(x+1)^3(y-1)^2}{(x+1)^6 + (y-1)^4 + z^2}$ در نقطه‌ی $(-1, 1, 0)$ حد ندارد.

ه) خم C_m (m یک عدد ثابت و دلخواه است) به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = mt$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x, y) \in C_m$ داریم

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}} = \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 + t^3 m^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + m^3}}$$

روی خم C_m، $(x, y) \to (0, 0)$ اگر وتنها اگر $t \to 0$. با توجه به این که $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + m^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + m^3}}$ وابسته به m است، $\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}$ در $(0, 0)$ حد ندارد.

۲–۱۳ پیوست

در این بخش می‌خواهیم به مفاهیم گسترده‌تری در مورد خم‌ها بپردازیم که اندکی فراتر از چارچوب کتاب‌های مقدماتی است ولی در مسائل کاربردی به وفور مطرح می‌شوند. می‌توان از مطالعه‌ی مباحث این بخش در یک درس فشرده صرف‌نظر کرد. برای مطالعه‌ی هندسه‌ی یک خم ابتدا به معرفی یک دستگاه مختصات راستگرد می‌پردازیم که در هر نقطه همراه با خم تغییر می‌کند.

برای یک خم منظم نظیر تابع برداری $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ به ازای هر $t \in I$، بردار یکه‌ی $\mathbf{T}(t)$ هم‌جهت با $\mathbf{r}'(t)$ به شکل زیر قابل تعریف است.

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

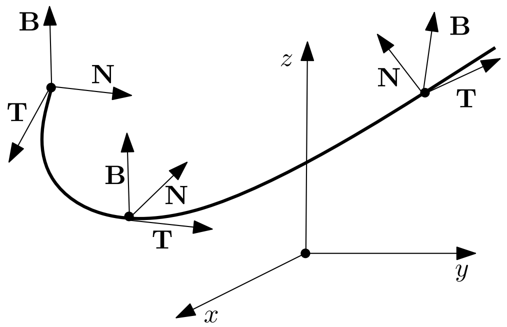
این بردار را **بردار یکه‌ی مماس** بر خم در نقطه‌ی P می‌نامیم (شکل ۲–۳۱). برای این بردار به ازای $t \in I$ همواره $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$. بنابر این $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{T}(t) \rangle = 1$. با مشتق‌گیری

ازاین رابطه نتیجه می‌شود $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{T}'(t)\rangle = 0$. پس $\mathbf{T}(t) \perp \mathbf{T}'(t)$.
به همین ترتیب برداریکه‌ی **نرمال** در نقطه‌ی P به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

بردار یکه‌ی **نرمال دوم** در نقطه‌ی P به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{B}(t) := \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$



شکل ۲–۳۱ بردارهای یکه‌ی مماس $\mathbf{T}$، یکه‌ی نرمال $\mathbf{N}$ و یکه‌ی نرمال دوم $\mathbf{B}$.

دستگاه مختصات متعامد راست‌گرد $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ را **دستگاه مختصات فرنه** در نقطه‌ی P می‌نامند. مشاهده می‌شود که صفحه‌ی قائم اصلی در P صفحه‌ای شامل P با بردار نرمال $\mathbf{T}$ در نقطه‌ی P است. دو صفحه‌ی مهم دیگر، با بردارهای نرمال $\mathbf{N}, \mathbf{B}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند.

فرض کنیم $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ دستگاه مختصات متعامد فرنه‌ی متناظر با نقطه‌ی P باشد. منظور از **صفحه‌ی بوسان**[1] در P، صفحه‌ای شامل P با بردار نرمال $\mathbf{B}$ در نقطه‌ی P است. به همین ترتیب منظور از **صفحه‌ی قائم دوم**[2] در P، صفحه‌ی شامل P با بردار نرمال $\mathbf{N}$ در نقطه‌ی P است.

مثال ۲–۱۳–۱ برای خم منظم $\mathbf{r}(t) = (\tan^{-1} t)\mathbf{i} + (t - \tan^{-1} t)\mathbf{j} + (\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1+t^2))\mathbf{k}$

الف) بردارهای $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ را برای نقطه‌ی دلخواه P به دست می‌آوریم.

ب) صفحه‌های بوسان، قائم اصلی و قائم دوم را در نقطه‌ی نظیر $t = 0$ به دست می‌آوریم.

[1] Osculating plane
[2] Rectifying plane

الف)

$$\mathbf{r}(t)=(\tan^{-۱}t)\ \mathbf{i}+(t-\tan^{-۱}t)\ \mathbf{j}+(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ln(۱+t^{۲}))\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t)=(\frac{۱}{۱+t^{۲}})\ \mathbf{i}+(۱-\frac{۱}{۱+t^{۲}})\ \mathbf{j}+(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{۲t}{۱+t^{۲}})\ \mathbf{k}=\frac{۱}{۱+t^{۲}}(\mathbf{i}+t^{۲}\ \mathbf{j}+\sqrt{۲}\ t\ \mathbf{k})$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\|=\frac{۱}{۱+t^{۲}}\sqrt{۱+t^{۴}+۲t^{۲}}=\frac{۱}{۱+t^{۲}}(۱+t^{۲})=۱$$

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=\frac{۱}{۱+t^{۲}}\ \mathbf{i}+\frac{t^{۲}}{۱+t^{۲}}\ \mathbf{j}+\frac{\sqrt{۲}\ t}{۱+t^{۲}}\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}'(t)=\frac{-۲t}{(۱+t^{۲})^{۲}}\ \mathbf{i}+\frac{۲t}{(۱+t^{۲})^{۲}}\ \mathbf{j}+\frac{\sqrt{۲}(۱-t^{۲})}{(۱+t^{۲})^{۲}}\ \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\|=\frac{۱}{(۱+t^{۲})^{۲}}\sqrt{۴t^{۲}+۴t^{۲}+۲(۱+t^{۴}-۲t^{۲})}=\frac{\sqrt{۲}}{۱+t^{۲}}$$

$$\mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}=\frac{-\sqrt{۲}\ t}{۱+t^{۲}}\ \mathbf{i}+\frac{\sqrt{۲}\ t}{۱+t^{۲}}\ \mathbf{j}+\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}\ \mathbf{k}\ ,$$

$$\mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{۱}{۱+t^{۲}} & \frac{t^{۲}}{۱+t^{۲}} & \frac{\sqrt{۲}\ t}{۱+t^{۲}}\\ \frac{-\sqrt{۲}\ t}{۱+t^{۲}} & \frac{\sqrt{۲}\ t}{۱+t^{۲}} & \frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}\end{vmatrix}=\frac{t}{(۱+t^{۲})^{۲}}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & t^{۲} & \sqrt{۲}\ t\\ -\sqrt{۲} & \sqrt{۲} & \frac{۱-t^{۲}}{t}\end{vmatrix}$$

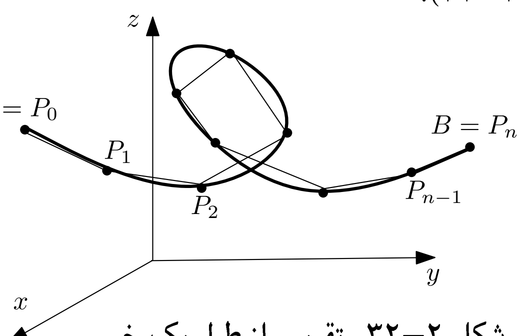
بنابر این:

$$\mathbf{B}(t)=\frac{-t^{۲}}{۱+t^{۲}}\mathbf{i}-\frac{۱}{۱+t^{۲}}\mathbf{j}+\sqrt{۲}\frac{t}{۱+t^{۲}}\mathbf{k}$$

ب) نظیر $t=۰$، یعنی در نقطه‌ی $P=(۰,۰,۰)$، $\mathbf{T}(۰)=\mathbf{i}$، $\mathbf{N}(۰)=\mathbf{k}$ و $\mathbf{B}(۰)=-\mathbf{j}$. بنابر این صفحات بوسان، قائم و قائم دوم خم در $P=(۰,۰,۰)$ به ترتیب صفحات xoz، yoz و xoy هستند.

۲–۱۳–۱ طول خم (طول قوس)

در این بخش با ایده‌ای شبیه به روش تقریب محیط دایره به کمک چندضلعی‌های منتظم مفهوم طول قوس را برای خم‌های منظم تعریف می‌کنیم. با این تفاوت که چون خم‌های منظم در حالت کلی بسته نیستند به جای چندضلعی‌های منتظم از پاره‌خط‌های شکسته استفاده می‌کنیم (شکل ۲–۳۲).



شکل ۲–۳۲ تقریبی از طول یک خم.

خم منظم $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم A, B نقاط نظیر $t = a \in I$ و $t = b \in I$ $(a < b)$ باشند. برای افراز $\{a = t_0, t_1, \cdots, t_n = b\}$ از بازه‌ی $[a, b]$ فرض کنیم $A = \mathbf{r}(t_0) = P_0 \ , \ P_1 = \mathbf{r}(t_1) \ , \ \cdots, \ P_n = \mathbf{r}(t_n) = B$ نقاط نظیر این افراز باشند. تقریبی از طول این خم با یک پاره‌خط شکسته به صورت زیر به دست می‌آید.

$$S_{(A,B)} \simeq \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{P_{i-1}\ P_i}\| = \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{OP}_i - \overrightarrow{OP}_{i-1}\| = \sum_{i=1}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| =: \sigma_n$$

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای توابع $x(t), y(t), z(t)$ نقاط $a_i, b_i, c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ وجود دارند به قسمی که

$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(a_i)\Delta t_i,$

$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(b_i)\Delta t_i,$

$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(c_i)\Delta t_i$ بنابر این

$$\begin{aligned}\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^{n} \|x'(a_i)i + y'(b_i)j + z'(c_i)k\| \ \Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(a_i))^2 + (y'(b_i))^2 + (z'(c_i))^2} \ \Delta t_i\end{aligned}$$

از سوی دیگر با توجه به پیوستگی یکنواخت توابع $x(t), y(t), z(t)$ اعداد $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ وجود دارند به قسمی که

$|x'(a_i) - x'(\tau_i)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)},$

$|y'(b_i) - y'(\tau_i)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)},$

$|z'(c_i) - z'(\tau_i)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$

و در نتیجه

$$\sqrt{(x'(a_i))^2 + (y'(b_i))^2 + (z'(c_i))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2 + (z'(\tau_i))^2}$$

$$= \frac{\Big((x'(a_i))^2 - (x'(\tau_i))^2\Big) + \Big((y'(b_i))^2 - (y'(\tau_i))^2\Big) + \Big((z'(c_i))^2 - (z'(\tau_i))^2\Big)}{\sqrt{(x'(a_i))^2 + (y'(b_i))^2 + (z'(c_i))^2} + \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2 + (z'(\tau_i))^2}}$$

$$\leq |x'(a_i) - x'(\tau_i)| + |y'(b_i) - y'(\tau_i)| + |z'(c_i) - z'(\tau_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

به این ترتیب برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$|\sigma_n - \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^۲ + (y'(\tau_i))^۲ + (z'(\tau_i))^۲}\ \Delta t_i| =$$
$$|\sum_{i=۱}^{n} \sqrt{(x'(a_i))^۲ + (y'(b_i))^۲ + (z'(c_i))^۲} - \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^۲ + (y'(\tau_i))^۲ + (z'(\tau_i))^۲}\ |\Delta t_i$$
$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=۱}^{n} \Delta t_i = \varepsilon$$

پس نشان دادیم که

$$S_{(A,B)} \simeq \sum_{i=۱}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-۱})\| \simeq \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^۲ + (y'(\tau_i))^۲ + (z'(\tau_i))^۲}\ \ \Delta t_i$$

بنابر این اگر $n \to \infty$، طول خم (در صورت وجود) عبارت است از:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^۲ + (y'(\tau_i))^۲ + (z'(\tau_i))^۲}\ \ \Delta t_i = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

مثال ۲-۱۳-۲ برای خم منظم با معادلات پارامتری $x = t\sin t + \cos t$ و $y = t\cos t - \sin t$ طول خم بین نقاط نظیر $t = ۰$ و $t = \pi$ را به دست آورید.

$$\mathbf{r}'(t) = (\sin t + t\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t - t\sin t - \cos t)\mathbf{j} = t(\cos t\ \mathbf{i} - \sin t\ \mathbf{j})\ \ ,$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{t^۲} = |t|, \quad S_{(A,B)} = \int_۰^{\pi} |t| dt = \int_۰^{\pi} t dt = \frac{۱}{۲}\pi^۲$$

۲-۱۴ تغییر پارامتر و پارامتر طبیعی

تابع برداری مانند $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی یکتایی از نقاط $\mathbb{R}^n$ را مشخص می‌کند. این مجموعه در حالت خاص یک خم منظم مانند C را مشخص می‌کند. اما این مجموعه‌ی نقاط را می‌توان به کمک توابع برداری دیگری هم مشخص کرد. هر تابع برداری که خم منظم C را مشخص کند یک **پارامتری‌سازی**[۳] برای خم منظم C نامیده می‌شود. پارامتری‌سازی‌های یک خم منظم C تشکیل یک کلاس هم‌ارزی از خم‌های منظم می‌دهند. برخی از مؤلفین این کلاس را **خم منظم غیر پارامتری** می‌نامند. در این بخش به مطالعه‌ی رابطه‌ی بین پارامتری‌سازی‌های مختلف یک خم می‌پردازیم. به ویژه پارامتری‌سازی با پارامتر طول قوس را مطرح می‌کنیم که اهمیت بیشتری دارد. با توجه به این که تعریف بسیاری از مفاهیم مربوط به خم‌ها وابسته به پارامتری‌سازی است این بحث در آنالیز برداری کاربردهای مهمی دارد.

---
[۳] reparametrization

مثال ۲-۱۴-۱ کمان دایره‌ی به شعاع ۱، بین نقاط $A=(1,0)$ و $B=(0,1)$ به وسیله‌ی سه خم منظم زیر مشخص می‌شود.

$$\mathbf{r}_1:(0,1)\to\mathbb{R}^2\ ,\ \mathbf{r}_1(t)=\sqrt{1-t^2}\ \mathbf{i}+t\ \mathbf{j}\ \ ,\ \ x(t)=\sqrt{1-t^2}\ ,\ y(t)=t$$

$$\mathbf{r}_2:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}^2\ ,\ \mathbf{r}_2(\theta)=\sin\theta\ \mathbf{i}+\cos\theta\ \mathbf{j}\ \ ,\ \ x(t)=\sin\theta\ ,\ y(t)=\cos\theta$$

$$\mathbf{r}_3:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}^2\ ,\ \mathbf{r}_3(\theta)=\cos\theta\ \mathbf{i}+\sin\theta\ \mathbf{j}\ \ ,\ \ x(t)=\cos\theta\ ,\ y(t)=\sin\theta$$

برای تابع $t:(0,\frac{\pi}{2})\to(0,1)$ با ضابطه‌ی $t(\theta)=\cos\theta$ روشن است $\mathbf{r}_2(\theta)=\mathbf{r}_1(t(\theta))$. به همین ترتیب برای تابع $t:(0,\frac{\pi}{2})\to(0,1)$ با ضابطه‌ی $t(\theta)=\sin\theta$، می‌توان گفت $\mathbf{r}_3(\theta)=\mathbf{r}_1(t(\theta))$.

به طور کلی خم منظم $\mathbf{r}:\ I\to\mathbb{R}^3$ را با پارامتر t در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنیم تابع $t:\ J\to I$ روی بازه‌ی باز $J\subseteq\mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد، $t(J)=I$ و برای $s\in J$ داشته باشیم $\frac{dt}{ds}(s)\neq 0$. در این صورت بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای تابع $\mathbf{R}:\ J\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $\mathbf{R}(s)=\mathbf{r}(t(s))$ نیز یک خم منظم است زیرا،

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds}(s)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}(s)\neq\mathbf{0}$$

خم منظم $\mathbf{R}$ را یک **پارامتری سازی مجدد** بر حسب پارامتر s برای $\mathbf{r}$ می‌نامیم. در ادامه نشان می‌دهیم که دستگاه مختصات فرنه، مستقل از پارامتری سازی خم است. به عبارت دیگر می‌توان گفت دستگاه مختصات فرنه یکی از ویژگی‌های هندسی خم است.

یک روش پارامتری سازی خم‌های منظم، پارامتری‌سازی با پارامتر طول قوس است. خم منظم $\mathbf{r}:I\to\mathbb{R}^3$ و P_0 نقطه‌ی نظیر $t_0\in[a,b]\subset I$ را در نظر می‌گیریم. برای نقطه‌ی P متناظر با پارامتر $t\in I$، اندازه‌ی جبری $s(t):=S_{(P_0,P)}$ عبارت است از

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}||\mathbf{r}'(\theta)||d\theta$$

بنابر این تابع $s:I\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است و برای هر $t\in[a,b]$،

$$\frac{ds}{dt}(t)=||\mathbf{r}'(t)||=||\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)||>0$$

پس s تابعی اکیداً صعودی است. فرض کنیم $J:=[0,L]\subset\mathbb{R}$، به قسمی که $L=S_{(P_a,P_b)}$ طول خم بین نقاط P_a نظیر $t=a$ و P_b نظیر $t=b$ باشد. بنابر قضیه‌ی مقدار میانی، تابع پیوسته‌ی s تمام مقادیر فاصله‌ی J را اختیار می‌کند یعنی $s(I)=J$. به

این ترتیب تابع s یک به یک، پوشا و معکوس‌پذیر است. فرض کنیم $s \in J$ و $t = t(s)$ معکوس تابع s باشد. در این صورت تابع $t : J \to I$ مشتق‌پذیر است و برای هر $s \in J$

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{۱}{\frac{ds}{dt}(t)} > ۰$$

به این ترتیب با تابع $t = t(s)$ $(s \in J)$ خم منظم با ضابطه‌ی $\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(t(s))$ یک پارامتری‌سازی مجدد برای خم $\mathbf{r}$ است. بر حسب پارامتر طول قوس s خم منظم R را **پارامتری سازی طبیعی** می‌نامند. یکی از ویژگی‌های مهم این پارامتری سازی این است که با **تندی واحد**[۴] است، یعنی $\|\frac{d\mathbf{R}}{ds}(s)\| = ۱$. زیرا طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای،

$$\begin{aligned}\|\frac{d\mathbf{R}}{ds}(s)\| &= \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\ \frac{dt}{ds}(s)\| = \|\frac{۱}{\frac{ds}{dt}(t)}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\| \\ &= \frac{۱}{\frac{ds}{dt}(t)}\ \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\| = \frac{۱}{\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\|}\ \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\| = ۱\end{aligned}$$

مثال ۲–۱۴–۲ برای خم منظم $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j})$ فرض کنیم s طول کمان از نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ باشد. پارامتری سازی مجدد خم را بر حسب s به دست آورید.

$$\mathbf{r}'(t) = e^t((\cos t - \sin t)\ \mathbf{i} + (\sin t + \cos t)\ \mathbf{j}) \quad ,$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{۲}e^t \quad , \quad s(t) = \int_۰^t \sqrt{۲}e^v dv = \sqrt{۲}e^t - \sqrt{۲}, \quad t(s) = \ln(\frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(t(s)) &= \mathbf{r}(\ln(\frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}})) \\ &= \frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}[\ \cos(\ln(\frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}))\ \mathbf{i} + \sin(\ln(\frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}))\ \mathbf{j}\ ]\end{aligned}$$

۲–۱۵ خمیدگی و تاب

آهنگ تغییرات بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ اطلاعات زیادی در باره‌ی هندسه خم به دست می‌دهد. دو ویژگی مهم هندسی یک خم منظم **خمیدگی (انحنا)**[۵] و **تاب**[۶] آن هستند. در این بخش ابتدا یک تعریف ریاضی مناسب برای خمیدگی مطرح کنیم. برداشت شهودی از خمیدگی در حالت‌های خاص می‌تواند راهنمای خوبی باشد. اتومبیلی که با سرعت از یک پیچ می‌گذرد در اثر نیروی اصطکاک بین چرخ‌ها و جاده یک نیروی

[۴] Unit speed curve
[۵] Curvature
[۶] Torsion

جانب مرکز تولید می‌کند که مانع از واژگون شدن آن می‌شود. یک راننده‌ی با تجربه سعی می‌کند تا می‌تواند خمیدگی پیچ را کمتر کند. برای این کار دایره‌ی بزرگتری را برای پیچیدن انتخاب می‌کند. به عبارت دیگر، برای یک دایره، هر چه شعاع دایره بزرگتر باشد خمیدگی کمتر است. این ایده راهنمای خوبی برای گزینش تعریف مناسب خمیدگی خواهد بود. فرض کنیم یک متحرک با تندی ثابت حرکت می‌کند، یعنی طول بردار سرعت آن (نه لزوماً جهت آن) عددی ثابت باشد. در این صورت آهنگ تغییرات بردار یکه‌ی مماس در هر نقطه معیار مناسبی برای تعریف مفهوم خمیدگی خواهد بود.

به این ترتیب ابتدا یک خم منظم $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^۳$ با تندی واحد (با پارامتر طبیعی طول قوس) را در نظر می‌گیریم. در این حالت $\|\mathbf{r}'(s)\| = ۱$ و $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$. پس $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{r}''(s)$ و در نتیجه $\mathbf{r}''(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|\ \mathbf{N}(s)$. اندازه‌ی آهنگ تغییرات بردار $\mathbf{T}$،

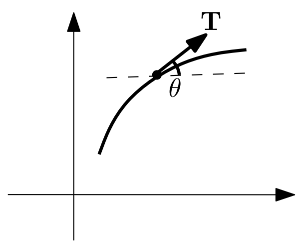
$$\|\mathbf{T}'(s)\| = \| \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}(\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s))\|$$

بیان‌گر میزان تغییرات نسبی بردار یکه‌ی مماس در بازه‌ی $[s, s+h]$ است که بر اساس آن **انحنا یا خمیدگی** خم منظم که با κ نمایش داده می‌شود به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\kappa(s) := \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$$

برای خم‌های منظم مسطح با تندی واحد می‌توان مبنای شهودی این تعریف را بهتر درک کرد. خم منظم مسطح با تندی واحد را می‌توانیم بدون کم شدن از کلیت در صفحه‌ی xoy و به شکل $\alpha(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ در نظر بگیریم. اگر θ زاویه‌ی بین بردار $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$ با جهت مثبت محور x باشد (شکل ۲—۶) آنگاه

$$x'(s) = \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{i}\rangle = \cos\theta \quad , \quad \mathbf{T}'(s) = \Big[-\sin\big(\theta(s)\big)\mathbf{i} + \cos\big(\theta(s)\big)\mathbf{j}\Big]\ \frac{d\theta}{ds}$$



شکل ۲—۶ خمیدگی خم مسطح.

پس برای خم منظم مسطح داریم

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = |\frac{d\theta}{ds}|$$

در ادامه به معرفی مفهوم تاب برای یک خم منظم با تندی واحد می‌پردازیم. به زبان شهودی هم ما برای اجسام متحرک اصطلاح پیچ و تاب را به کار می‌بریم. برای بیان ریاضی خمیدگی که نظیر اصطلاح پیچ است از آهنگ تغییرات بردار یکه‌ی $\mathbf{T}$ استفاده کردیم. این معیار با شتاب مرتبط است و بیانگر میزان انحراف خم از یک خط راست است. یک ایده‌ی ساده برای بیان ریاضی تاب استفاده از بردار $\mathbf{B}$ است. به این ترتیب که اندازه‌ی آهنگ تغییرات بردار $\mathbf{B}$ را به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری تاب مطرح کنیم. در این صورت تاب بیانگر میزان انحراف خم از صفحه‌ی بوسان است.

با توجه به تعریف κ، $\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$. برای بیان دقیق تاب، اندازه‌ی آهنگ تغییرات بردار $\mathbf{B}'$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که بردارهای یکه‌ی $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ دو به دو بر هم عمود هستند تشکیل یک پایه‌ی یکه‌ی متعامد (ارتونرمال [۷]) برای فضای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند. پس بنابر آنچه در فصل اول گفتیم:

$$\mathbf{B}' = \langle \mathbf{B}', \mathbf{T} \rangle\ \mathbf{T} + \langle \mathbf{B}', \mathbf{N} \rangle\ \mathbf{N} + \langle \mathbf{B}', \mathbf{B} \rangle\ \mathbf{B}$$

با توجه به این که $||\mathbf{B}|| = 1$، داریم $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1$ و در نتیجه $\langle \mathbf{B}', \mathbf{B} \rangle = 0$. از سوی دیگر با مشتق‌گیری از رابطه‌ی $\langle \mathbf{B}, \mathbf{T} \rangle = 0$ نتیجه می‌گیریم $\langle \mathbf{B}', \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{T}' \rangle = 0$. به این ترتیب $\langle \mathbf{B}', \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{B}, \mathbf{T}' \rangle = \langle \mathbf{B}, \kappa\mathbf{N} \rangle = \kappa\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0$. پس $\mathbf{B}' = \langle \mathbf{B}', \mathbf{N} \rangle\ \mathbf{N}$. به این ترتیب $|\langle \mathbf{B}', \mathbf{N} \rangle| = ||\mathbf{B}'||$ بیانگر اندازه‌ی آهنگ تغییرات بردار $\mathbf{B}'$ است. **تاب** خم منظم با تندی واحد با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\tau(s) := -\langle \mathbf{B}'(\mathbf{s}), \mathbf{N}(\mathbf{s}) \rangle$$

باید توجه داشت که طبق تعریف همواره $\kappa \geq 0$ ولی τ می‌تواند هر عدد حقیقی باشد.

با توجه به آنچه در مورد بردارهای یکه‌ی $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ گفتیم، یک قضیه‌ی مهم در مورد خم‌های منظم به دست می‌آید که موسوم به دو ریاضیدان فرانسوی فرنه و سره است. در این قضیه رابطه‌ی زیبای بین $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ و $\mathbf{T}', \mathbf{N}', \mathbf{B}'$ بر حسب τ و κ بیان شده است. خواهیم دید که هندسه‌ی یک خم در $\mathbb{R}^3$ به طور کامل به وسیله‌ی این قضیه مشخص می‌شود. قضیه‌ی فرنه—سره را ابتدا برای خم‌های منظم با تندی واحد بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۱۵-۱ برای یک خم منظم با تندی واحد داریم

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

---

[۷] Orthonormal

برای خم با تندی واحد $\mathbf{r}'(\mathbf{s}) = \mathbf{T}(s)$. پس $\mathbf{r}''(\mathbf{s}) = \mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$. در نتیجه

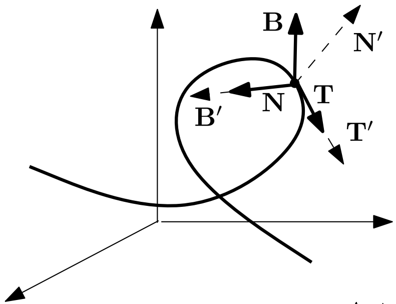
$$\mathbf{r}'(\mathbf{s}) \times \mathbf{r}''(\mathbf{s}) = \mathbf{T}(s) \times \big(\kappa(s)\mathbf{N}(s)\big) = \kappa(s)\mathbf{B}(s)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'''(\mathbf{s}) &= \kappa(s)\ \mathbf{N}'(s) + \kappa'(s)\ \mathbf{N}(s) \\
&= \kappa(s)\big(-\kappa(s)\ \mathbf{T}(s) + \tau(s)\ \mathbf{B}(s)\big) + \kappa'(s)\ \mathbf{N}(s) \\
&= -\kappa^{۲}(s)\ \mathbf{T}(s) + \kappa(s)\tau(s)\ \mathbf{B}(s) + \kappa'(s)\ \mathbf{N}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r}'(\mathbf{s}) \times \mathbf{r}''(\mathbf{s}), \mathbf{r}'''(\mathbf{s})\rangle &= \langle \kappa(s)\mathbf{B}(s)\ ,\ -\kappa^{۲}(s)\ \mathbf{T}(s) + \kappa(s)\tau(s)\ \mathbf{B}(s) + \kappa'(s)\ \mathbf{N}(s)\rangle \\
&= \langle \kappa(s)\mathbf{B}(s), \kappa(s)\tau(s)\ \mathbf{B}(s)\rangle = \kappa^{۲}(s)\tau(s)
\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\tau(s) = \frac{\langle \mathbf{r}'(\mathbf{s}) \times \mathbf{r}''(\mathbf{s}), \mathbf{r}'''(\mathbf{s})\rangle}{\kappa^{۲}(s)} = \frac{\big[\mathbf{r}'(\mathbf{s}), \mathbf{r}''(\mathbf{s}), \mathbf{r}'''(\mathbf{s})\big]}{||\mathbf{r}''(\mathbf{s})||^{۲}}$$



شکل ۲–۷ رابطه‌ی بین $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ و $\mathbf{T}', \mathbf{N}', \mathbf{B}'$.

مثال ۲–۱۵–۲ برای خط و دایره‌ی نظیر خم‌های منظم زیر ابتدا با پارامتری سازی طبیعی خم‌های هم ارز با تندی واحد را مشخص و سپس خمیدگی آنها تعیین کنید.

الف) $\mathbf{r}(t) = (at + x_{\circ})\ \mathbf{i} + (bt + y_{\circ})\ \mathbf{j} + (ct + z_{\circ})\ \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{۳}$.

ب) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\ \mathbf{i} + a\sin t\ \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{۲}$.

الف) برد $\mathbf{r}$ خطی مانند L را مشخص می‌کند. فرض کنیم $P_{\circ} = (x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})$ نقطه‌ی نظیر $t = \circ$ بر خط L ، s طول قوس از نقطه‌ی $P_{\circ}$ و $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ بردار هادی L باشد. در این صورت $\mathbf{r}(t) = P_{\circ} + t\mathbf{v}$ و در نتیجه $\mathbf{r}'(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = \mathbf{v}$. پس $s(t) = \int_{\circ}^{t} ||\mathbf{r}'(\theta)||d\theta = ||\mathbf{v}||t$. در نتیجه $t(s) = \dfrac{s}{||\mathbf{v}||}$ و

$$\mathbf{R}(s)=\mathbf{r}(t(s))=(\frac{a}{\|\mathbf{v}\|}s+x_0)\mathbf{i}+(\frac{b}{\|\mathbf{v}\|}s+y_0)\mathbf{j}+(\frac{c}{\|\mathbf{v}\|}s+z_0)\mathbf{k}.$$

به این ترتیب $\mathbf{R}'(s)=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ برداری ثابت است. پس برای خط داریم

$$\kappa(s)=\|\mathbf{R}''(s)\|=0$$

ب) فرض کنیم s طول کمان از نقطه‌ی نظیر $t=0$ باشد. در این صورت

$$s(t)=\int_0^t\|\mathbf{r}'(v)\|dv=at\ ,\quad t(s)=\frac{s}{a}$$
$$\mathbf{R}(s)=a\cos(\frac{s}{a})\mathbf{i}+a\sin(\frac{s}{a})\mathbf{j}\ ,\quad \mathbf{R}'(s)=-\sin(\frac{s}{a})\mathbf{i}+\cos(\frac{s}{a})\mathbf{j}$$
$$.\mathbf{R}''(s)=-\frac{1}{a}\cos(\frac{s}{a})\mathbf{i}-\frac{1}{a}\sin(\frac{s}{a})\mathbf{j}$$

پس برای دایره داریم

$$\kappa(s)=\|\mathbf{R}''(s)\|=\frac{1}{a}$$

به این ترتیب نشان دادیم که خمیدگی یک خط برابر صفر و خمیدگی دایره، وارون اندازه‌ی شعاع آن است. این نتایج با آنچه در مورد مفهوم خمیدگی انتظار داشتیم سازگار است. پس از مطرح کردن روش محاسبه‌ی خمیدگی خم‌های با تندی دلخواه بدون محاسبات اضافی برای پارامتری‌سازی مجدد این نتایج را مجدداً به دست می‌آوریم.

مثال ۲–۱۵–۳ برای مارپیچ استوانه‌ای $\alpha(s)=m\cos\omega s\ \mathbf{i}+m\sin\omega s\ \mathbf{j}+h\omega s\ \mathbf{k}$ که در آن $\omega=(m^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$، خمیدگی و تاب را محاسبه کنید.

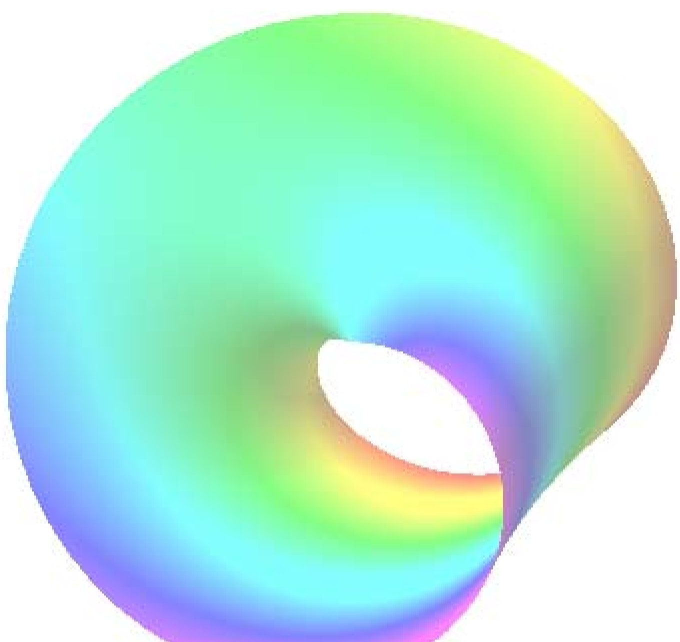
$$\mathbf{T}(s)=-m\omega\sin\omega s\ \mathbf{i}+m\omega\cos\omega s\ \mathbf{j}+h\omega\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}'(s)=m\omega^2\cos\omega s\ \mathbf{i}-m\omega^2\sin\omega s\ \mathbf{j}$$

به این ترتیب $\kappa(s)=\|\mathbf{T}'(s)\|=\omega^2h$. علاوه بر این

$$\mathbf{N}(s)=-\cos\omega s\ \mathbf{i}-\sin\omega s\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B}(s)=\mathbf{T}(s)\times\mathbf{N}(s)=\omega h\sin\omega s\ \mathbf{i}-h\omega\cos\omega s\ \mathbf{j}+m\ \mathbf{k}$$



تمرین‌های فصل دوم

۱) مقدار $\lim_{t\to -1}(\frac{t^2-1}{t-1}\,\mathbf{i}+\frac{t^3+1}{t+1}\,\mathbf{j})$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

۲) خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t)=\cos t\ \mathbf{i}+\sin t\ \mathbf{j}+t\ \mathbf{k}$ رادر جهت بردار $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ بر صفحه‌ی xoy تصویر می‌کنیم. معادلات پارامتری خم تصویر را بیابید.

۳) تصویر قائم خم نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t)=3t\mathbf{i}+9t^2\mathbf{j}+27t^3\mathbf{k}$ را بر صفحه‌ی $x+y+z=0$ مشخص کنید.

۴) برای $t\geq 0$ مسیر حرکت یک متحرک در صفحه توسط تابع برداری $\mathbf{r}(t)=4\cos^3 t\mathbf{i}+4\sin^3 t\mathbf{j}$ تعیین می‌شود. کجا و چه موقع سرعت متحرک، یعنی $\|\mathbf{r}'(t)\|$ ماکزیمم و مینیمم می‌شود؟ آیا این متحرک هرگز از حرکت باز می‌ایستد؟

۵) آیا از رابطه‌ی $\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\|\mathbf{r}(t)\|$ برای تمام مقادیر t مقدار ثابتی است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۶) در چه نقاطی خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x=t$ ، $y=t^2$ و $z=t^3$ با صفحه‌ی $x+2y+z-1=0$ موازی هستند؟

۷) ثابت کنید تمامی خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x=2t\ ,\ y=t^2\ ,\ z=t^3$ صفحه‌ی $x+y+z=3$ را قطع می کنند. مکان هندسی نقاط تقاطع را بیابید.

۸) فرض کنید C خمی نظیر یک تابع برداری مشتق‌پذیر $\mathbf{r}$ با مشتق غیر صفر، واقع بر کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات باشد. ثابت کنید تمام صفحات قائم بر C از مبداء مختصات می‌گذرند.

۹) خم‌های C_1 با معادلات پارامتری $x=t\ ,\ y=t^2$ و C_2 با معادلات پارامتری $x=\sinh t\ ,\ y=2\cosh t$ مفروضند.

الف) نقاط برخورد دو خم را به دست آورید.

ب) زاویه‌ی بین بردارهای مماس بر دو خم در نقطه‌ی برخورد را تعیین کنید.

۱۰) خم C با معادلات پارامتری $x=\sin t\ ,\ y=\cos t\ ,\ z=\cos^2 t$ مفروض است. نقاطی از C را به دست آورید که خط واصل از مبدأ به این نقاط بر C عمود باشد (یعنی بر خط مماس بر C در آن نقطه عمود باشد).

۱۱) الف) نشان دهید کلیه‌ی صفحات قائم بر خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}$ با ضابطه‌ی

$$\mathbf{r}(t) = a\sin^۲ t\mathbf{i} + a\sin t\cos t\mathbf{j} + a\cos t\mathbf{k}$$

از مبدأ مختصات می گذرند.

ب) ثابت کنید خم C در قسمت (الف) بر یک کره واقع است.

۱۲) فرض کنید C خم همواری به معادله‌ی برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. ثابت کنید صفحات قائم بر خم در تمام نقاط از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند اگر وتنها اگر C بر یک کره قرار داشته باشد.

۱۳) معادله‌ی خط مماس و صفحه‌ی قائم بر خم فصل مشترک دو رویه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱۰$ و $x^۲ + z^۲ = ۱۰$ را در نقطه‌ی $P = (۳, ۱, ۱)$ پیدا کنید.

۱۴) تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = \ln xyz$ مفروض است. مقدار این تابع را در نقاط داده شده به دست آورید.

الف) $P = (\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e})$ ب) $Q = (\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$

۱۵) در صورتی که برای تابع دو متغیره‌ی f رابطه‌ی $f(x + y, x - y) = ۲xy + y^۲$ برقرار باشد، ضابطه‌ی تابع f را پیدا کنید.

۱۶) دامنه‌ی توابع چند متغیره با ضابطه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x, y) = \sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}$ ب) $f(x, y) = \dfrac{۱}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}$

ج) $f(x, y) = \ln xy$ د) $f(x, y, z) = \dfrac{۱}{x} + \dfrac{۱}{y} + \dfrac{۱}{z}$

۱۷) برای تابع f باضابطه‌ی $f(x, y) = x^۲ + ۴y^۲$ خم‌های تراز را برای مقادیر $c = ۰, ۱, ۲, ۳$ رسم کنید.

۱۸) رویه‌های تراز تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲$ را برای $۰ \le c < \infty$ توصیف کنید.

۱۹) رویه‌های نظیر هر یک از روابط زیر را در فضای سه بعدی توصیف و رسم کنید.

الف) $x^۲ - y^۲ = ۰$ ه) $x^۲ + z^۲ = ۲z$

ب) $xy = -۱$ و) $y^۲ - ۸x = ۰$

ج) $x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۰$ ز) $y^۲ + z^۲ - x = ۰$

د) $y^۲ + ۴x^۲ + z - ۳ = ۰$ ه) $\sqrt{(x - ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ + ۱} - z = ۰$

۲۰) معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران خم‌های زیر حول محور داده شده را مشخص کنید.

الف) سهمی $x = ۴z^۲$، محور z. ب) سهمی $y = \sqrt{z}$، محور y.

ج) بیضی $۹x^۲ + ۴z^۲ = ۳۶$، محور x. د) هذلولی $x^۲ - z^۲ = ۴$، محور z.

۲۱) خم C با معادلات پارامتری $x = ae^t \cos t\ ,\ y = ae^t \sin t\ ,\ z = ae^t$ را به ازای $t \geq ۰\ ,\ a > ۰$ در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید این خم روی یک مخروط قرار دارد. معادله‌ی مخروط را بدست آورید و نمودار مخروط و خم را رسم کنید.

ب) ثابت کنید خم C تمام مولدهای مخروط را با زاویه‌ی ثابتی قطع می‌کند.

۲۲) الف) نشان دهید خم نظیر $\mathbf{r}(t) = (t\cosh t)\mathbf{i} + (t\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ بر یک رویه‌ی درجه دوم قرار دارد. معادله‌ی رویه را بنویسید و نام آن‌را ذکر کنید.

ب) معادلات پارامتری خم حاصل از برخورد رویه‌ی قسمت (الف) با صفحه‌ی $y - \frac{۱}{۲}x = ۰$ را به دست آورید.

۲۳) نشان دهید خم نظیر تابع برداری

$$\mathbf{r}(t) = (۲\sqrt{t}\cos t)\mathbf{i} + (۳\sqrt{t}\sin t)\mathbf{j} + \sqrt{۱-t}\ \mathbf{k} \quad , \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

روی یک رویه‌ی درجه‌ی دو قرار دارد. معادله‌ی این رویه را مشخص کنید.

۲۴) نشان دهید مقطع صفحه‌ی $x = ۱$ با هذلولی‌گون دو پارچه‌ی دوار $x^۲ + y^۲ - z^۲ = -۱$ یک هذلولی است. معادلات پارامتری خط مماس بر این هذلولی را در نقطه‌ی $P = (۱, ۱, \sqrt{۳})$ بنویسید.

۲۵) با استفاده از تعریف نشان دهید $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{x^۲\cos(xy)\sin(y)}{x^۲+y^۲} = ۰$.

۲۶) (الف) نشان دهید $(۰, ۰)$ یک نقطه‌ی انباشتگی برای خم $y = e^{-\frac{۱}{x^۲}}$ است، یعنی هر همسایگی دلخواه به مرکز $(۰, ۰)$ با این خم نقطه‌ی مشترک دیگری غیر از $(۰, ۰)$ دارد.

(ب) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ye^{-\frac{۱}{x^۲}}}{y^۲ + e^{-\frac{۲}{x^۲}}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ در $(۰, ۰)$ پیوسته نیست.

۲۷) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\dfrac{xy^{۲}}{x^{۲}+y^{۴}}$ در مبدأ حد ندارد ولی حد این تابع در امتداد هر خطی که از مبدأ می‌گذرد وجود دارد.

۲۸) تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}y}{x^{۶}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

آیا این تابع در تمام نقاط پیوسته است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۲۹) نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{(x+y)^{۳}} & x+y\neq ۰\\ ۰ & x+y=۰\end{cases}$$

۳۰) پیوستگی تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر را در نقطه‌ی $(۰,۰)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|y|x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

۳۱) مشخص کنید آیا تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y}{x^{۲}+y^{۲}+۲x+۱} & (x,y)\neq(-۱,۰)\\ ۰ & (x,y)=(-۱,۰)\end{cases}$$

در نقطه‌ی $(-۱,۰)$ پیوسته است؟

۳۲) برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\dfrac{x^{۲}y^{۲}}{x^{۲}y^{۲}+(x-y)^{۲}}$ نشان دهید

$$\lim_{x\to ۰}[\lim_{y\to ۰}f(x,y)]=\lim_{y\to ۰}[\lim_{x\to ۰}f(x,y)]=۰$$

با این وجود $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}f(x,y)$ وجود ندارد.

فصل ۳

مشتق‌پذیری و اکسترمم‌های توابع حقیقی چند متغیره

در این فصل مفهوم مشتق‌پذیری توابع حقیقی چند متغیره مطرح می‌شود. رهیافت‌های متفاوتی برای ارائه‌ی مشتق‌پذیری توابع حقیقی چند متغیره وجود دارد. در این کتاب ابتدا رهیافت هندسی و سپس یک رهیافت تحلیلی مطرح خواهد شد. بر اساس رهیافت هندسی، مشتق‌پذیری توابع حقیقی دو متغیره در یک نقطه معادل هموار بودن نمودار تابع در آن نقطه است. به عبارت دیگر در این نقاط صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع وجود دارد. در بخش پایانی مفاهیم اکسترمم و اکسترمم مقید توابع حقیقی چند متغیره بررسی می‌شوند. این مفاهیم در برخی از مدل‌های ریاضی کاربردی نقش مهمی بر عهده دارند.

۳−۱ مشتقات جزئی

به منظور دست‌یابی به تعمیم مناسبی برای مفهوم مشتق‌پذیری توابع حقیقی چند متغیره، ابتدا به بیان یک تعمیم طبیعی و ساده برای مشتق این توابع می‌پردازیم. برای یک تابع حقیقی دو متغیره‌ی $z = f(x,y)$ و هر مقدار y، تابع F با ضابطه‌ی $F(x) := f(x,y)$ را می‌توان تابعی یک متغیره با متغیر x در نظر گرفت. به همین ترتیب برای هر مقدار x، تابع G با ضابطه‌ی $G(y) := f(x,y)$ را می‌توان تابعی یک متغیره با متغیر y در نظر گرفت. مشتق F نسبت به x و مشتق G نسبت به y، در صورت وجود، ابزار مناسبی برای تعریف مشتق f خواهند بود. این نوع مشتق که مشتق جزئی یا نسبی نامیده می‌شود، اهمیت ویژه‌ای در بحث توابع حقیقی چند متغیره دارد.

فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ و $f : D \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی دو متغیره‌ی تعریف شده در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x,y) \in D$ باشد.

مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر x در (x,y) که با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ یا $f_x(x,y)$ نمایش داده می‌شود در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

به همین ترتیب، مشتق جزئی f نسبت به متغیر y در (x,y) با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ یا $f_y(x,y)$ نمایش داده می‌شود و در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

همان‌طور که گفتیم به ازای هر مقدار ثابت y می‌توان $F(x) := f(x,y)$ را تابعی یک متغیره از متغیر x در نظر گرفت. در این صورت مشتق F نسبت به x همان $f_x(x,y)$ است. به همین ترتیب به ازای هر مقدار ثابت x می‌توان $G(y) := f(x,y)$ را تابعی یک متغیره از متغیر y در نظر گرفت. در این صورت مشتق G نسبت به y همان $f_y(x,y)$ است.

در حالتی که $D \subseteq \mathbb{R}^۳$ و $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x,y,z) \in D$ تعریف شده باشد، مشتقات جزئی تابع f نسبت به متغیرهای x، y و z در (x,y,z) در صورت وجود، به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$

مثال ۳-۱-۱ برای تابع $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xy^۲ - z^۳$،

الف) مشتقات جزئی f را در نقطه‌ی $(۱,۱,۰)$ محاسبه می‌کنیم.

ب) مشتقات جزئی f را در نقطه‌ی دلخواه به دست می‌آوریم.

الف) بنا به تعریف مشتقات جزئی داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱,۱,۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۱+h,۱,۰) - f(۱,۱,۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{(۱+h) - ۱}{h} = ۱$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۱,۱,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۱,۱+h,۰)-f(۱,۱,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^۲-۱}{h} = ۲$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(۱,۱,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۱,۱,h)-f(۱,۱,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{۱-h^۳-۱}{h} = ۰$$

ب) برای محاسبه‌ی مشتقات جزئی تابع f نسبت به هر متغیر کافی است متغیرهای دیگر در ضابطه‌ی f را ثابت فرض کنیم و نسبت به این متغیر مشتق بگیریم. به این ترتیب،

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^۲ \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ۲xy \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -۳z^۲.$$

فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ و $f : D \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی دو متغیره‌ی تعریف شده در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x,y) \in D$ باشد. اگر $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ برای هر $(x,y) \in D$ وجود داشته باشند آنگاه برای توابع $f_x : D \to \mathbb{R}^۲$ و $f_y : D \to \mathbb{R}^۲$ می‌توان مشتقات جزئی را در صورت وجود محاسبه کرد. به مشتقات جزئی توابع f_x و f_y، **مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم** f می‌گوییم و به شکل زیر نمایش داده می‌شوند.

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر یک تابع چند متغیره‌ی f به همین ترتیب قابل تعریف هستند.

مثال ۳-۱-۲ مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم توابع زیر را به دست می‌آوریم.

الف) $f(x,y) = xy^۲ + ye^x$

ب) $f(x,y,z) = x\sin(y\cos z)$

الف)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^۲ + ye^x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ۲xy + e^x$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = ye^x \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۲x \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y} = ۲y + e^x \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x} = ۲y + e^x$$

ب)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y\cos z)\ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos z\cos(y\cos z)\ , \ \frac{\partial f}{\partial z} = -xy\sin z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = ۰ \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = -x\cos^۲ z\sin(y\cos z)\ ,$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲} = xy^۲\sin^۲ z\sin(y\cos z) - xy\cos z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y} = \cos z\cos(y\cos z) \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x} = \cos z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial z} = -y\sin z\cos(y\cos z) \ , \ \frac{\partial^۲ f}{\partial z\partial x} = -y\sin z\cos(y\cos z)$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial z} = xy \sin z \cos z \sin(y \cos z) - x \sin z \cos(y \cos z)$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial z \partial y} = xy \sin z \cos z \sin(y \cos z) - x \sin z \cos(y \cos z)$$

در ادامه با چند مثال، روش محاسبه‌ی مشتقات جزئی برای توابع با ضابطه‌های مختلف به تفضیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۳-۱-۳ تابع دو متغیره‌ی حقیقی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف) نشان می‌دهیم تابع f روی $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است.
ب) مشتقات جزئی تابع f را در نقطه‌ی دلخواه $(x,y) \in \mathbb{R}^۲$ محاسبه می‌کنیم.

الف) هر یک از توابع $P(x,y) = x^۳$ و $Q(x,y) = x^۲ + y^۲$ در نقطه‌ی دلخواه $(x,y) \in \mathbb{R}^۲ - \{(۰,۰)\}$ پیوسته هستند و برای این نقاط $Q(x,y) \neq ۰$ پس $f = P/Q$ نیز در این نقاط پیوسته است. برای نقطه‌ی $(۰,۰)$ باید نشان دهیم $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = f(۰,۰) = ۰$ یعنی

$$\forall\, \varepsilon > ۰ \;\; \exists\, \delta > ۰ \;\; \forall (x,y)\; (\sqrt{(x-۰)^۲ + (y-۰)^۲} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - ۰| < \varepsilon)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|f(x,y) - ۰| = |\frac{x^۳}{x^۲+y^۲}| = |x| \frac{x^۲}{x^۲+y^۲} \leq |x| \leq \sqrt{x^۲+y^۲}$$

برای $\varepsilon > ۰$ کافی است قرار دهیم $\delta = \varepsilon$. پس تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ نیز پیوسته است.

ب)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۰+h,۰) - f(۰,۰)}{h} = \lim \frac{h^۳}{h^۳} = ۱$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۰,۰+h) - f(۰,۰)}{h} = \lim \frac{۰}{h^۳} = ۰$$

و برای نقطه‌ی $(۰,۰) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^۲$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^۳}{x^۲+y^۲}) = \frac{x^۴ + ۳x^۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۳}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^۳}{x^۲+y^۲}) = \frac{-۲yx^۳}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

مثال ۳–۱–۴ تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{۱}{x}\sin(xy) & x\neq ۰\\ y & x=۰\end{cases}$$

الف) ضابطه‌ی توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را تعیین می‌کنیم.

ب) مقادیر $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(۰,۰)$ و $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(۰,۰)$ را به دست می‌آوریم.

الف) برای نقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$ با شرط $x\neq ۰$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{۱}{x^۲}\sin(xy)+\frac{y}{x}\cos(xy)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(xy)$$

برای نقطه‌ای به شکل $(۰,y)\in\mathbb{R}^۲$ با توجه به تعریف داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,y)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,y)-f(۰,y)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{h}\sin(hy)-y}{h}=۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰,y)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,y+h)-f(۰,y)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{y-y+h}{h}=۱$$

بنابر این

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}-\frac{۱}{x^۲}\sin(xy)+\frac{y}{x}\cos(xy) & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}\quad ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(xy)$$

ب)

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(۰,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}(\frac{۰-۰}{h})=۰$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,۰)-\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}(\frac{۱-۱}{h})=۰$$

مثال ۳–۱–۵ مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$ عبارتند از:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{۱}{x+\ln y}\quad ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\frac{۱}{y}}{x+\ln y}=\frac{۱}{y(x+\ln y)}$$

و مشتقات جزئی مرتبه دوم f به شکل زیر خواهند بود:

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x,y)=\frac{-۱}{(x+\ln y)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{-\frac{۱}{y}}{(x+\ln y)^۲}=\frac{-۱}{y(x+\ln y)^۲}$$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{-y}{y^{2}(x+\ln y)^{2}}=\frac{-1}{y(x+\ln y)^{2}}$$
$$\frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}(x,y)=\frac{-(x+\ln y+1)}{y^{2}(x+\ln y)^{2}}$$

در مثال بعد نشان می‌دهیم که برای توابع حقیقی چند متغیره از وجود مشتقات جزئی در یک نقطه پیوستگی تابع در آن نقطه نتیجه نمی‌شود. به این ترتیب مشتقات جزئی تعمیم‌های ضعیفی از مشتق برای توابع چند متغیره است.

مثال ۳-۱-۶ تابع دو متغیره‌ی حقیقی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\sin y}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) ضابطه‌ی توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را به دست می‌اوریم.
ب) نشان می‌دهیم تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست.

الف) برای محاسبه‌ی مشتقات جزئی در نقطه‌ی $(0,0)$ از تعریف استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

برای سایر نقاط از قواعد مشتق‌گیری نسبت به یک متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{(y^{2}-x^{2})\sin y}{(x^{2}+y^{2})^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^{2}+y^{2})\cos y-2x^{2}y\sin y}{(x^{2}+y^{2})^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ب) اگر f در $(0,0)$ پیوسته باشد آنگاه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$. مسیر C به معادله‌ی $y=x$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y)\in C$،

$$f(x,y)=\frac{x\sin x}{x^{2}+x^{2}}=\frac{x\sin x}{2x^{2}}$$

از سوی دیگر برای $(x,y)\in C$، $(x,y)\to(0,0)$ اگر و تنها اگر $x\to 0$. اما

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x^{2}}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)=0$$

بنابراین تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست.

در ادامه به بررسی رابطه‌ی بین مشتقات جزئی مراتب مختلف می‌پردازیم. در حالت کلی

ارتباطی بین مشتقات جزئی وجود ندارد ولی تحت شرایطی $\frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}(x,y)$ مثل چند مثال قبل برابر هستند. در مثال بعد نشان می‌دهیم که این دو مقدار در حالت کلی برابر نیستند.

مثال ۳-۱-۷ برای تابع دومتغیره‌ی حقیقی f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy(x^{2}-y^{2})}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

مقادیر $\frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x}(0,0)$ را به دست می‌آوریم.

با توجه به ضابطه‌ی تابع، مشتقات جزئی در $(0,0)$ را به کمک تعریف و در بقیه‌ی نقاط بر اساس قواعد مشتق‌گیری توابع یک متغیره محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(3x^{2}y-y^{3})(x^{2}+y^{2})-2x(x^{3}y-xy^{3})}{(x^{2}+y^{2})^{2}} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^{3}-3xy^{2})(x^{2}+y^{2})-2y(x^{3}y-xy^{3})}{(x^{2}+y^{2})^{2}} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

بنابر این

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} \frac{(x^{3}-3xy^{2})(x^{2}+y^{2})-2y(x^{3}y-xy^{3})}{(x^{2}+y^{2})^{2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} \frac{(3x^{2}y-y^{3})(x^{2}+y^{2})-2x(x^{3}y-xy^{3})}{(x^{2}+y^{2})^{2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(\frac{-\frac{h^{5}}{h^{4}}-0}{h})=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(\frac{\frac{h^{5}}{h^{4}}-0}{h})=1 \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که برای این تابع $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

در ادامه‌ی این بخش یک شرط کافی برای برابر شدن مقادیر f_{xy} و f_{yx} مطرح می‌کنیم.

فرض کنیم تابع حقیقی دومتغیره‌ی $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_0, y_0) \in D$ تعریف شده باشد و f_{xy} و f_{yx} در این همسایگی وجود داشته و در (x_0, y_0) پیوسته باشند. توابع یک متغیره‌ی Δ، G و F را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\Delta(h) := f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$
$$G(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$$
$$F(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$$

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اعداد $1 > \theta_1 > 0$ و $1 > \theta_2 > 0$ وجود دارند که:

$$\begin{aligned}
\Delta(h) = G(x_0+h) - G(x_0) &= hG'(x_0+\theta_1 h) \\
&= h\big[f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+h) - f_x(x_0+\theta_1 h, y_0)\big] \\
&= h^2 f_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 h)
\end{aligned}$$

به همین ترتیب اعداد $1 > \theta_3 > 0$ و $1 > \theta_4 > 0$ وجود دارند که:

$$\begin{aligned}
\Delta(h) = F(y_0+h) - F(y_0) &= hF'(y_0+\theta_3 h) \\
&= h\big[f_y(x_0+h, y_0+\theta_3 h) - f_y(x_0, y_0+\theta_3 h)\big] \\
&= h^2 f_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 h)
\end{aligned}$$

اکنون از پیوستگی f_{xy} و f_{yx} در (x_0, y_0) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} f_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 h) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} f_{xy}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 h) \\
&= f_{yx}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

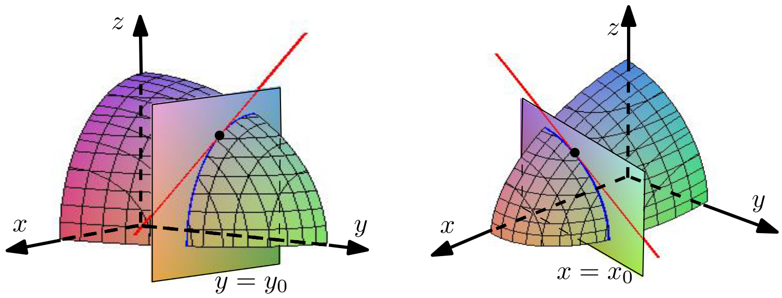
آنچه گفته شد به شکل قضیه‌ی زیر قابل بیان است. تعمیم این قضیه برای توابع n متغیره به شکل مشابه بیان می‌شود.

قضیه ۳–۱–۸ اگر تابع حقیقی دومتغیره‌ی $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_0, y_0) \in D$ تعریف شده باشد و f_{xy} و f_{yx} در این همسایگی وجود داشته و در (x_0, y_0) پیوسته باشند آنگاه $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

۳–۱–۱ تعبیر هندسی مشتقات جزئی

مقطع نمودار تابع حقیقی دومتغیره‌ی f با صفحه‌ی $y = y_0$ خمی نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + f(x, y_0)\mathbf{k}$ است. برای این تابع برداری $\mathbf{r}'(x_0) = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{k}$. به این ترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ شیب خط مماس بر رویه‌ی S_f به معادله‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ در صفحه‌ی به معادله‌ی $y = y_0$ است (شکل ۳–۱).

به همین ترتیب مقطع رویه‌ی S_f و صفحه‌ی $x = x_0$ خمی نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(y) = x_0\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x_0, y)\mathbf{k}$ است. برای این تابع برداری $\mathbf{r}'(y_0) = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{k}$. به این ترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ شیب خط مماس بر رویه‌ی S_f در نقطه‌ی $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ در صفحه‌ی به معادله‌ی $x = x_0$ است (شکل ۳–۱).



شکل ۳–۱ تعبیر هندسی مشتقات جزئی توابع دو متغیره.

۳–۲ مشتق سوئی

در این بخش مفهوم مشتق سوئی و انگیزه‌ی تعریف آن برای توابع حقیقی دو متغیره بیان می‌شود. مشتقات جزئی حالت‌های خاصی از مشتق سوئی هستند. مشتقات جزئی تابعی مانند f در نقطه‌ی (x, y) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(0, 1)) - f(x_0, y_0)}{h}
\end{aligned}$$

یک تعمیم ساده از این مشتقات در نقطه‌ای مانند $(x_\circ, y_\circ)$، **مشتق سوئی در سوی بردار یکه‌ی** $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} D_u f(x_\circ, y_\circ) &:= \lim_{h\to\circ} \frac{f((x_\circ, y_\circ) + h(a,b)) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ + ha\ ,\ y_\circ + hb) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} \end{aligned}$$

بر اساس این تعریف، مشتقات جزئی یک تابع حقیقی دو متغیره حالت‌های خاصی از مشتق سوئی آن در سوهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ هستند. به همین ترتیب، مشتق سوئی تابع حقیقی سه متغیره‌ی f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{\mathbf{u}} f(x_\circ, y_\circ, z_\circ) := \lim_{h\to\circ} \frac{f((x_\circ, y_\circ, z_\circ) + h(a,b,c)) - f(x_\circ, y_\circ, z_\circ)}{h}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر چه مشتق سوئی تعمیم خوبی از مشتق جزئی محسوب می‌شود اما آنقدر تعمیم قدرتمندی نیست که پیوستگی را نتیجه دهد.

مثال ۳–۲–۱ تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^۲}{x^۲+y^۴} & (x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

الف) مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{w} = \frac{۱}{۳}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathbf{j}$ و در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ به دست آورید.

ب) مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{w} = \frac{۱}{۳}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathbf{j}$ و در نقطه‌ی $(۲, ۲)$ به دست آورید.

ج) مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ در $(\circ, \circ)$ به دست آورید.

د) نشان دهید f در $(\circ, \circ)$ پیوسته نیست.

الف)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{w}} f(\circ, \circ) &= \lim_{h\to\circ} \frac{f\big((\circ, \circ) + h(\frac{۱}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})\big) - f(\circ, \circ)}{h} \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{f(\frac{h}{۳}, \frac{h\sqrt{۳}}{۲})}{h} \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{۳۶}{۱۶ + ۸۱h^۲} = \frac{۹}{۴} \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{w}}f(۲,۲) &= \lim_{h\to ۰} \frac{f\big((۲,۲)+h(\frac{۱}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۲})\big)-f(۲,۲)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+\frac{h}{۳},۲+\frac{h\sqrt{۳}}{۲})-f(۲,۲)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\Big(\frac{(۲+\frac{h}{۳})(۲+\frac{h\sqrt{۳}}{۲})}{(۲+\frac{h}{۳})^{۲}+(۲+\frac{h\sqrt{۳}}{۲})^{۴}}-\frac{۲}{۵}\Big) \\ &= -\frac{۱}{۲۵}(\sqrt{۳}-۱) \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(۰,۰) &= \lim_{h\to ۰} \frac{f((۰,۰)+h(a,b))-f(۰,۰)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(ha,hb)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{ab^{۲}}{a^{۲}+h^{۲}b^{۴}} \\ &= \begin{cases} \frac{b^{۲}}{a} & a\neq ۰ \\ ۰ & a=۰ \end{cases} \end{aligned}$$

د) روی دسته مسیرهای C_m به معادله‌ی $x=my^{۲}$ برای $(x,y)\in C_m$ داریم $(x,y)\to(۰,۰)$ اگر و تنها اگر $y\to ۰$. اما روی مسیر C_m، مقدار

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=\lim_{y\to ۰} f(my^{۲},y)=\lim_{y\to ۰}\frac{my^{۴}}{m^{۲}y^{۴}+y^{۴}}=\frac{m}{m^{۲}+۱}$$

وابسته به m است و یکتا نیست، پس تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

مثال ۳-۲-۲ تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^{۳}+y^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ در $(۰,۰)$ به دست آورید.

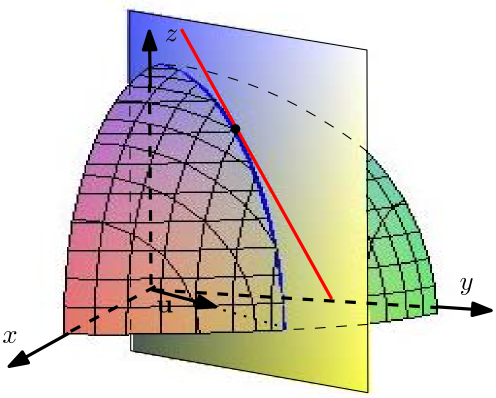
از این‌که $\mathbf{u}$ یکه است نتیجه می‌شود $a^{۲}+b^{۲}=۱$. پس

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(۰,۰) &= \lim_{h\to ۰} \frac{f((۰,۰)+h(a,b))-f(۰,۰)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(ha,hb)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3(a^3+b^3)}{h^3(a^2+b^2)}$$
$$= \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = a^3+b^3$$

۳–۲–۱ تعبیر هندسی مشتق سوئی

مقطع نمودار تابع $z = f(x,y)$ با صفحه‌ی حاوی بردارهای $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$، خمی با معادله‌ی $\mathbf{r}(h) = (x_0+ha)\ \mathbf{i} + (y_0+hb)\ \mathbf{j} + f(x_0+ha, y_0+hb)\ \mathbf{k}$ است. با توجه به این که $\mathbf{r}'(0) = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)\mathbf{k}$، عدد $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ شیب خط مماس بر این خم در نقطه‌ی $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ واقع در صفحه‌ی حاوی بردارهای یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ است (شکل ۴–۲). رابطه‌ی بین مشتق سوئی و جزئی را برای دسته‌ای از توابع حقیقی چند متغیره به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای مشاهده خواهیم کرد.



شکل ۴–۲ تعبیر هندسی مشتق سوئی توابع دو متغیره.

۳–۳ مشتق کل توابع چند متغیره

مفاهیم مشتق جزئی و مشتق سوئی تعمیم رضایت‌بخشی از مشتق توابع یک متغیره برای توابع چند متغیره نیستند. چون همان‌گونه که در مثال ۳–۲–۱ مشاهده کردیم، از وجود مشتقات سوئی تابع چند متغیره، پیوستگی آن تابع نتیجه نمی‌شود. برای ارائه‌ی یک تعمیم مناسب برای مشتق توابع چند متغیره، بهتر است مشتق یک تابع حقیقی یک متغیره را از چشم‌انداز دیگری بررسی کنیم. مشتق تابع حقیقی یک متغیره‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در نقطه‌ی x_0 در صورت وجود عبارت است از:

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

به این ترتیب، اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)-f'(x_\circ)h}{h} = \circ$$

حال اگر قرار دهیم $A := f'(x_\circ)$ و

$$\alpha(h) := \begin{cases} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)-Ah}{h} & h \neq \circ \\ \circ & h = \circ \end{cases}$$

آنگاه:

$$f(x_\circ+h)-f(x_\circ) = Ah+\alpha(h)\ h \quad , \quad \lim_{h\to\circ} \alpha(h) = \circ \tag{۱}$$

بنابر این اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابعی مانند α وجود دارد که در $x_\circ$ پیوسته است و در رابطه‌ی (۱) صدق می‌کند. به کمک رابطه‌ی (۱) می‌توانیم مقدار $f(x_\circ+h)$ را به وسیله‌ی $f(x_\circ)+Ah$ به کمک رابطه‌ی زیر تقریب بزنیم.

$$f(x_\circ+h) = f(x_\circ)+Ah+\alpha(h)\ h \tag{۲}$$

مقدار $E(h) = \alpha(h)h$ **خطای مطلق** و $\frac{E(h)}{h} = \alpha(h)$ **خطای نسبی** تقریب نام دارند و

$$\lim_{h\to\circ} \frac{E(h)}{h} = \lim_{h\to\circ} \alpha(h) = \circ \ , \ \lim_{h\to\circ} E(h) = \lim_{h\to\circ} \alpha(h)h = \circ$$

عکس این مطلب نیز درست است. یعنی اگر یک عدد حقیقی مانند $A \in \mathbb{R}$ و تابعی چون α، پیوسته در $x_\circ$ یافت شود به گونه‌ای که

$$f(x_\circ+h)-f(x_\circ) = Ah+\alpha(h)h \ , \ \lim_{h\to\circ} \alpha(h) = \circ$$

آنگاه تابع f در نقطه‌ی $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $A = f'(x_\circ)$.

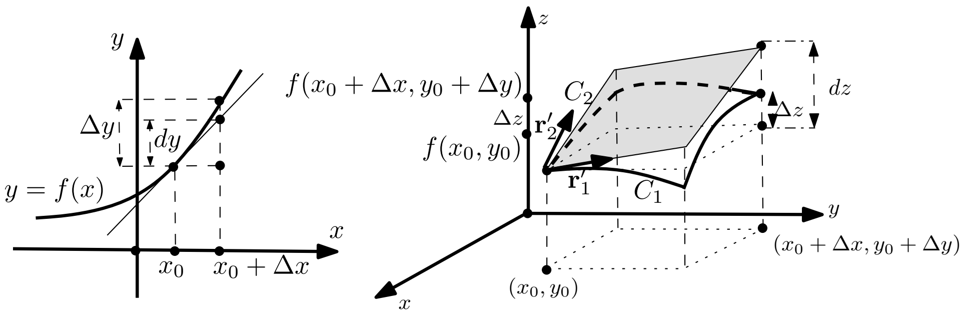
از جنبه‌ی هندسی می‌توان گفت که اگر تابع حقیقی و یک متغیره‌ی f در نقطه‌ی $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(x_\circ, f(x_\circ))$ وجود دارد. خط مماس در این نقطه، نمودار تابع $L(x) = f(x_\circ)+f'(x_\circ)(x-x_\circ) = f(x_\circ)+A(x-x_\circ)$ است. بنابر این $L(x_\circ+h) = f(x_\circ)+Ah$ اصطلاحاً یک تقریب خطی برای مقدار $f(x_\circ+h)$ است زیرا بنابر رابطه‌ی (۲) داریم:

$$f(x_\circ+h) = L(x_\circ+h)+\alpha(h)h$$

با توجه به این‌که $f(x_\circ) = L(x_\circ)$، رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت $f(x_\circ+h)-f(x_\circ) = L(x_\circ+h)-L(x_\circ)+\alpha(h)h$ نیز بیان کرد. به این ترتیب

اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد نگاشت خطی $Df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $Df(h) := L(x_\circ + h) - L(x_\circ) = Ah$ نسبت به متغیر h، نمو تابع f یعنی $\Delta f(h) := f(x_\circ + h) - f(x_\circ)$ را با خطای $\alpha(h)h$ تقریب می‌زند:

$$\Delta f(h) = Df(h) + \alpha(h)h$$



شکل ۴ــ۳ تقریب خطی به کمک خط و صفحه‌ی مماس برای توابع یک و دو متغیره.

برای توابع دو متغیره به جای خط مماس باید از صفحه‌ی مماس استفاده کنیم. از تعبیر هندسی مشتقات جزئی f در $(x_\circ, y_\circ)$ به یاد داریم که مقطع نمودار تابع دو متغیره‌ی $z = f(x,y)$ و صفحه‌ی $y = y_\circ$ خمی مانند C_1 با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}_1(x) = x\mathbf{i} + y_\circ\mathbf{j} + f(x, y_\circ)\mathbf{k}$ است و $\mathbf{r}_1'(x_\circ) = \mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{k}$. به همین ترتیب مقطع نمودار این تابع و صفحه‌ی $x = x_\circ$ خمی مانند C_2 با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}_2(y) = x_\circ\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x_\circ, y)\mathbf{k}$ است و $\mathbf{r}_2'(y_\circ) = \mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{k}$. بردارهای $\mathbf{r}_1'(x_\circ)$ و $\mathbf{r}_2'(y_\circ)$ به ترتیب بردار هادی خط‌های مماس بر C_1 و C_2 هستند. در نتیجه هر دو در صفحه‌ی مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $P_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ (در صورت وجود) قرار دارند (شکل ۴ــ۳). بنابر این بردار نرمال این صفحه عبارت است از $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1'(y_\circ) \times \mathbf{r}_2'(x_\circ) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. پس معادله‌ی صفحه‌ی مماس در این نقطه عبارت است از:

$$\pi : \quad -\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ) + (z - z_\circ) = \circ$$

که به صورت زیر هم قابل بیان است:

$$\pi(x,y) = z_\circ + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ)$$

به این ترتیب برای $A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$ و $B := \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)$، صفحه‌ی مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ همان نمودار تابع π با ضابطه‌ی زیر است:

$$\pi(x,y) = z_\circ + A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ)$$

برای توابع دو متغیره، دو متغیر x و y و در نتیجه دو نمو $\Delta x := x - x_\circ = h$ و $\Delta y := y - y_\circ = k$ مطرح هستند. بنابر این بر اساس رابطه‌ی (۱)، مشتق یک تابع دو متغیره‌ی f در $(x_\circ, y_\circ)$ باید به کمک صفحه‌ی مماس تعریف شود. در این حالت نگاشت خطی $Df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $Df(h,k) := \pi(x,y) - \pi(x_\circ, y_\circ) = Ah + Bk$ با دو متغیر h و k، نمو تابع f یعنی $\Delta f(h,k) := f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ)$ را با خطای $E(h,k) = \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k$ تقریب می‌زند:

$$\Delta f(h,k) = Df(h,k) + E(h,k)$$

بر اساس ایده‌ی فوق، مشتق تابع دو متغیره‌ی f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد.

تابع دو متغیره‌ی f را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر گوییم هرگاه اعداد حقیقی A و B و توابع $\alpha(h,k)$ و $\beta(h,k)$ وجود داشته باشند که

$$f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ) = Ah + Bk + \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k \qquad (۳)$$

و
$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \alpha(h,k) = \circ \quad , \quad \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \beta(h,k) = \circ$$

اکنون نشان می‌دهیم که از مشتق‌پذیری f در یک نقطه، وجود مشتقات جزئی و پیوستگی f در آن نقطه نتیجه می‌شوند. خواهیم دید که مشتقات سوئی هم در این حالت در سوی دلخواه وجود خواهند داشت.

فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی f در $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد، یعنی اعداد حقیقی A و B و توابع $\alpha(h,k)$ و $\beta(h,k)$ وجود دارند که:

$$f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ) = Ah + Bk + \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k\ ,$$
$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \alpha(h,k) = \circ \quad , \quad \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \beta(h,k) = \circ$$

برای $\Delta f = f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ)$ داریم

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \Delta f = \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \Big[Ah + Bk + \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k\Big] = \circ$$

پس $\lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} (f(x,y) - f(x_\circ, y_\circ)) = \circ$، یعنی $\lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y) = f(x_\circ, y_\circ)$. بنابر این f در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته است.

از رابطه‌ی (۳) به ازای $k=0$ نتیجه می‌شود

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=Ah+\alpha(h,0)\,h$$

که معادل است با

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=A+\alpha(h,0)$$

بنابر این

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(A+\alpha(h,0))=A$$

به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=A$. به نحو مشابه داریم $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=B$.

آنچه گفتیم در قضیه‌ی زیر خلاصه شده است:

قضیه ۳-۳-۱ اگر تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در نقطه‌ی (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است و مشتقات جزئی آن در این نقطه، یعنی $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ وجود دارند.

به این ترتیب تابع دو متغیره‌ی f در نقطه‌ی (x_0,y_0) مشتق‌پذیر است هرگاه توابع $\alpha(h,k)$ و $\beta(h,k)$ وجود داشته باشند که

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+\alpha(h,k)\,h+\beta(h,k)k \quad (۴)$$

و

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\alpha(h,k)=0\quad,\quad\lim_{(h,k)\to(0,0)}\beta(h,k)=0$$

برای سادگی قرار می‌دهیم $E(h,k)=\alpha(h,k)\,h+\beta(h,k)k$ و رابطه‌ی (۴) را به صورت زیر هم بیان می‌کنیم:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+E(h,k) \quad (۵)$$

با توجه به این رابطه، **مشتق (دیفرانسیل) کل** تابع مشتق‌پذیر دو متغیره‌ی f در $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Df|_{\mathbf{x}_0}(h,k):=\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)k$$

برخی از مولفین مشتق تابع f را به شکل دیگری بیان می‌کنند. دانشجویان علاقمند می‌توانند معادل بودن این دو رهیافت را در پیوست ۱ مشاهده کنند. بنابر رهیافت دوم، مشتق تابع دو متغیره‌ی f در $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$ برای $\mathbf{x}=(h,k)$ عبارت است از:

$$Df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{||\mathbf{x}||}$$

در ادامه‌ی بحث رابطه‌ی بین مشتق سوئی و مشتقات جزئی را برای توابع مشتق‌پذیر بیان می‌کنیم. برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$، از رابطه‌ی (۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x_\circ + ha, y_\circ + hb) - f(x_\circ, y_\circ) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)ha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)hb + \alpha(h,k)\ ah + \beta(h,k)bh \\ &= h\left[a\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) + \alpha(h,k)a + \beta(h,k)b\right] \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\frac{f(x_\circ + ha, y_\circ + hb) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)b + \big(\alpha(h,h)a + \beta(h,h)b\big)$$

اکنون با توجه به این که $\lim\limits_{h\to\circ} \alpha(h,h) = \lim\limits_{h\to\circ} \beta(h,h) = \circ$، اگر $h \to \circ$ آنگاه

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ + ha, y_\circ + hb) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)$$

آنچه گفته شد برای توابع حقیقی دو متغیره در قضیه‌ی زیر خلاصه می‌شود. این قضیه به نحو مشابه قابل تعمیم به توابع حقیقی چند متغیره‌ی دلخواه است.

قضیه ۳-۳-۲ اگر تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در یک همسایگی از نقطه‌ی $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ تعریف شده و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$، مشتق سوئی در سوی $\mathbf{u}$ و مشتقات جزئی f در $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ وجود دارند و

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = af_x(x_\circ, y_\circ) + bf_y(x_\circ, y_\circ)$$

با چند مثال، مفهوم مشتق کل توابع دو و سه متغیره را با تفضیل بیشتر بیان می‌کنیم.

مثال ۳-۳-۳ برای توابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x + e^y$ و $g : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y,z) = e^{xy}\sin(xz^۲)$ مشتق کل را به ترتیب در نقاط $\mathbf{x}_\circ = (۱, \ln ۲)$ و $\mathbf{x}_\circ = (۱, \ln ۳, \sqrt{\frac{\pi}{۲}})$ به دست می‌آوریم.

برای تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x + e^y$ مشتق کل در $\mathbf{x}_\circ = (۱, \ln ۲)$ عبارت است از:

$$Df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)x + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)y = x + ۲y$$

معادله‌ی فوق را می‌توان به شکل حاصل ضرب ماتریسی هم بیان کرد:

$$Df(x,y) = (۱ \quad ۲)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + ۲y$$

برای تابع $g : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y,z) = e^{xy}\sin(xz^۲)$ داریم

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = ye^{xy}\sin(xz^۲) + z^۲e^{xy}\cos(xz^۲)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = xe^{xy}\sin(xz^۲)$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = ۲xze^{xy}\sin(xz^۲)$$

پس مشتق کل در $\mathbf{x}_\circ = (۱, \ln ۳, \sqrt{\frac{\pi}{۲}})$ به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} Dg(x,y,z) &= \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)\ x + \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)\ y + \frac{\partial g}{\partial z}(\mathbf{x}_\circ)\ z \\ &= ۳\ln ۳ x + ۳y + ۶z \end{aligned}$$

معادله‌ی فوق را می‌توان به شکل حاصل ضرب ماتریسی هم بیان کرد:

$$Dg(x,y,z) = (۳\ln ۳ \quad ۳ \quad ۶)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

مثال ۳-۳-۴ تابع دو متغیره‌ی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲(x+y)}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (\circ,\circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ,\circ) \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که تابع f در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر است.

$$\begin{aligned} f(\circ+h, \circ+k) - f(\circ,\circ) &= \frac{h^۳(h+k)}{h^۲+k^۲} \\ &= (\frac{h^۳}{h^۲+k^۲})h + (\frac{h^۳}{h^۲+k^۲})k \end{aligned}$$

بنابر این به ازای $A = B = \circ$ و $\beta(h,k) = \alpha(h,k) = \dfrac{h^۳}{h^۲+k^۲}$ داریم

$$\begin{aligned} |\beta(h,k) - \circ| = |\alpha(h,k) - \circ| &= \frac{h^۲}{h^۲+k^۲}|h| \\ &\leq |h| \\ &\leq \sqrt{h^۲+k^۲} \end{aligned}$$

یعنی $\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \alpha(h,k) = \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \beta(h,k) = \circ$. بنابراین تابع f در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر است.

مثال ۳-۳-۵ نشان می‌دهیم که تابع سه متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xyz - z^۲$ در نقطه‌ی $(۰,۱,۲) \in \mathbb{R}^۳$ مشتق‌پذیر است و مشتق کل آن را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x,۱+y,۲+z) - f(۰,۱,۲) &= x(۱+y)(۲+z) - (۲+z)^۲ + ۴ \\ &= ۲x + ۰y - ۴z + (۲y + z + yz)x + ۰y + (-z)(z) \end{aligned}$$

بنابر این برای $C = -۴$، $B = ۰$، $A = ۲$، $\alpha(x,y,z) = ۲y + z + yz$، $\beta(x,y,z) = ۰$ و $\gamma(x,y,z) = -z$ داریم:

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \alpha(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \beta(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \alpha(x,y,z) = ۰$$

پس طبق تعریف، تابع f در نقطه‌ی $(۰,۱,۲)$ مشتق‌پذیر است. علاوه بر این

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۱,۲) = ۲\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۱,۲) = ۰\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(۰,۱,۲) = -۴$$

پس در نقطه‌ی $(۰,۱,۲)$، مشتق کل Df به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$Df(x,y,z) = ۲x - ۴z$$

در ادامه نشان می‌دهیم که اگر مشتقات جزئی یک تابع حقیقی f در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ وجود داشته و در این نقطه پیوسته باشند آنگاه این تابع در $(x_۰,y_۰)$ مشتق‌پذیر است. مانند قبل بحث را برای توابع حقیقی دو متغیره مطرح می‌کنیم. پس فرض کنیم f یک تابع حقیقی دو متغیره باشد که f_x و f_y در $(x_۰,y_۰)$ پیوسته هستند. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اعداد $۱ > \theta_۱ > ۰$ و $۱ > \theta_۲ > ۰$ وجود دارند به قسمی که:

$$\begin{aligned} &f_x(x_۰+h, y_۰+k) - f(x_۰, y_۰+k) = hf_x(x_۰+\theta_۱ h, y_۰+k)\ , \\ &f_y(x_۰, y_۰+k) - f(x_۰, y_۰+k) = kf_y(x_۰, y_۰+\theta_۲ k) \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\alpha(h,k) = f_x(x_۰+\theta_۱ h, y_۰+k) - f_x(x_۰,y_۰)\ , \\ &\beta(h,k) = f_y(x_۰, y_۰+\theta_۲ k) - f_y(x_۰,y_۰)\ , \\ &\Delta f = f(x_۰+h, y_۰+k) - f(x_۰,y_۰) \end{aligned}$$

بنابر پیوستگی f_x و f_y در $(x_۰,y_۰)$ داریم $\lim_{(h,k)\to ۰} \alpha(h,k) = \lim_{(h,k)\to ۰} \beta(h,k) = ۰$ و

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Big[f(x_۰+h, y_۰+k) - f(x_۰, y_۰+k)\Big] + \Big[f(x_۰, y_۰+k) - f(x_۰,y_۰)\Big] \\ &= hf_x(x_۰+\theta_۱ h, y_۰+k) + kf_y(x_۰, y_۰+\theta_۲ k) \\ &= hf_x(x_۰,y_۰) + kf_y(x_۰,y_۰) + h\alpha(h,k) + k\beta(h,k) \end{aligned}$$

به عبارت دیگر نشان دادیم که:

قضیه ۳-۳-۶ اگر مشتقات جزئی تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ وجود داشته و پیوسته باشند آنگاه f در $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر است.

یکی از نتایج این قضیه اثبات مشتق‌پذیری چندجمله‌ای‌های دومتغیره‌ی $P(x,y) = \sum_{i=\circ}^{n}\sum_{j=\circ}^{m} a_{ij}x^iy^j$ برای $a_{ij} \in \mathbb{R}$ بر تمام $\mathbb{R}^۲$ است.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نیست. به عبارت دیگر، برای مشتق‌پذیری در یک نقطه لزومی ندارد f_x و f_y در آن نقطه پیوسته باشند.

مثال ۳-۳-۷ تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^۲ + y^۲)\sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

الف) نشان می‌دهیم تابع f در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ مشتق‌پذیر است.
ب) نشان می‌دهیم توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در این نقطه پیوسته نیستند.

الف) برای (x,y) در یک همسایگی نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ داریم

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(\circ,\circ) &= (x^۲ + y^۲)\ \sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \\ &= \circ x + \circ y + (x\ \sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}})x + (y\ \sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}})y \end{aligned}$$

به ازای $A = B = \circ$، $\alpha(x,y) = x\sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ و $\beta(x,y) = y\sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ داریم

$$|\alpha(x,y)| \leq \sqrt{x^۲+y^۲} \quad , \quad |\beta(x,y)| \leq \sqrt{x^۲+y^۲}$$

بنابر این

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \beta(x,y) = \circ$$

پس تابع f در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ مشتق‌پذیر است.

ب) مشاهده می‌شود که

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} ۲x\sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} - x(x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}\cos \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

روی مسیر به معادلات $x = t \ , \ y = \circ$ داریم

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to\circ} \frac{\partial f}{\partial x}(t,\circ) = \lim_{t\to\circ} (2t \sin \frac{1}{|t|} - \frac{t}{|t|} \cos \frac{1}{|t|})$$

چون حد فوق وجود ندارد، تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ حد ندارد و در نتیجه پیوسته نیست. به شکل مشابه، می‌توان نشان داد، تابع $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست.

در چند مثال بعد توابع مختلفی مطرح می‌شوند که مشتق‌پذیر نیستند.

مثال ۳-۳-۸ نشان می‌دهیم که هیچ یک از توابع زیر در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر نیستند.

الف) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

ب) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$.

ج) $f(x,y) = \begin{cases} y + x \sin \frac{1}{x} & (x,y) \neq (\circ,\circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ,\circ) \end{cases}$

الف) چون تابع f درنقطه‌ی $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست (چرا؟)، مشتق‌پذیر هم نیست.

ب)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ) &= \lim_{h\to\circ} \frac{f(h,\circ) - f(\circ,\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ} \frac{h - \circ}{h} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ) &= \lim_{h\to\circ} \frac{f(\circ,h) - f(\circ,\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ} \frac{-h - \circ}{h} = -1 \end{aligned}$$

فرض کنیم f در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر باشد، یعنی α و β وجود داشته باشند که

$$f(x,y) - f(\circ,\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)x + \frac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ)y + \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y$$

پس α و β وجود دارند که

$$\sqrt[3]{x^3 - y^3} = x - y + \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y$$

و $\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \beta(x,y) = \circ$.

به ویژه روی مسیر به معادله‌ی $x = t \ , \ y = 2t$ داریم

$$\sqrt[3]{t^3 - (2t)^3} = t - 2t + \alpha(t,2t)t + \beta(t,2t)2t$$

یعنی

$$\sqrt[3]{7}\ t = t - \alpha(t,2t)\ t - \beta(t,2t)\ 2t$$

که با تقسیم دو طرف بر t معادل است با

$$1-\sqrt[3]{7}=\alpha(t,2t)+2\beta(t,2t)$$

اما این غیر ممکن است زیرا از $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\beta(x,y)=0$ نتیجه می‌شود $\lim_{t\to 0}\Big(\alpha(t,2t)+2\beta(t,2t)\Big)=0$.

ج) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

اما $\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$ وجود ندارد و در نتیجه f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

یکی روش دیگر برای اثبات عدم مشتق‌پذیری استفاده از قضیه‌ی ۳-۳-۲ است. به عبارت دیگر اگر برای نقطه‌ی $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$، بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ را به قسمی بیابیم که در تساوی $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)=f_x(x,y)a+f_y(x,y)\ b$ صدق نکند آنگاه تابع f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۳-۳-۹ نشان می‌دهیم که تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

پیش از این مشاهده کردیم که $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$. فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد. برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ می‌توان نوشت:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{(ta)^3-(tb)^3}}{t}=\sqrt[3]{a^3-b^3}$$

بنابر این طبق قضیه‌ی ۳-۳-۲ برای بردار یکه‌ی دلخواه $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ باید داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{a^3-b^3}=D_{\mathbf{u}}f(0,0)=f_x(0,0)a+f_y(0,0)\ b=a-b$$

اما این تساوی در حالت کلی برقرار نیست (برای مثال به ازای $a=-b=\frac{\sqrt{2}}{2}$).

مثال ۳-۳-۱۰ تابع دومتغیره‌ی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نشان می‌دهیم f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

بنابر مثال ۳-۲-۲ به ازای $a=-b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ داریم:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=a^3+b^3\neq a+b=f_x(0,0)a+f_y(0,0)\ b$$

پس تابع f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

در مثال بعد یکی دیگر از کاربردهای مشتق کل برای تقریب زدن یک عبارت عددی مطرح شده است. ایده‌ی اصلی در این مثال، استفاده از مشتق کل توابع حقیقی دو متغیره است. تعمیم این روش به کمک بسط تیلور مراتب بالاتر در پیوست ۱ مطرح شده است. خواهیم دید که با این روش می‌توان رده‌ی گسترده‌ای از عبارت‌های جبری را با دقت دلخواه محاسبه کرد. همچنین نشان می‌دهیم که به کمک بسط تیلور و با به دست آوردن کران مناسبی برای خطا، می‌توان با کنترل خطای اندازه‌گیری داده‌ها، به محاسبه‌ی مقدار تقریبی یک عبارت جبری با خطای مورد نظر دست یافت. این مطلب در محاسبات کاربردی در رشته‌های فنی و مهندسی از اهمیت زیادی دارد.

مثال ۳–۳–۱۱ با استفاده از مشتق یک تابع حقیقی دو متغیره‌ی مناسب مقدار تقریبی $\sqrt{(۱/۰۶)^۲ + (۱/۹۷)^۳}$ را به دست آورید.

قرار می‌دهیم $f(x,y) = \sqrt{x^۲ + y^۳}$. در این صورت $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۳}}$ و $f_y(x,y) = \dfrac{۳y^۲}{۲\sqrt{x^۲ + y^۳}}$. چون مشتقات جزئی f در $(۱,۲)$ پیوسته هستند (چرا؟)، بنابر قضیه‌ی ۳–۳–۶ تابع f در $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است. به این ترتیب به ازای $\Delta x = ۰/۰۶$ و $\Delta y = -۰/۰۳$،

$$\begin{aligned}\sqrt{(۱/۰۶)^۲ + (۱/۹۷)^۳} &= f(۱ + \Delta x, ۲ + \Delta y)\\ &\approx f(۱,۲) + f_x(۱,۲)\Delta x + f_y(۱,۲)\Delta y\\ &= ۳ + \frac{۱}{۳}(۰/۰۶) + ۲(-۰/۰۳) = ۲/۹۶\end{aligned}$$

۳–۴ قاعده‌ی زنجیره‌ای

قاعده‌ی زنجیره‌ای برای محاسبه‌ی مشتق ترکیب توابع به کار می‌رود. شکل کلی این قضیه کمی پیچیده است و برای درک عمیق‌تر آن دانشجو باید به مفاهیم پایه‌ی جبر خطی نظیر نگاشت‌های خطی تسلط نسبی داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که اگر تابع یک متغیره‌ی $x = x(t)$ در $t_۰$ و تابع یک متغیره‌ی $y = f(x)$ در $x(t_۰)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع $y = g(t) = f(x(t))$ در $t_۰$ مشتق پذیر است و داریم

$$g'(t_۰) = x'(t_۰)\ f'(x(t_۰))$$

در این بخش تعمیم قاعده‌ی زنجیره‌ای را در چند حالت خاص بررسی می‌کنیم.

ابتدا فرض کنیم توابع یک متغیره‌ی حقیقی $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در $t_\circ$ و تابع دو متغیره‌ی حقیقی f با ضابطه‌ی $z = f(x,y)$ در $\mathbf{x}_\circ = (x(t_\circ), y(t_\circ))$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع یک متغیره‌ی حقیقی h با ضابطه‌ی $z = h(t) = f(x(t), y(t))$ ترکیب توابع f با ضابطه‌ی $z = f(x,y)$ و تابع برداری g با ضابطه‌ی $g(t) = (x(t), y(t))$ است، یعنی $h = f \circ g$. در این صورت برای $x_\circ = x(t_\circ)$، $y_\circ = y(t_\circ)$، $\Delta x = x(t_\circ + \Delta t) - x(t_\circ)$ و $\Delta y = y(t_\circ + \Delta t) - y(t_\circ)$ داریم

$$\begin{aligned} h(t_\circ + \Delta t) - h(t_\circ) &= f(x(t_\circ + \Delta t), y(t_\circ + \Delta t)) - f(x(t_\circ), y(t_\circ)) \\ &= f(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - f(x_\circ, y_\circ) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\frac{h(t_\circ + \Delta t) - h(t_\circ)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

اکنون با توجه به روابط

$$\lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \circ} \frac{x(t_\circ + t) - x(t_\circ)}{\Delta t} = x'(t_\circ),$$

$$\lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \circ} \frac{y(t_\circ + t) - y(t_\circ)}{\Delta t} = y'(t_\circ),$$

$$\lim_{t \to \circ} \Delta x = \lim_{t \to \circ} \big(x(t_\circ + t) - x(t_\circ)\big) = \circ, \ \lim_{\Delta t \to \circ} \Delta y = \lim_{\Delta t \to \circ} \big(y(t_\circ + t) - y(t_\circ)\big) = \circ$$

و $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ,\circ)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ,\circ)} \beta(\Delta x, \Delta y) = \circ$، اگر $t \to \circ$ آنگاه

$$h'(t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ x'(t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ y'(t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}$$

این رابطه را به شکل حاصل ضرب ماتریسی هم می‌توان بیان کرد. با این شکل تعمیم قاعده‌ی زنجیره‌ای ساده‌تر خواهد شد.

$$h'(t_\circ) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Big)\begin{pmatrix} x'(t_\circ) \\ y'(t_\circ) \end{pmatrix}$$

اکنون می‌توانیم مشتق ترکیب توابع پیچیده‌تر را به دست آوریم. فرض کنیم توابع یک متغیره‌ی حقیقی $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ در $t_\circ$ و تابع حقیقی سه متغیره‌ی

f با ضابطه‌ی $w = f(x,y,z)$ در $\mathbf{x}_\circ = (x(t_\circ), y(t_\circ), z(t_\circ))$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع یک متغیره‌ی حقیقی $w = h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ ترکیب تابع f و g با ضابطه‌ی $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ است. شبیه به آنچه پیش از این گفته شد داریم

$$h'(t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)\ x'(t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)\ y'(t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_\circ)\ z'(t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\ \frac{dz}{dt}$$

این رابطه به شکل حاصل ضرب ماتریسی زیر هم بیان می‌شود.

$$h'(t_\circ) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\Big) \begin{pmatrix} x'(t_\circ) \\ y'(t_\circ) \\ z'(t_\circ) \end{pmatrix}$$

حال فرض کنیم توابع دو متغیره‌ی حقیقی $x = x(s,t)$ و $y = y(s,t)$ در $(s_\circ, t_\circ)$ و $z = f(x,y)$ در $(x(s_\circ, t_\circ), y(s_\circ, t_\circ))$ مشتق‌پذیر باشند. تابع h با ضابطه‌ی $z = h(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ ترکیب تابع f و تابع $\mathbf{g}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{g}(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$ است. فرض کنیم $x_\circ = x(s_\circ, t_\circ)$، $y_\circ = y(s_\circ, t_\circ)$ و $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$. بنابر آنچه گفته شد برای توابع حقیقی $x = x(s,t)$ و $y = y(s,t)$ داریم

$$Dh(s_\circ, t_\circ) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Big) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) & \frac{\partial x}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) \end{pmatrix}$$

به این ترتیب:

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_\circ, t_\circ)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial t}(s_\circ, t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t}$$

د) فرض کنیم توابع دومتغیره‌ی حقیقی x با ضابطه‌ی $x = x(s,t)$ ، y با ضابطه‌ی $y = y(s,t)$ و z با ضابطه‌ی $z = z(s,t)$ در $(s_\circ, t_\circ)$ و تابع سه متغیره‌ی حقیقی f با ضابطه‌ی $w = f(x,y,z)$ در $\mathbf{x}_\circ = \big(x(s_\circ,t_\circ), y(s_\circ,t_\circ), z(s_\circ,t_\circ)\big)$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع $g : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $w = g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ در $(s_\circ, t_\circ)$ مشتق‌پذیر است و شبیه به قسمت قبل:

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s_\circ,t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial s}(s_\circ,t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_\circ,t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial z}{\partial s}(s_\circ,t_\circ)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s_\circ,t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial t}(s_\circ,t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial t}(s_\circ,t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial z}{\partial t}(s_\circ,t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial t}$$

بیان ماتریسی این حالت را به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

مثال ۳-۴-۱ الف) فرض کنیم $z = \ln(\frac{x}{y} + y)$، $x = \ln t$ و $y = e^t$. مشتق تابع با ضابطه‌ی $z(t) = f(x(t), y(t))$ را به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه می‌کنیم.

ب) فرض کنیم $w = \dfrac{۱}{xyz}$، $x = s + \tan^{-۱} t$، $y = \dfrac{۴}{۳s + t}$ و $z = \cos(\pi st)$. مقادیر $\dfrac{\partial w}{\partial s}(۱,۱)$ و $\dfrac{\partial w}{\partial t}(۱,۱)$ را به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه می‌کنیم.

الف) با توجه با این که

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{۱}{x + y^۲}, \quad \frac{dx}{dt}(t) = \frac{۱}{t}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{-x + y^۲}{xy + y^۳}, \quad \frac{dy}{dt}(t) = e^t$$

با جایگذاری $x = \ln t$ و $y = e^t$ داریم:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial z}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)\ \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)\ \frac{dy}{dt}(t) \\ &= \frac{۱}{\ln t + e^{۲t}}\ \frac{۱}{t} + \frac{-\ln t + e^{۲t}}{e^t \ln t + e^{۳t}}\ e^t \end{aligned}$$

ب) با توجه به این که:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{۱}{x^۲ yz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{۱}{xy^۲ z}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{۱}{xyz^۲},$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t)=۱,\ \ \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)=-\frac{۱۲}{(۳s+t)^{۲}},\ \ \frac{\partial z}{\partial s}(s,t)=-\pi t\sin(\pi st)$$

و

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t)=\frac{۱}{۱+t^{۲}},\ \ \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)=-\frac{۴}{(۳s+t)^{۲}},\ \ \frac{\partial z}{\partial t}(s,t)=-\pi s\sin(\pi st)$$

داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x(۱,۱),y(۱,۱),z(۱,۱))=\frac{\partial w}{\partial y}(۱+\frac{\pi}{۴},۱,-۱)=\frac{۱۶}{(\pi+۱۶)^{۲}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x(۱,۱),y(۱,۱),z(۱,۱))=\frac{\partial w}{\partial x}(۱+\frac{\pi}{۴},۱,-۱)=\frac{۴}{\pi+۴},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(x(۱,۱),y(۱,۱),z(۱,۱))=\frac{\partial w}{\partial x}(۱+\frac{\pi}{۴},۱,-۱)=-\frac{۴}{\pi+۴},$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}(۱,۱)=۱,\ \ \frac{\partial y}{\partial s}(۱,۱)=-\frac{۳}{۴},\ \ \frac{\partial z}{\partial s}(۱,۱)=۰,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(۱,۱)=\frac{۱}{۲},\ \ \frac{\partial y}{\partial t}(۱,۱)=-\frac{۱}{۴},\ \ \frac{\partial z}{\partial t}(۱,۱)=۰$$

پس

$$\frac{\partial w}{\partial s}(۱,۱)=\frac{۱۶}{(\pi+۱۶)^{۲}}-\frac{۳}{\pi+۴},\quad \frac{\partial w}{\partial t}(۱,۱)=\frac{۱۶}{(\pi+۱۶)^{۲}}-\frac{۱}{۴(\pi+۴)}$$

مثال ۳-۴-۲ الف) تابع دو متغیره‌ی حقیقی f را همگن از درجه‌ی k می‌نامیم هرگاه

$$\forall\ t\in\mathbb{R},\ \ \forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^{۲},\quad f(tx,ty)=t^{k}f(x,y)$$

به عنوان مثال تابع $f(x,y)=x^{۴}+x^{۳}y+y^{۴}$ همگن از درجه‌ی ۴ و تابع $f(x,y)=\sin(\frac{xy}{x^{۲}+y^{۲}})$ همگن از درجه‌ی صفر است.

برای چنین توابعی نشان دهید به شرط مشتق پذیری f، رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود.

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=kf(x,y)$$

ب) برای تابع با ضابطه‌ی $f(x,y)=\tan^{-۱}\left(\frac{y^{۴}x-x^{۲}y^{۳}}{x^{۵}+y^{۵}}\right)$ مقدار $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

الف) فرض کنیم (x,y) نقطه‌ای ثابت و دلخواه در $\mathbb{R}^{۲}$ باشد. قرار می‌دهیم

$$x(t)=tx\ ,\ y(t)=ty\ ,\ g(t)=f(x(t),y(t))=f(tx,ty)$$

بنا بر قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\ x+\frac{\partial f}{\partial t}(tx,ty)\ y$$

از سوی دیگر چون f همگن است، $g(t) = t^k f(x,y)$. پس $g'(t) = kt^{k-1} f(x,y)$.
به این ترتیب

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\ x + \frac{\partial f}{\partial t}(tx,ty)\ y = g'(t) = kt^{k-1} f(x,y)$$

به ویژه برای $t = 1$ داریم

$$x\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y)$$

ب) مشاهده می‌شود که f تابعی همگن از درجه صفر است. پس بنابر قسمت قبل، $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y^4 x - x^2 y^3}{x^5 + y^5}\right)$.

مثال ۳-۴-۳ برای $f(x,y,z) = x^3 + yz^2$، $x = ue^v$، $y = u^2 + v$، $z = uv$ و $w = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. مطلوب است $\frac{\partial w}{\partial u}$ و $\frac{\partial w}{\partial v}$.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

از سوی دیگر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\ ,\ \frac{\partial x}{\partial u} = e^v\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = z^2\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u} = 2u\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u} = v$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u}(u,v) &= 3(ue^v)^2\ (e^v) + (uv)^2\ (2u) + 2(u^2+v)\ (uv)\ (v)\\ &= 3u^2e^{3v} + 4u^3v^2 + 2uv^3\end{aligned}$$

به نحو مشابه $\frac{\partial w}{\partial v}(u,v) = 3u^3e^{3v} + 3u^2v^2 + 2u^4v$.

مثال ۳-۴-۴ فرض کنیم f یک تابع حقیقی یک متغیره‌ی مشتق‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم تابع $z = z(x,y) = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

با فرض $u = u(x,y) = bx - ay$ داریم $z = z(x,y) = f(u(x,y))$. پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,y)) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)b$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}f(u(x,y)) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)(-a)$$

بنابر این

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = abf'(u) - abf'(u) = 0$$

مثال ۳-۴-۵ فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر با مشتق غیر صفر است و z تابعی مشتق‌پذیر از x و y که در معادله‌ی $f(cx-az\ ,\ cy-bz)=0$ صدق می‌کند(a,b,c اعداد حقیقی ثابت هستند) نشان دهید $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

با فرض $u=u(x,y)=cx-a\ z(x,y)$ و $v=v(x,y)=cy-b\ z(x,y)$ داریم

$$w=w(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))=0$$

پس

$$0=\frac{\partial w}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}\quad ,\quad 0=\frac{\partial w}{\partial y}=f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}$$

بنابر این

$$f_u(c-a\frac{\partial z}{\partial x})+f_v(-b\frac{\partial z}{\partial x})=0\ \ ,\ \ f_u(-a\frac{\partial z}{\partial y})+f_v(c-b\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

از این که f تابعی مشتق‌پذیر با مشتق غیر صفر است نتیجه می‌شود f_u و f_v هر دو صفر نیستند. پس $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{cf_u}{af_u+bf_v}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{cf_v}{af_u+bf_v}$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y} &= a\frac{cf_u}{af_u+bf_v}+b\frac{cf_v}{af_u+bf_v}\\
&= c(\frac{af_u}{af_u+bf_v}+\frac{bf_v}{af_u+bf_v})\\
&= c\frac{af_u+bf_v}{af_u+bf_v}=c
\end{aligned}$$

مثال ۳-۴-۶ فرض کنیم $z=z(x,y)$ تابعی از دو متغیر x,y باشد که در معادله‌ی $f(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ صدق می‌کند و f یک تابع حقیقی دو متغیره مشتق‌پذیر است. نشان دهید $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

با فرض $u=u(x,y)=x+\dfrac{z(x,y)}{y}$ و $v=v(x,y)=y+\dfrac{z(x,y)}{x}$ داریم

$$w=w(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))=0$$

پس

$$0=\frac{\partial w}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$0=\frac{\partial w}{\partial y}=f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}$$

بنابر این

$$(۱ + \frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial x})f_u + (\frac{۱}{x^۲}(x\frac{\partial z}{\partial x} - z))f_v = ۰$$
$$(\frac{۱}{y^۲}(y\frac{\partial z}{\partial y} - z))f_u + (۱ + \frac{۱}{x}\frac{\partial z}{\partial y})f_v = ۰$$

با ضرب معادله‌ی اول در $x^۲y$ و معادله‌ی دوم در $xy^۲$ نتیجه می‌شود

$$(x^۲y + x^۲\frac{\partial z}{\partial x})f_u + (xy\frac{\partial z}{\partial x} - zy)f_v = ۰$$
$$(xy\frac{\partial z}{\partial y} - zx))f_u + (xy^۲ + y^۲\frac{\partial z}{\partial y})f_v = ۰$$

از این که f تابعی مشتق‌پذیر است، با فاکتورگیری و حل این دو معادله بر حسب $x\frac{\partial z}{\partial x}$ و $y\frac{\partial z}{\partial y}$ داریم

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^۲yf_u + yzf_v}{xf_u - yf_v} \quad , \quad y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzf_u + xy^۲f_v}{xf_u - yf_v}$$

پس

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (z - xy)\frac{xf_u - yf_v}{xf_u - yf_v} = z - xy$$

۳–۵ مشتق تابع ضمنی

یکی از کاربردهای قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه‌ی مشتق تابع ضمنی است. فرض کنیم f یک تابع حقیقی دو متغیره باشد. در برخی از موارد معادله‌ی $f(x,y) = ۰$ به گونه‌ای است که می‌توان یکی از متغیرها را به عنوان تابعی از متغیر دیگر در نظر گرفت. برای مثال معادله‌ی $xy^۳ + ۲x - ۱ = ۰$ را هم می‌توان به صورت $y = \sqrt[۳]{\frac{۱}{x} - ۲}$ و هم به صورت $x = \frac{۱}{۲ + y^۳}$ بیان کرد. به این ترتیب می‌توان هم y را تابعی از متغیر x و هم x را تابعی از متغیر y در نظر گرفت. در بیشتر موارد ضابطه‌ی معادله به گونه‌ای است که نمی‌توان مانند این مثال ضابطه‌ی صریحی برای y بر حسب x یا به عکس مشخص کرد. برای مثال معادله‌ی $x^۷ + x^۳y^۷ - ۳x^۵y^۵ + xy + ۱ = ۰$ بر حسب x یا y به عنوان یک عبارت جبری با ضرایب حقیقی قابل بیان نیست. با این وجود در پیوست ۱ ثابت می‌شود که اگر مشتقات جزئی f پیوسته و دست کم یکی از آنها مثلاً $f_y(x_۰,y_۰)$ غیر صفر باشد آنگاه در یک فاصله‌ی باز I شامل $x_۰$، تابع مشتق‌پذیر $y = y(x)$ وجود دارد به قسمی که برای هر x در I داریم $f(x,y(x)) = ۰$. تابع $y(x)$ را **تابع ضمنی** مشخص شده توسط معادله‌ی $f(x,y) = ۰$ می‌نامیم. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای برای تابع ثابت

$g(x) = f(x, y(x)) = 0$ و برای x در I داریم

$$0 = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y\frac{dy}{dx}$$

بنابر این

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

یا به شکل دقیق‌تر برای x در I:

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

مثال ۳–۵–۱ فرض کنیم در معادله‌ی $y^5 + x^3y + x = 0$، مقدار y را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از متغیر x در نظر بگیریم. می‌خواهیم $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنیم.

برای $f(x, y) = y^5 + x^3y + x = 0$ می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2y + 1}{5y^4 + x^3}$$

در حالت کلی‌تر اگر z به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x, y, z) = 0$ به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر x و y باشد، یعنی ضابطه‌ی $z = z(x, y)$ به صورت صریح مشخص نباشد، برای تابع $w = w(x, y) = f(x, y, z(x, y)) = 0$ داریم

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = f_x + f_z\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = f_y + f_z\frac{\partial z}{\partial y}$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} \tag{۶}$$

به شکل مشابه اگر y یا x به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x, y, z) = 0$ به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر دیگر داده شوند، معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x}\ ,\quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x}\qquad ,\qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}\ ,\quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y} \tag{۷}$$

مثال ۳–۵–۲ فرض کنیم $z = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

برای $f(x,y,z)=\ln(x^{2}+y^{2}+z^{2})-z=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z} \quad , \quad f_x=\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+z^{2}} \quad , \quad f_z=\frac{2z}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}-1$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+z^{2}-2z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^{2}+y^{2}+z^{2}-2z}$$

مثال ۳-۵-۳ فرض کنیم در معادله‌ی $f(x,y,z)=0$، هر یک از مقادیر z، y و x را بتوان به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر دیگر در نظر گرفت. نشان دهید:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)=-1$$

بنابر معادلات (٦) و (٧) داریم $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)=(-\frac{f_x}{f_z})(-\frac{f_y}{f_x})(-\frac{f_z}{f_x})=-1$.

۳-٦ صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه

در ابتدای این فصل با رهیافت هندسی و به کمک مشتقات جزئی، صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع دو متغیر $z=f(x,y)$ را به دست آوردیم. در ادامه‌ی این فصل به حالتی می‌پردازیم که رویه‌ی S به عنوان رویه‌ی تراز یک تابع حقیقی سه متغیره ومشتق‌پذیر F، مثلاً توسط معادله‌ی $F(x,y,z)=0$ داده شده باشد. در این صورت، از جنبه‌ی هندسی S را یک رویه‌ی **هموار** می‌نامیم. اکنون نقطه‌ی ثابت $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$ و خم هموار $C\subseteq S$ به معادله‌ی $x=x(t)$، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ را به قسمی روی رویه‌ی S در نظر می‌گیریم که $\mathbf{x}_0=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ (شکل ۴-۳). بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای برای تابع ثابت $g(t)=F(x(t),y(t),z(t))=0$ در $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ داریم:

$$0=\frac{dg}{dt}(t_0)=\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\ \frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\ \frac{dy}{dt}(t_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0)\ \frac{dz}{dt}(t_0)$$

به عبارت دیگر

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\ \mathbf{i}+\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\ \mathbf{j}+\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0)\ \mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}(t_0)\ \mathbf{i}+\frac{dy}{dt}(t_0)\ \mathbf{j}+\frac{dz}{dt}(t_0)\ \mathbf{k}\right)=0$$

پس بردار $\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\ \mathbf{i}+\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\ \mathbf{j}+\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0)\mathbf{k}$ که با $\nabla F(\mathbf{x}_0)$ نمایش داده می‌شود و **بردار گرادیان** F در $\mathbf{x}_0$ نامیده می‌شود بر بردار مماس بر خم C در $\mathbf{x}_0$ عمود است. با توجه به این که C را خم دلخواهی بر S در نظر گرفتیم که $\mathbf{x}_0\in C$، صفحه‌ی شامل $\mathbf{x}_0$ با

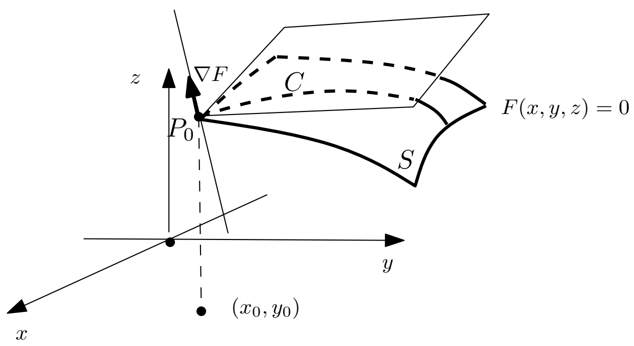
بردار نرمال $\nabla F(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بر رویه‌ی S مماس خواهد بود (شکل ۴—۴). معادله‌ی این صفحه به شکل زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ (x - x_\circ) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ (y - y_\circ) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ (z - z_\circ) = \circ$$

خط با بردار هادی $\nabla F(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ واقع بر $P_\circ$ **خط قائم** بر S در $P_\circ$ نامیده می‌شود (شکل ۴—۴). معادله‌ی این خط به صورت زیر است.

$$\frac{x - x_\circ}{F_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ)} = \frac{y - y_\circ}{F_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ)} = \frac{z - z_\circ}{F_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ)}$$

معادلات پارامتری این خط $x = x_\circ + tF_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$، $y = y_\circ + tF_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ و $z = z_\circ + tF_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ است.



شکل ۴—۴ صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه.

در حالت خاص که رویه‌ی S نمودار تابع حقیقی دو متغیره $z = f(x,y)$ باشد، S را می‌توانیم رویه‌ی تراز تابع سه متغیره‌ی F با ضابطه‌ی $F(x,y,z) = f(x,y) - z = \circ$ در نظر بگیریم. به این ترتیب بردار گرادیان در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ به شکل زیر خواهد بود.

$$\nabla F(x_\circ, y_\circ, z_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \mathbf{j} - \ \mathbf{k}$$

در این حالت معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ (x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ (y - y_\circ) - \ (z - z_\circ) = \circ$$

و معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است.

$$\frac{x - x_\circ}{f_x(x_\circ, y_\circ)} = \frac{y - y_\circ}{f_y(x_\circ, y_\circ)} = z_\circ - z$$

معادلات پارامتری این خط عبارتند از $x = x_\circ + tf_x(x_\circ, y_\circ)$، $y = y_\circ + tf_y(x_\circ, y_\circ)$ و $z = z_\circ$. اگر معادله‌ی صفحه‌ی مماس را به صورت

$$z = z_\circ + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ (x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ (y - y_\circ)$$

یا به شکل زیر بیان کنیم

$$z = f(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \Delta y$$

از مقایسه با فرمول

$$f(x,y) = f(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

دیده می‌شود که $f(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Delta y$ مقدار $f(x,y)$ را با خطای $\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ تقریب می‌زند.

مثال ۳–٦–۱ صفحه‌ی مماس و خط قائم بر هر یک از رویه‌های زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید.

الف) $P_\circ = (۱, ۱, ۱)\quad , \quad x^۲ + y^۲ - z^۲ - ۱ = \circ$.

ب) $P_\circ = (۱, ۱, ۴)\quad , \quad z = x^۴ + ۲x^۳y^۲ + y$

الف) برای $F(x,y,z) = x^۲ + y^۲ - z^۲ - ۱ = \circ$ داریم

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\ \mathbf{k} = ۲x\mathbf{i} + ۲y\mathbf{j} - ۲z\mathbf{k}$$

بنابر این معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط قائم در $(۱, ۱, ۱)$ به صورت زیر است.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(۱,۱,۱)\ (x - ۱) + \frac{\partial F}{\partial y}(۱,۱,۱)\ (y - ۱) + \frac{\partial F}{\partial z}(۱,۱,۱)\ (z - ۱) = \circ$$

$$\frac{x - ۱}{F_x(۱,۱,۱)} = \frac{y - ۱}{F_y(۱,۱,۱)} = \frac{z - ۱}{F_z(۱,۱,۱)}$$

که معادل است با

$$۲x + ۲y - ۲z - ۲ = \circ \quad , \quad \frac{x - ۱}{۲} = \frac{y - ۱}{۲} = \frac{z - ۱}{-۲}$$

ب) برای $z = f(x,y) = x^۴ + ۲x^۳y^۲ + y$ داریم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = (۴x^۳ + ٦y^۲x^۲)\mathbf{i} + (۴x^۳y + ۱)\mathbf{j}$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط قائم در $(۱,۱,۴)$ به صورت زیر است.

$$z = f(۱,۱) + \frac{\partial f}{\partial x}(۱,۱)(x-۱) + \frac{\partial f}{\partial y}(۱,۱)\ (y-۱)$$

$$۴ - z = \frac{x-۱}{f_x(۱,۱)} = \frac{y-۱}{f_y(۱,۱)}$$

که معادل است با $\frac{z-۴}{-۱} = \frac{y-۱}{۵} = \frac{x-۱}{۱۰} \quad , \quad ۱۰x + ۵y - z - ۱۱ = ۰$.

۳–۷ ویژگی‌های بردار گرادیان و مشتق سوئی

با توجه به نقش بنیانی بردار گرادیان در رفتار هندسی توابع حقیقی چند متغیره، در این بخش ویژگی‌های این بردار بیشتر و عمیق‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای سادگی در این بخش توابع دو و سه متغیره را مورد توجه قرار می‌دهیم. گرادیان را در فصل توابع برداری به عنوان یک عملگر (نگاشت) خطی هم مورد بررسی قرار خواهیم داد. یادآوری می‌کنیم که بردار گرادیان برای تابع حقیقی دو متغیره‌ی f و تابع حقیقی سه متغیره‌ی g به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} \quad , \quad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

فرض کنیم S رویه‌ای به معادله‌ی $z = f(x,y)$ در $\mathbb{R}^۳$ باشد. نقطه‌ی ثابت $P_۰ = (x_۰, y_۰)$ و بردار ثابت و یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر f در $P_۰$ مشتق‌پذیر باشد برای تابع $z(t) = f(x_۰ + at, y_۰ + bt)$،

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(۰) &= \lim_{t\to ۰} \frac{z(۰+t) - z(۰)}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{f(x_۰ + ta, y_۰ + tb) - f(x_۰, y_۰)}{t} \\ &= D_{\mathbf{u}} f(x_۰, y_۰) \end{aligned}$$

به عبارت دیگر مشتق سوئی f در سوی $\mathbf{u}$ در $(x_۰, y_۰)$ میزان تغییرات z را در سوی بردار $\mathbf{u}$ نشان می‌دهد. از سوی دیگر بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(۰) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)\frac{dx}{dt}(۰) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)\frac{dy}{dt}(۰) \\ &= \nabla f((x_۰, y_۰) \cdot \big(x'(۰)\mathbf{i} + y'(۰)\mathbf{j}\big) \\ &= \nabla f((x_۰, y_۰) \cdot (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \\ &= \nabla f((x_۰, y_۰) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

بنابر این
$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = \nabla f(x_\circ, y_\circ) \cdot \mathbf{u}$$

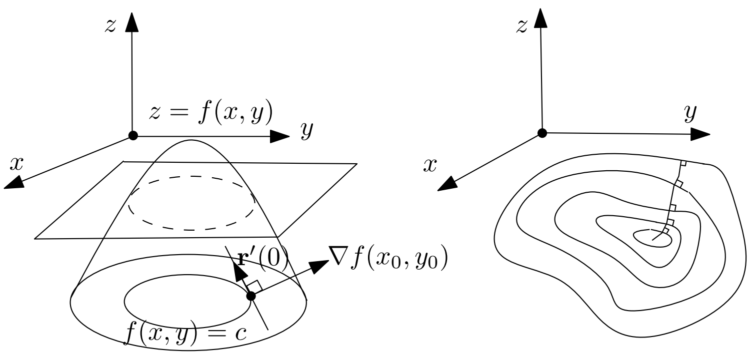
اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{u}$ و $\nabla f(x_\circ, y_\circ)$ باشد آنگاه

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = \|\nabla f((x_\circ, y_\circ)\| \ \|\mathbf{u}\| \cos\theta$$

بنابر این، مشتق سوئی وقتی بیشترین مقدار را دارد که $\theta = \circ$. به عبارت دیگر بیشترین میزان تغییرات z در یک همسایگی $(x_\circ, y_\circ)$، در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$، موازی با $\nabla f(x_\circ, y_\circ)$ خواهد بود (شکل ۴–۵). این نکته تعبیر هندسی ساده‌ای دارد که در عمل واقعیت شناخته شده‌ای است. رویه‌ی S به معادله‌ی $z = f(x, y)$ را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیریم. اگر خم تراز گذرنده از $(x_\circ, y_\circ)$، یعنی $L_c = \{(x, y) \ : \ f(x, y) = c\}$ به وسیله‌ی تابع برداری $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ مشخص شده باشد آنگاه برای تابع ثابت $g(t) := f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)) = c$ می‌توان نوشت:

$$\circ = \frac{dg}{dt}(\circ) = \nabla f(x_\circ, y_\circ) \cdot \mathbf{r}'(\circ)$$

بنابر این بردار $\nabla f(x_\circ, y_\circ)$ بر بردار $\mathbf{r}'(\circ)$ عمود است. به عبارت دیگر، مسیری که بیشترین شیب را در بالا رفتن از کوه دارد (کوتاه‌ترین مسیر برای رسیدن به قله)، در همه‌ی نقاط با خم‌های تراز زاویه‌ی قائمه می‌سازد (شکل ۴–۵).



شکل ۴–۵ بیشترین شیب و بردار گرادیان.

در انتهای این بخش، قضیه‌ی ۳–۳–۲ را به کمک بردار گرادیان هم بیان می‌کنیم. این قضیه را این بار برای توابع حقیقی سه متغیره بازنویسی می‌کنیم:

قضیه ۳-۷-۱ فرض کنیم تابع حقیقی سه متغیره‌ی f در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳$ تعریف شده و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$، مشتق سوئی $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ وجود دارد و

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \mathbf{u}$$

۳-۸ بسط تیلور توابع حقیقی چند متغیره

برای توابع حقیقی چند متغیره، شبیه به توابع حقیقی یک متغیره می‌توان با استفاده از چندجمله‌ایهای چند متغیره تقریب‌های مناسبی به دست آورد. این تقریب که در بسیاری از مسائل کاربردی و عددی نقش مؤثری بر عهده دارد، به کمک بسط تیلور انجام می‌شود. به کمک بسط تیلور می‌توان رفتار هندسی تابع را در یک همسایگی بررسی کرد، به ویژه در بخش بعد خواهیم دید که می‌توان نوع اکسترمم‌های موضعی تابع را نیز مشخص کرد.

در این بخش برای سادگی بسط تیلور مرتبه اول و دوم را فقط توابع حقیقی دو متغیره بررسی می‌کنیم. بسط تیلور از مرتبه‌ی دلخواه در پیوست ۳ مطرح شده است. فرض کنیم تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد.

تابع حقیقی یک متغیره‌ی F را با ضابطه‌ی $F(t) = f(x_\circ + ht, y_\circ + kt)$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌ی تیلور برای توابع حقیقی یک متغیره در یک همسایگی $t = \circ$، عدد حقیقی $\circ < \theta < ۱$ وجود دارد که:

$$F(t) = F(\circ) + F'(\circ)t + \frac{F''(\theta)}{۲!}t^۲ \tag{۸}$$

به ویژه برای $t = ۱$ داریم:

$$F(۱) = F(\circ) + F'(\circ) + \frac{F''(\theta)}{۲!}$$

بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای برای $x(t) = x_\circ + ht$ و $y(t) = y_\circ + kt$ داریم:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ + ht, y_\circ + kt)\ \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ + ht, y_\circ + kt)\ \frac{dy}{dt}(t) \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ + ht, y_\circ + kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ + ht, y_\circ + kt) \end{aligned}$$

به ویژه برای $t = \circ$ داریم:

$$F'(\circ) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + k\frac{\partial}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)$$

با استفاده‌ی مجدد از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$F''(\theta) = h^۲ \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k) + ۲hk\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k) + k^۲ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k)$$

از بازنویسی رابطه‌ی (۱۵) به قضیه‌ی زیر دست می‌یابیم:

قضیه ۳-۸-۱ **(تیلور مرتبه اول)** فرض کنیم مشتقات جزئی مخلوط مرتبه‌ی ۲ تابع دومتغیره‌ی f در یک همسایگی شامل $(x_\circ, y_\circ)$ وجود داشته و پیوسته باشند. در این صورت برای $h, k \in \mathbb{R}$ که $(x_\circ + h, y_\circ + k)$ در این همسایگی قرار بگیرد عدد حقیقی $\circ < \theta < ۱$ وجود دارد به قسمی که

$$f(x_\circ + ht, y_\circ + kt) = f(x_\circ, y_\circ) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + k\frac{\partial}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) + \frac{۱}{۲!}\Big[h^۲ \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k) + ۲hk\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k) + k^۲ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k)\Big]$$

۳-۹ اکسترمم توابع حقیقی چند متغیره

اکسترمم‌های توابع حقیقی در عمل کاربرد زیادی دارند و موضوع مهمی در مطالعه‌ی رفتار توابع به حساب می‌آیند. به ویژه از جنبه‌ی هندسی اکسترمم‌ها از شاخص‌ترین نقاط نمودار تابع هستند. بیشتر مفاهیم و تعریف‌های این قسمت به طور طبیعی تعمیم مفاهیم مشابه برای توابع حقیقی یک متغیره هستند و می‌توان آنها را به شکل کلی‌تر هم بیان کرد.

در این قسمت فرض می‌کنیم تابع دو متغیره‌ی حقیقی f در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ تعریف شده باشد.

مقدار $f(x_\circ, y_\circ)$ را یک **ماکزیمم موضعی (نسبی)** f می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$، برای هر (x, y) در این همسایگی داشته باشیم $f(x_\circ, y_\circ) \geq f(x, y)$ (شکل ۴-۶).

در صورتی که برای هر (x, y) در زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی f مانند S داشته باشیم $f(x_\circ, y_\circ) \geq f(x, y)$، مقدار $f(x_\circ, y_\circ)$ را **ماکزیمم مطلق** تابع f بر S می‌نامیم.

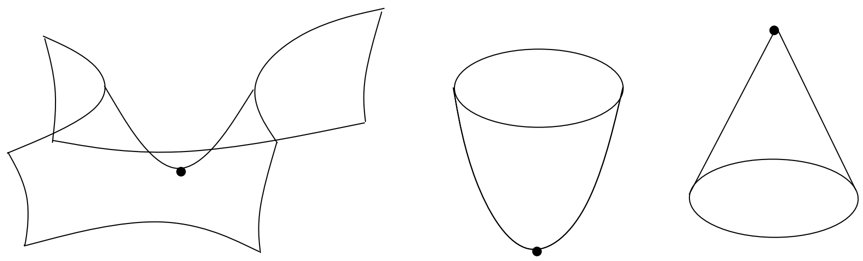
به همین ترتیب مقدار $f(x_\circ, y_\circ)$ را یک **مینیمم موضعی (نسبی)** تابع f می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی $(x_\circ, y_\circ)$ برای هر (x, y) در این همسایگی داشته باشیم $f(x_\circ, y_\circ) \leq f(x, y)$ (شکل ۴-۶).

در صورتی که برای هر (x, y) در زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی f مانند S داشته باشیم $f(x_\circ, y_\circ) \leq f(x, y)$، مقدار $f(x_\circ, y_\circ)$ را **مینیمم مطلق** تابع f بر S می‌نامیم.

منظور از یک **اکسترمم** f یک ماکزیمم یا مینیمم f است. یک پرسش طبیعی رابطه‌ی بین مشتق و اکسترمم‌های f است. در مورد توابع چند متغیره نیز می‌توان قضیه‌ای شبیه به توابع یک متغیره به شکل زیر بیان کرد.

قضیه ۳–۹–۱ فرض کنیم $f(x_\circ, y_\circ)$ یک اکسترمم نسبی f باشد. اگر f در $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $\nabla f(x_\circ, y_\circ) = \mathbf{0}$.

عکس این قضیه در حالت کلی درست نیست. ممکن است در نقطه‌ی مانند $(x_\circ, y_\circ)$ داشته باشیم $\nabla f(x_\circ, y_\circ) = \mathbf{0}$، ولی $f(x_\circ, y_\circ)$ اکسترمم نسبی نباشد. همچنین ممکن است $f(x_\circ, y_\circ)$ اکسترمم موضعی یا مطلق f باشد ولی f در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد (شکل ۴–۶). نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ را یک **نقطه‌ی بحرانی** تابع دو متغیره‌ی حقیقی f گوییم هرگاه تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد یا $\nabla f(x_\circ, y_\circ) = \mathbf{0}$.
نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ را **نقطه‌ی زینی** نمودار f گوییم هرگاه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه‌ی بحرانی f باشد ولی $f(x_\circ, y_\circ)$ اکسترمم f نباشد. در این صورت در هر همسایگی $(x_\circ, y_\circ)$ به ازای برخی از نقاط (x, y) داریم $f(x_\circ, y_\circ) > f(x, y)$ و به ازای برخی از نقاط (x, y) داریم $f(x_\circ, y_\circ) < f(x, y)$ (شکل ۴–۶).



شکل ۴–۶ ماکزیمم، مینیمم و نقطه‌ی زینی.

به این ترتیب در هر همسایگی از دامنه‌ی تابع f که این تابع مشتق‌پذیر است اکسترمم‌ها به ازای ریشه‌های ∇f به دست می‌آیند. می‌توان به جای همسایگی، زیر مجموعه‌ی کلی‌تری موسوم به زیر مجموعه‌ی باز قرار داد. زیرمجموعه‌ی $S \subseteq \mathbb{R}^2$ را **باز** گویم هرگاه بتوان آن‌را به صورت اجتماعی ازهمسایگی‌ها در نظر گرفت. برای مثال درون یک دایره به شعاع و مرکز دلخواه یک مجموعه‌ی باز است. تحقیق می‌شود که نقاط خارج از یک دایره هم یک مجموعه‌ی باز است. موارد زیر مثال‌های دیگری از مجموعه‌های باز هستند.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < b, \ c < y < d\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < a\}$$

مکمل هر مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^2$ را **بسته** می‌نامند. برای مثال

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \;:\; x^۲+y^۲\leq ۱\}$ یک مجموعه‌ی بسته است زیرا مکمل آن نقاط خارج از دایره‌ی یکه تشکیل یک مجموعه‌ی باز می‌دهند. مثال دیگری برای مجموعه‌ی بسته مجموعه‌ی $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \;:\; x\leq a\}$ است. مثال اول یک مجموعه‌ی بسته‌ی کران‌دار و مثال دوم یک مجموعه‌ی بسته ولی بی‌کران است. در مورد اکسترمم توابع حقیقی پیوسته بر مجموعه‌های بسته و کراندار، قضیه‌ای وجود دارد که فقط به بیان آن اکتفا می‌کنیم.

قضیه ۳–۹–۲ هر تابع حقیقی چندمتغیره و پیوسته بر یک زیرمجموعه‌ی بسته و کراندار، اکسترمم‌های مطلق خود را بر این مجموعه اختیار می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم که به کمک قضیه‌ی تیلور می‌توان نوع اکسترمم در نقاط بحرانی توابع حقیقی دو متغیره را مشخص کرد. فرض کنیم $(x_\circ,y_\circ)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع حقیقی دو متغیره و مشتق‌پذیر f باشد، یعنی $f_x(x_\circ,y_\circ)=f_y(x_\circ,y_\circ)=\circ$. بنا بر قضیه‌ی تیلور مرتبه‌ی اول، عدد $\circ<\theta<۱$ وجود دارد که در یک همسایگی $\mathbf{x}_\circ=(x_\circ,y_\circ)$ و برای $\mathbf{y}_\circ=(x_\circ+\theta h,y_\circ+\theta k)$ داریم:

$$\begin{aligned}f(x_\circ+h,y_\circ+k)-f(x_\circ,y_\circ)&=\frac{۱}{۲}\Big[h^۲f_{xx}+۲hkf_{xy}+k^۲f_{yy}\Big](\mathbf{y}_\circ)\\&=\frac{۱}{۲}f_{xx}\Big[\Big(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\;k\Big)^۲+\Big(\frac{f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^۲}{(f_{xx})^۲}\Big)k^۲\Big](\mathbf{y}_\circ)\end{aligned}$$

بنابر این اگر در یک همسایگی $(x_\circ,y_\circ)$ داشته باشیم $\Delta:=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^۲>\circ$ و $f_{xx}>\circ$ آنگاه در این همسایگی $f(x_\circ+ht,y_\circ+kt)-f(x_\circ,y_\circ)>\circ$، یعنی $f(x_\circ,y_\circ)$ مینیمم نسبی است. به همینن ترتیب اگر $\Delta>\circ$ و $f_{xx}<\circ$ آنگاه $f(x_\circ,y_\circ)$ ماکزیمم نسبی f و در حالتی که $\Delta<\circ$، $(x_\circ,y_\circ,f(x_\circ,y_\circ))$ یک نقطه‌ی زینی خواهد بود. نتیجه‌ی بحث فوق در قضیه‌ی بعد بیان شده است.

قضیه ۳–۹–۳ فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی f در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_\circ,y_\circ)$ مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته داشته و این نقطه یک نقطه‌ی بحرانی f باشد و

$$A=\frac{\partial^۲f}{\partial x^۲}(x_\circ,y_\circ)\;,\quad B=\frac{\partial^۲f}{\partial x\partial y}(x_\circ,y_\circ)\;,\quad C=\frac{\partial^۲f}{\partial y^۲}(x_\circ,y_\circ)\;,\quad \Delta=AC-B^۲$$

در این صورت:

الف) اگر $\Delta>\circ$ و $A>\circ$ آنگاه $f(P_\circ)$ یک مینیمم موضعی f است.

ب) اگر $\Delta>\circ$ و $A<\circ$ آنگاه $f(P_\circ)$ یک ماکزیمم موضعی f است.

ج) اگر $\Delta<\circ$ آنگاه $(x_\circ,y_\circ,f(x_\circ,y_\circ))$ یک نقطه‌ی زینی نمودار f است.

باید به این نکته توجه داشت که در حالت $\Delta=\circ$ این قضیه چیزی نمی‌گوید.

مثال ۳–۹–۴ اکسترمم‌ها و نقاط زینی تابع دو متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x,y) = ۲x^۴ + y^۴ - ۲x^۲ - ۲y^۲$ را تعیین و بر حسب نوع اکسترمم دسته‌بندی کنید.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = (۸x^۳ - ۴x)\mathbf{i} + (۴y^۳ - ۴y)\mathbf{j}$$

از حل دستگاه

$$\begin{cases} f_x(x,y) = ۸x^۳ - ۴x = ۰ \\ f_y(x,y) = ۴y^۳ - ۴y = ۰ \end{cases}$$

به ۹ جواب دست می‌یابیم. نقاط بحرانی و نوع اکسترمم‌ها در جدول مشخص شده است.

i	نقطه‌ی بحرانی P_i	$f_{xx}(P_i)$	$f_{yy}(P_i)$	$f_{xy}(P_i)$	$\Delta(P_i)$	نوع نقطه‌ی بحرانی
۱	$(۰,۰)$	-۴	-۴	۰	۱۶	ماکزیمم موضعی
۲	$(۰,۱)$	-۴	۸	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۳	$(۰,-۱)$	-۴	۸	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۴	$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},۰)$	۸	-۴	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۵	$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},۱)$	۸	۸	۰	۶۴	مینیمم موضعی
۶	$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},-۱)$	۸	۸	۰	۱۶	مینیمم موضعی
۷	$(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},۰)$	۸	-۴	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۸	$(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},۱)$	۸	۸	۰	۶۴	مینیمم موضعی
۹	$(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},-۱)$	۸	۸	۰	۱۶	مینیمم موضعی

۳–۱۰ اکسترمم‌های مقید توابع حقیقی چند متغیره

گاهی اوقات می‌خواهیم مقادیری از تابع حقیقی چند متغیره‌ی f را بیابیم که تحت یک یا چند شرط جانبی برای f اکسترمم محسوب می‌شوند. این مقادیر را در صورت وجود، **اکسترمم‌های مقید** f می‌نامیم و در حالت کلی باید توجه داشت که لزوماً اکسترمم موضعی f نیستند. این مساله کاربردهای زیادی در مدل‌های فنی و مهندسی دارد. برای مثال سطح خارجی یک مخزن دو تکه را می‌توان یک رویه در نظر گرفت. فرض کنیم دمای این سطح در نقاط مختلف به وسیله تابع $T = T(x,y,z)$ مشخص می‌شود. به منظور اطمینان از مقاومت این مخزن لازم است ماکزیمم دما روی خمی مشخص شود که در طول آن، دو تکه‌ی مخزن به هم جوش داده شده است. تعیین این نقطه معادل است با تعیین اکسترمم مقید یک تابع حقیقی سه متغیره.

قضیه‌ی بعد که قابل تعمیم به توابع حقیقی چند متغیره‌ی حقیقی است **قانون تکثیرکنندگان لاگرانژ** نامیده می‌شود. در این قضیه روش محاسبه‌ی اکسترمم‌های مقید تابع دو متغیره‌ی f با یک شرط جانبی $g(x,y) = ۰$ داده شده است.

قضیه ۳-۱۰-۱ فرض کنیم توابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی حاوی خم C به معادله‌ی $g(x,y) = ۰$ دارای مشتقات جزیی پیوسته باشند و روی C داشته باشیم $\nabla g \neq \mathbf{0}$. اگر f در $(a,b) \in C$ اکسترمم مقید داشته باشد آنگاه عدد غیر صفر $k \in \mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که $\nabla f(a,b) = k\nabla g(a,b)$.

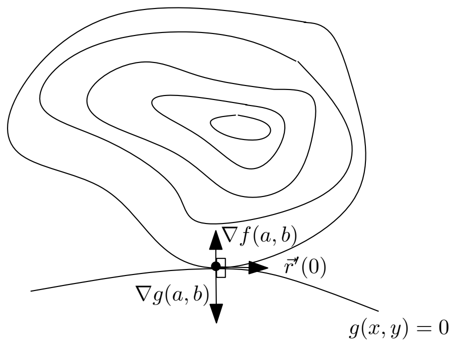
اثبات هندسی این قضیه هم بسیار زیبا است و هم نکات مفیدی را در مورد قضیه روشن می‌کند. فرض کنیم $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ تابع برداری باشد که خم C را مشخص می‌کند و $\mathbf{r}(۰) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ بردار موضع نقطه‌ی (a,b) باشد که f در آن اکسترمم مقید خود را به دست می‌آورد. در این صورت، برای $G(t) := g(\mathbf{r}(t)) = g(x(t),y(t)) = ۰$ طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم

$$۰ = \frac{dG}{dt}(۰) = \nabla g(a,b) \cdot r'(۰) \qquad (۹)$$

همچنین برای تابع $F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t),y(t))$ داریم $F(۰) = f(a,b)$. با توجه با این که $f(a,b)$ یک اکسترمم مقید fاست، $F(۰)$ اکسترمم نسبی F است. پس $\frac{dF}{dt}(۰) = ۰$. در نتیجه

$$۰ = \frac{dF}{dt}(۰) = \nabla f(a,b) \cdot r'(۰) \qquad (۱۰)$$

اکنون بنا بر روابط (۹) و (۱۰)، هر دو بردار $\nabla g(a,b)$ و $\nabla f(a,b)$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ بر بردار $\mathbf{r}'(۰)$ عمود هستند (شکل ۴-۷). پس عدد غیر صفر $k \in \mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که $\nabla f(a,b) = k\nabla g(a,b)$. عدد k را یک **تکثیر کننده‌ی لاگرانژ** می‌نامیم.



شکل ۴-۷ تکثیر کننده‌ی لاگرانژ.

رابطه‌ی $\nabla f(a,b) = k\nabla g(a,b)$ برای $\lambda = -k$ به شکل $\nabla f(a,b) + \lambda\nabla g(a,b) = \mathbf{0}$ نیز قابل بیان است. به این ترتیب برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های مقید تابع دو متغیره‌ی f با شرط جانبی $g(x,y) = 0$، کافی است برای تابع کمکی $H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda) = \mathbf{0}$ را حل کنیم. در این حالت دستگاه فوق به شکل زیر خواهد بود.

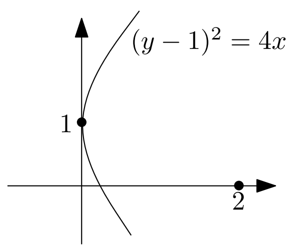
$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ H_\lambda = g(x,y) = 0 \end{cases}$$

اگر محاسبه‌ی اکسترمم‌های مقید تابع دو متغیره‌ی f با دو شرط جانبی $g(x,y) = 0$ و $h(x,y) = 0$ مورد نظر باشد، باید برای تابع کمکی $H(x,y,\lambda,\mu) = f(x,y) + \lambda g(x,y) + \mu h(x,y)$، دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda,\mu) = \mathbf{0}$ را حل کنیم. در این حالت دستگاه فوق به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ H_\lambda = g(x,y) = 0 \\ H_\mu = h(x,y) = 0 \end{cases}$$

تعمیم قضیه‌ی لاگرانژ برای توابع چند متغیره‌ی دلخواه به دانشجویان واگذار می‌شود. قابل ذکر است که برخی از موارد، حالت $\lambda = 0$ نیز باید مورد توجه قرار گیرد. در این صورت باید داشته باشیم $\nabla f = 0$. در این حالت می‌توان بردارهای ∇f و ∇g را می‌توان موازی دانست زیرا بردار صفر با هر برداری موازی است. همچنین ممکن است اکسترمم مقید در نقطه‌ای رخ دهد که برای آن داشته باشیم $\nabla g = 0$. بررسی هندسی مساله نیز می‌تواند در تعیین نوع اکسترمم و وجود آن راهنمای بسیار خوبی باشد. در مثال‌های زیر حالت‌های مختلف قضیه‌ی لاگرانژ بررسی شده است.

مثال ۳–۱۰–۲ نقاطی را روی سهمی به معادله‌ی $(y-1)^2 = 4x$ مشخص کنید که فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی $(2,0)$ مینیمم باشد (شکل ۴–۷).



شکل ۴–۷ سهمی به معادله‌ی $(y-1)^2 = 4x$.

این مسأله معادل یافتن مینیمم تابع دو متغیره‌ی $f(x,y) = (x-۲)^۲ + y^۲$ (مربع فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه تا $(۲,۰)$) مقید به شرط جانبی $g(x,y) = (y-۱)^۲ - ۴x = ۰$ است (نقطه‌ای از سهمی $(y-۱)^۲ = ۴x$). قرار می‌دهیم

$$H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = (x-۲)^۲ + y^۲ + \lambda(\,(y-۱)^۲ - ۴x\,).$$

بنابر آنچه گفته شد، باید دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda) = \mathbf{0}$ را حل کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = ۲(x-۲) - ۴\lambda = ۰ \\ H_y = ۲y + ۲\lambda(y-۱) = ۰ \\ H_\lambda = g(x,y) = (y-۱)^۲ - ۴x = ۰ \end{cases}$$

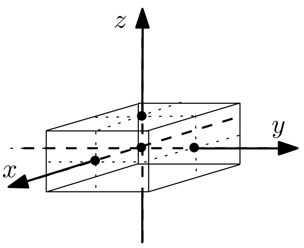
که معادل است با

$$\begin{cases} x = ۲\lambda + ۲ \\ y = \frac{\lambda}{۱+\lambda} \\ (y-۱)^۲ = ۴x \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x = ۱$ و $y = -۱$ و $\lambda = -\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. پس نقطه‌ی $(۱,-۱)$ نقطه‌ای روی سهمی $(y-۱)^۲ = ۴x$ است که از $(۲,۰)$ کمترین فاصله را دارد. مقدار این فاصله برابر $\sqrt{f(۱,-۱)} = \sqrt{۲}$ است.

مثال ۳–۱۰–۳ حجم یک مکعب مستطیل که وجوه آن موازی صفحات مختصات هستند و درون بیضی‌گون $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$ محصور است به ازای چه ابعادی ماکزیمم می‌شود؟

حجم این مکعب مستطیل برابر $V(x,y,z) = (۲x)(۲y)(۲z) = ۸xyz$ است که (x,y,z) مختصات گوشه‌ی مکعب مستطیل در یک هشتم اول فضا است (شکل ۴–۸).



شکل ۴–۸ مکعب مستطیلی با وجوه موازی صفحات مختصات و مرکز تقارن مبداء.

بنابر این باید ماکزیمم V را با شرط جانبی $g(x,y,z) = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} - ۱ = ۰$ محاسبه کنیم. قرار می‌دهیم

$$H(x,y,z,\lambda) = V(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = ۸xyz + \lambda(\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} - ۱)$$

و دستگاه $\nabla H(x,y,z,\lambda)=\mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = 8yz + 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0 \\ H_y = 8xz + 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0 \\ H_z = 8xy + 2\lambda\frac{z}{c^2} = 0 \\ H_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

اگر معادله‌ی اول را در x، معادله‌ی دوم را در y و معادله‌ی سوم را در z ضرب کنیم می‌توان نوشت:

$$-8xyz = 2\lambda\frac{x^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z^2}{c^2}$$

بنابراین $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$. با جایگزینی در معادله‌ی چهارم، یعنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ نتیجه می‌شود $3\frac{x^2}{a^2}=3\frac{y^2}{b^2}=3\frac{z^2}{c^2}=1$. جواب قابل قبول $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$، $y=\frac{b\sqrt{3}}{3}$ و $z=\frac{c\sqrt{3}}{3}$ است. بنابراین ماکزیمم حجم برابر است با $V_{max}=\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$.

مثال ۳–۱۰–۴ اکسترمم‌های تابع دو متغیره‌ی $f(x,y)=xye^{xy}$ را روی ناحیه‌ی بسته و کران‌دار $\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq 2\}$ به دست آورید.

تابع f پیوسته است و در نتیجه روی هر ناحیه‌ی بسته و کران‌دار اکسترمم‌های خود را اختیار می‌کند. در ناحیه‌ی باز $\{(x,y)\ :\ x^2+y^2<2\}$ اکسترمم‌ها به ازای نقاط بحرانی تابع f به دست می‌آیند. نقاط بحرانی جواب‌های مشترک دو معادله‌ی $f_x=0$ و $f_y=0$ یعنی جواب‌های مشترک معادله‌های $(y+xy^2)e^{xy}=0$ و $(x+yx^2)e^{xy}=0$ هستند. به این ترتیب تنها نقطه‌ی بحرانی f در ناحیه‌ی باز $\{(x,y)\ :\ x^2+y^2<2\}$، نقطه‌ی $(0,0)$ است. در این نقطه داریم $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$، $f_{xy}(0,0)=1$ و $\Delta(0,0)=f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=-1<0$. بنابراین f به ازای P_0 یک نقطه‌ی زینی دارد. درنتیجه اکسترممی به ازای نقاط درون ناحیه نداریم.

هر اکسترمم f روی مرز ناحیه، یعنی $\{(x,y)\ :\ x^2+y^2=2\}$، اکسترمم مقید f با شرط جانبی $g(x,y)=x^2+y^2-2=0$ محسوب می‌شود. قرار می‌دهیم $H(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=xye^{xy}+\lambda(x^2+y^2-2)$ و دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda)=\mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = ye^{xy} + xy^2e^{xy} + 2x\lambda = 0 \\ H_y = xe^{xy} + x^2ye^{xy} + 2y\lambda = 0 \\ H_\lambda = g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

اگر $x=0$ آنگاه $y=0$ که به جواب غیر قابل قبول $x=y=\lambda=0$ منجر می‌شود. اگر معادله‌ی اول را در $x\neq 0$ و معادله‌ی دوم را در $y\neq 0$ ضرب و دو معادله را از هم کم

کنیم نتیجه می‌شود $۲(x^۲ - y^۲) = \lambda(y^۲ - x^۲)$. پس به ازای $\lambda \neq ۰$، $y = \pm x$. با جایگزینی در معادله‌ی سوم، یعنی $x^۲ + y^۲ - ۲ = ۰$، نتیجه می‌گیریم $x = \pm ۱$ و $y = \pm ۱$. به این ترتیب چهار نقطه‌ی $(۱,۱)$، $(-۱,۱)$، $(۱,-۱)$ و $(-۱,-۱)$ به دست می‌آید. از سوی دیگر $f(۱,۱) = f(-۱,-۱) = e$ و $f(-۱,۱) = f(۱,-۱) = -\frac{۱}{e}$. پس f در نقاط $(۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ ماکزیمم مطلق برابر e و در نقاط $(۱,-۱)$ و $(-۱,۱)$ مینیمم مطلق برابر $-\frac{۱}{e}$ دارد.

مثال ۳-۱۰-۵ مطلوب است محاسبه‌ی فاصله‌ی بین مبدأ و خط حاصل از تلاقی صفحه‌های $x - y + z = ۳$ و $x + ۲y - z = ۵$ به کمک روش تکثیرکنندگان لاگرانژ.

این مسأله معادل یافتن مینیمم تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ (مربع فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه تا مبدأ) مقید به شرطهای جانبی $g(x,y,z) = x - y + z - ۳ = ۰$ و $h(x,y,z) = x + ۲y - z - ۵ = ۰$ است (نقطه‌ی روی خط تلاقی صفحه‌های $x - y + z = ۳$ و $x + ۲y - z = ۵$). قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} H(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z) \\ &= x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda(x - y + z - ۳) + \mu(x + ۲y - z - ۵) \end{aligned}$$

و دستگاه $\nabla H(x,y,z,\lambda,\mu) = \mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = ۲x + \lambda + \mu = ۰ \\ H_y = ۲y - \lambda + ۲\mu = ۰ \\ H_z = ۲z + \lambda - \mu = ۰ \\ H_\lambda = g(x,y,z) = x - y + z - ۳ = ۰ \\ H_\mu = h(x,y,z) = x + ۲y - z - ۵ = ۰ \end{cases}$$

با جمع کردن معادلات اول و دوم نتیجه می‌شود $۲x + ۲y + ۳\mu = ۰$ و با جمع کردن معادلات چهارم و پنجم نتیجه می‌شود $۲x + y - ۸ = ۰$. با کم کردن این دو معادله از هم داریم $y = -۳\mu - ۸$ و در نتیجه $x = \frac{۳}{۲}\mu + ۸$ و $z = -\frac{۹}{۲}\mu - ۱۳$. با جایگزینی در معادلات اول و سوم، دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} ۴\mu + \lambda = -۱۶ \\ -۱۰\mu + \lambda = ۲۶ \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $\mu = -۳$، $\lambda = -۴$ و در نتیجه $x = \frac{۷}{۲}$، $y = ۱$ و $z = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. پس نقطه‌ی $(\frac{۷}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲})$، نقطه‌ای روی خط حاصل از تلاقی صفحه‌های $x - y + z = ۳$ و $x + ۲y - z = ۵$ است که از $(۰,۰,۰)$ کمترین فاصله را دارد. این

فاصله که فاصله‌ی بین مبدأ و خط مورد نظر می‌باشد عبارت است از

$$d = \sqrt{\frac{۴۹}{۴} + ۱ + \frac{۱}{۴}} = \frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$$

مثال ۳–۱۰–۶ ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = xyz$ را با شرط $x + y + z = c$ (c مقداری ثابت و $c > ۰$) بیابید و سپس نتیجه بگیرید که اگر x و y و z سه عدد مثبت باشند آنگاه

$$\frac{x + y + z}{۳} \geq \sqrt[۳]{xyz}$$

قرار می‌دهیم $g(x, y, z) = x + y + z - c$،

$$H(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - c)$$

و دستگاه $\nabla H(x, y, z, \lambda) = \mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = yz + \lambda = ۰ \\ H_y = xz + \lambda = ۰ \\ H_z = xy + \lambda = ۰ \\ H_\lambda = g(x, y, z) = x + y + z - c = ۰ \end{cases}$$

از معادلات اول و دوم وسوم داریم $xy = yz = xz = -\lambda$. پس $x = y = z = \sqrt{-\lambda}$. بنابر این از معادله‌ی چهارم داریم $c = ۳x = ۳\sqrt{-\lambda}$ که معادل است با $\lambda = -\frac{c^۲}{۹}$. پس به ازای $x = y = z = \frac{c}{۳}$ ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = xyz$ با شرط $x + y + z = c$ به دست می‌آید. این مقدار برابر است با $\frac{c^۳}{۲۷}$. به این ترتیب $xyz \leq \frac{c^۳}{۲۷}$. به عبارت دیگر

$$\sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{c}{۳} = \frac{x + y + z}{۳}$$

از سوی دیگر برای هر سه عدد حقیقی دلخواه و به ازای $c := x + y + z$ می‌توان نامساوی فوق را به کار برد. پس برای هر سه عدد حقیقی دلخواه همواره می‌توان نوشت:

$$\sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{۳}$$

۳–۱۰–۱ پیوست ۱

در این بخش به تعمیم مفهوم مشتق کل به توابع سه متغیره و به طور کلی n متغیره می‌پردازیم. سپس تعمیم قاعده‌ی زنجیره‌ای را برای این توابع مطرح می‌کنیم. برای این منظور ابتدا از چشم‌انداز جبری به مفهوم مشتق تابع یک متغیره توجه می‌کنیم.

برای تابع یک متغیره‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که در x_0 مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{x_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر قابل تعریف است.

$$Df_{x_0}(x)=f'(x_0)x$$

به همین ترتیب برای تابع دو متغیره‌ی حقیقی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ که در $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$ مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{\mathbf{x}_0}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر قابل تعریف است.

$$Df_{\mathbf{x}_0}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y$$

به شکل مشابه برای تابع حقیقی n متغیره‌ی حقیقی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ که در $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{\mathbf{x}_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$Df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)x_n \qquad \mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$$

در فصل اول دیدیم که نگاشت‌های خطی را می‌توان به کمک ماتریس‌ها هم بیان کرد. بنابر این برای تابع حقیقی n متغیره‌ی حقیقی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ که در $\mathbf{x}_0$ مشتق‌پذیر است یک ماتریس $1\times n$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$Df_{\mathbf{x}_0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\ \cdots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right)_{1\times n}$$

بر اساس این نمادگذاری $Df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ حاصل ضرب ماتریس سطری $Df_{\mathbf{x}_0}$ در بردار ستونی حاصل از مختصات نقطه‌ی $\mathbf{x}$ است.

$$Df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\ \cdots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)x_n$$

به همین ترتیب می‌توان برای تابع برداری n متغیره‌ی $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_m)=(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$، که در $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{\mathbf{x}_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ را نظیر یک ماتریس $m\times n$ به شکل زیر در نظر گرفت.

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_0}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\\ \vdots & \ddots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}_{m\times n}$$

برخی از مؤلفین ماتریس $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ را با $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_\circ)$ نمایش می‌دهند و آن را ماتریس **ژاکوبی** $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}_\circ$ می‌نامند. مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}_\circ$، به ازای $\mathbf{x}$ با $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})$ نمایش داده می‌شود. به منظور سادگی گاهی اندیس $\mathbf{x}_\circ$ نوشته نمی‌شود.

یادآوری می‌شود که از جنبه‌ی هندسی اگر f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه صفحه‌ی مماس بر نمودار f نیز در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ وجود دارد. صفحه‌ی مماس در این نقطه نمودار تابع به معادله‌ی $L(x,y) = f(x_\circ, y_\circ)+A(x-x_\circ)+B(y-y_\circ)$ خواهد بود و برای $h = x - x_\circ$ و $k = y - y_\circ$، مقدار $L(x_\circ + h, y_\circ + k)$ یک تقریب خطی برای $f(x_\circ + h, y_\circ + k)$ است (شکل ۴−۲).

اکنون می‌توانیم به شکل تحلیلی و دقیق، مفهوم مشتق‌پذیری و مشتق کل تابع $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ را که $D \subseteq \mathbb{R}^n$ در حالت کلی بیان کنیم.

تابع $\mathbf{f}$ را در $\mathbf{x}_\circ$ مشتق‌پذیر گوییم هرگاه نگاشت خطی $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و نگاشت $\mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشند به قسمی که در یک همسایگی $\mathbf{x}_\circ$ داشته باشیم

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ + \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ) = D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x}) + ||\mathbf{x}||\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})\ ,\quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_\circ} \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (۱۱)$$

نگاشت خطی $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}_\circ$ نام دارد. با توجه به رابطه‌ی (۱۱)، مشتق تابع $\mathbf{f}$ به شکل زیر هم قابل بیان است.

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_\circ} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ + \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ)}{||\mathbf{x}||}$$

به ویژه برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ و $\mathbf{x} = h\mathbf{u}$ از رابطه‌ی (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ + h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ) = D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(h\mathbf{u}) + ||h\mathbf{u}||\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x}) = h\Big[D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u}) + ||\mathbf{u}||\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})\Big]$$

بنابر این از خطی بودن $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{h\to\circ} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ + h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ)}{h} = D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u}) + ||\mathbf{u}||\ \lim_{h\to\circ} \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u}) \qquad (۱۲)$$

از رابطه‌ی (۱۲) نتیجه می‌شود که در حالت خاص اگر f در $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق سوئی f در هر سوی دلخواه $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ وجود دارد. علاوه بر این از خطی بودن $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ نتیجه می‌شود که مقدار مشتق سوئی با مشتق کل یکی خواهد

بود. به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_\circ) = Df|_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u}) &= Df|_{\mathbf{x}_\circ}(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}) \\ &= aDf_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{i}) + bD\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{j}) \\ &= aD_{\mathbf{i}}f(\mathbf{x}_\circ) + bD_{\mathbf{j}}f(\mathbf{x}_\circ) \\ &= af_x(\mathbf{x}_\circ) + bf_y(\mathbf{x}_\circ) \end{aligned}$$

مثال ۳−۱۰−۷ برای توابع $\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^۲$ و $\mathbf{h}:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌های زیر مشتق کل را در $t_\circ = ۰$ و $\mathbf{x}_\circ = (۱, \ln ۲)$ به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{g}(t) = e^t\mathbf{i} + (t\sinh t + ۲t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{h}(x,y) = (xy, x+e^y, ۲y) = xy\mathbf{i} + (x+e^y)\mathbf{j} + ۲y\mathbf{k}$$

برای $\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $\mathbf{g}(t) = g_۱(t)\mathbf{i} + g_۲(t)\mathbf{j} = e^t\mathbf{i} + (t\sinh t + ۲t)\mathbf{j}$، مشتق کل $D\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^۲$ در $t_\circ = ۰$ یک ماتریس ۱×۲ است.

$$D\mathbf{g}_{t_\circ} = \begin{pmatrix} \frac{dg_۱}{dt}(۰) \\ \frac{dg_۲}{dt}(۰) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

به این ترتیب برای $t_\circ = ۰$ داریم:

$$D\mathbf{g}_{t_\circ}(t) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} t \\ ۲t \end{pmatrix}$$

برای تابع $\mathbf{h}:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی

$$\mathbf{h}(x,y) = (f_۱(x,y), f_۲(x,y), f_۳(x,y)) = (xy, x+e^y, ۲y)$$

مشتق کل $D\mathbf{h}_{\mathbf{x}_\circ}:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ در $\mathbf{x}_\circ = (۱, \ln ۲)$ یک ماتریس ۲×۳ است.

$$D\mathbf{h}_{\mathbf{x}_\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_۱}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ) & \frac{\partial f_۱}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ) \\ \frac{\partial f_۲}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ) & \frac{\partial f_۲}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ) \\ \frac{\partial f_۳}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ) & \frac{\partial f_۳}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

به این ترتیب برای $\mathbf{x}_\circ = (۱, \ln ۲)$ داریم:

$$D\mathbf{h}_{\mathbf{x}_\circ}(x,y) = \begin{pmatrix} \ln ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ln ۲ + y \quad x + ۲y \quad ۲y)$$

در ادامه‌ی این بخش قاعده‌ی زنجیره‌ای را برای توابع چند متغیره‌ی دلخواه تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۳–۱۰–۸ اگر $\mathbf{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ در $\mathbf{x}_\circ\in\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{f}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ در $g(\mathbf{x}_\circ)\in\mathbb{R}^p$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ در $\mathbf{x}_\circ$ مشتق‌پذیر است. اگر مشتق کل $\mathbf{g}$ در $\mathbf{x}_\circ$ را با $D\mathbf{g}_{\mathbf{x}_\circ}$ و مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)$ را با $D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)}$ نمایش دهیم آنگاه مشتق کل $f\circ g$ در $\mathbf{x}_\circ$ عبارت است از:

$$D(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})_{\mathbf{x}_\circ}=D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)}\;D\mathbf{g}_{\mathbf{x}_\circ}$$

به عبارت دیگر فرض کنیم $\mathbf{g}(x_1,\cdots,x_n)=(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_p(x_1,\cdots,x_n))$,

$\mathbf{f}(x_1,\cdots,x_p)=(f_1(x_1,\cdots,x_p),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_p))$

در این صورت اگر مشتق کل $\mathbf{g}$ در $\mathbf{x}_\circ$ به شکل

$$D\mathbf{g}_{\mathbf{x}_\circ}=\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_\circ)\right)_{p\times n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ)&\cdots&\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ)&\cdots&\frac{\partial g_p}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ)\end{pmatrix}_{p\times n}$$

و مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)$ به شکل زیر باشند.

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g(\mathbf{x}_\circ))\right)_{m\times p}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(g(\mathbf{x}_\circ))&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_p}(g(\mathbf{x}_\circ))\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(g(\mathbf{x}_\circ))&\cdots&\frac{\partial f_m}{\partial x_p}(g(\mathbf{x}_\circ))\end{pmatrix}_{m\times p}$$

آنگاه مشتق کل $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ در $\mathbf{x}_\circ$ به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}D(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})_{\mathbf{x}_\circ}&=D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)}\;D\mathbf{g}_{\mathbf{x}_\circ}=\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_\circ)\right)_{m\times n}\\ &=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ)&\cdots&\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_m}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ)&\cdots&\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_m}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ)\end{pmatrix}_{m\times n}\end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $y=f(x)$ یک تابع حقیقی یک متغیره باشد، مشتق کل آن همان مشتق معمولی است که آن را یک ماتریس ۱ × ۱ یعنی یک اسکالر در نظر می‌گیریم.

۳–۱۰–۲ پیوست ۲

در این بخش برای توابع حقیقی دو متغیره قضیه تابع ضمنی را ثابت می‌کنیم. اثبات این قضیه در حالت کلی به شکل مشابه است.

قضیه ۳-۱۰-۹ فرض کنیم f یک تابع دو متغیره‌ی حقیقی باشد به قسمی که در یک همسایگی $(x_۰, y_۰)$ داشته باشیم $f(x,y) = ۰$. اگر مشتقات جزئی f پیوسته و دست کم یکی از آنها مثلاً $f_y(x_۰, y_۰)$ غیر صفر باشد آنگاه در یک فاصله‌ی باز I شامل $x_۰$، تابع مشتق‌پذیر $y = y(x)$ وجود دارد به قسمی که برای هر x در I داریم $f(x, y(x)) = ۰$ و $\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}$.

اثبات. طبق فرض $f_y(x_۰, y_۰) \neq ۰$، مثلاً فرض کنیم $f_y(x_۰, y_۰) > ۰$. عدد مثبت b را به قسمی در نظر می‌گیریم که $f_y(x_۰, y_۰) > b > ۰$. از پیوستگی f_y نتیجه می‌شود که در یک همسایگی مناسب به شعاع $\delta_۱$ از نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ داریم $f_y(x,y) > ۰$. همچنین از پیوستگی f_x و f_y نتیجه می‌شود عدد $M > ۰$ وجود دارد که برای در این همسایگی، $|f_x(x,y)| < M$ و $|f_y(x,y)| < M$. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اعداد $۰ < \theta_۱ < ۱$ و $۰ < \theta_۲ < ۱$ وجود دارند به قسمی که

$$f(x,y) - f(x_۰, y) = f_x(\theta_۱ x + (۱ - \theta_۱) x_۰, y)(x - x_۰)$$

$$f(x_۰, y) - f(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, \theta_۲ y + (۱ - \theta_۲) y_۰)(y - y_۰)$$

با توجه به این که $f(x_۰, y_۰) = ۰$، به ازای $\Delta x := x - x_۰$ و $\Delta y := y - y_۰$ داریم

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \Big[f(x,y) - f(x_۰, y)\Big] + \Big[f(x_۰, y) - f(x_۰, y_۰)\Big] \\ &= f_x(\theta_۱ x + (۱ - \theta_۱)x_۰, y)\Delta x + f_y(x_۰, \theta_۲ y + (۱ - \theta_۲) y_۰)\Delta y \end{aligned} \quad (۱۳)$$

برای $\delta_۲ < \text{Min}\{\delta_۱, \frac{b\delta_۱}{M}\}$ و بنابر پیوستگی f_x، از $||(x,y) - (x_۰, y_۰)|| < \delta_۲$ نتیجه می‌شود

$$\Big||f_x(\theta_۱ x + (۱ - \theta_۱)x_۰, y)\Big||x - x_۰| < b\delta_۱ \quad (۱۴)$$

پس برای $|x - x_۰| < \delta_۲$ از روابط (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود

$$f(x, y_۰ + \delta_۲) > ۰ \quad , \quad f(x, y_۰ - \delta_۲) < ۰$$

پس بنابر قضیه‌ی بولتسانو و با توجه به رابطه‌ی $f_y(x,y) > ۰$، عدد یکتای $y_۰ - \delta_۲ < y < y_۰ + \delta_۲$ وجود دارد که $f(x,y) = ۰$. اکنون تابع مورد نظر با ضابطه‌ی $y = y(x)$ مشخص می‌شود.

۳−۱۰−۳ پیوست ۳

در این بخش قضیه‌ی تیلور مرتبه n را برای توابع حقیقی چند متغیره‌ی حقیقی مطرح می‌کنیم. برای این منظور ابتدا به معرفی دسته‌ای از نگاشت‌های خطی روی فضای برداری توابع می‌پردازیم. در اینجا نیز برای سادگی فقط توابع حقیقی دو متغیره را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنیم V مجموعه‌ی توابع حقیقی دو متغیره باشد که در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ دست کم $n+1$ بار مشتقات جزئی مخلوط پیوسته داشته باشند. با عمل جمع برداری $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$ و ضرب اسکالری $(\lambda f)(x,y) = \lambda f(x,y)$، مشاهده می‌شود که V یک فضای برداری است. روی این فضای برداری نگاشت $\frac{\partial}{\partial x} : V \to V$ با ضابطه‌ی $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ یک نگاشت خطی است زیرا

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(g)$$

به همین ترتیب نگاشت $\frac{\partial}{\partial y} : V \to V$ با ضابطه‌ی $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$، نگاشت $\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} : V \to V$ با ضابطه‌ی $f \mapsto \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$ و به طور کلی به کمک مشتقات جزئی مخلوط، نگاشت‌های خطی مشابهی روی V قابل تعریف هستند. در ادامه‌ی بحث از این نگاشت‌ها با قاعده‌ی معمول جمع، ضرب اسکالری و با توان رسانیدن نگاشت‌های خطی جدیدی می‌سازیم. برای مثال اگر $h, k \in \mathbb{R}$ دو اسکالر باشند آنگاه ضابطه‌ی نگاشت $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ عبارت است از $f \mapsto h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$ و منظور از $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^۲$ نگاشت $h^۲\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + ۲hk\frac{\partial^۲}{\partial x \partial y} + k^۲\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}$ است و الی آخر.

تابع حقیقی یک متغیره‌ی F را با ضابطه‌ی $F(t) = f(x_\circ + ht, y_\circ + kt)$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌ی تیلور برای توابع حقیقی یک متغیره در یک همسایگی $t = \circ$، عدد حقیقی $\circ < \theta < ۱$ وجود دارد که:

$$F(t) = F(\circ) + F'(\circ)t + \frac{F''(\circ)}{۲!}t^۲ + \cdots + \frac{F^{(n)}(\circ)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+۱)}(\theta)}{(n+۱)!}t^{n+۱} \quad (۱۵)$$

به ویژه برای $t = ۱$ داریم:

$$F(۱) = F(\circ) + F'(\circ) + \frac{F''(\circ)}{۲!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(\circ)}{n!} + \frac{F^{(n+۱)}(\theta)}{(n+۱)!}$$

بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای برای $x(t) = x_\circ + ht$ و $y(t) = y_\circ + kt$ داریم:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ + ht, y_\circ + kt)\ \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ + ht, y_\circ + kt)\ \frac{dy}{dt}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= h\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ + ht, y_\circ + kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ + ht, y_\circ + kt) \\
&= \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)(f)\Big](x_\circ + ht, y_\circ + kt)
\end{aligned}
$$

به ویژه برای $t = \circ$ داریم:

$$F'(\circ) = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)(f)\Big](x_\circ, y_\circ)$$

به شکل مشابه با استفاده‌ی مکرر از قاعده‌ی زنجیره‌ای و به استقرا مشاهده می‌شود که:

$$F^{(n)}(\circ) = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^n(f)\Big](x_\circ, y_\circ)$$

$$F^{(n+۱)}(\theta) = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^{n+۱}(f)\Big](x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k)$$

از بازنویسی رابطه‌ی (۱۵) به قضیه‌ی زیر دست می‌یابیم:

قضیه ۳–۱۰–۱۰ (تیلور) فرض کنیم مشتقات جزئی مخلوط مرتبه‌ی $n + ۱$ تابع دومتغیره‌ی f در یک همسایگی شامل $(x_\circ, y_\circ)$ وجود داشته و پیوسته باشند. در این صورت برای $h, k \in \mathbb{R}$ که $(x_\circ + h, y_\circ + k)$ در این همسایگی قرار بگیرد داریم:

$$
\begin{aligned}
&f(x_\circ + ht, y_\circ + kt) = f(x_\circ, y_\circ) + \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)(f)\Big](x_\circ, y_\circ) + \\
&\frac{۱}{۲!}\Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^۲(f)\Big](x_\circ, y_\circ) + \cdots + \frac{۱}{n!}\Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^n(f)\Big](x_\circ, y_\circ) + R_n
\end{aligned}
$$

به قسمی که برای عدد حقیقی $\circ < \theta < ۱$،

$$R_n = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^{n+۱}(f)\Big](x_\circ + \theta h, y_\circ + \theta k)$$

تمرین های فصل سوم

۱) مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x,y) = \ln x + \sqrt{x^۲ + y^۲}$

ب) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

ج) $f(x,y,z) = x^{yz}$

۲) فرض کنید f تابعی سه متغیره باشد که $f(x-y+z, x+y+z, x-y-z) = ۳x-y+z$

الف) مطلوب است تعیین $f(x,y,z)$.

ب) اگر $g(x,y,z) = f(x^۲, y^۲, z^۲)$، مطلوب است تعیین سطوح تراز g.

ج) با مفروضات قسمت (ب) ثابت کنید

$$(\frac{\partial g}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial y})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial z})^۲ = ۴g(x,y,z)$$

۳) اگر $z = f(x,y)$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ نشان دهید

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^۲ + \frac{۱}{r^۲}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲$$

۴) با محاسبه‌ی مستقیم مشتق‌های جزئی برای تابع $f(x,y,z) = e^{xyz}$ تحقیق کنید $f_{xy} = f_{yx}$ و $f_{xyz} = f_{zyx} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx}$.

۵) برای $w = \frac{z}{y+x}$ مشتق جزئی مرتبه‌ی چهارم $\frac{\partial^۴ w}{\partial^۲ z \partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

٦) نشان دهید توابع $u(x,y) = e^x \cos y$ و $v(x,y) = e^x \sin y$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

ب) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

ج) $u_{xx} + u_{yy} = ۰$

د) $v_{xx} + v_{yy} = ۰$

معادلات (الف) و (ب) که معادلات کوشی – ریمان نامیده می‌شوند در نظریه‌ی توابع مختلط از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. هر یک از معادلات (ج) و (د) یک معادله‌ی لاپلاس در فضای دو بعدی نامیده می‌شود.

۷) معادله‌ی $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰$، که در آن u یک تابع سه متغیره‌ی است یک معادله‌ی لاپلاس در فضای سه بعدی نامیده می‌شود. نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی زیر در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند.

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

۸) تابع $f(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ مفروض است.

(الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است و مشتقات جزیی $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در این نقطه به دست آورید.

(ب) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۹) نشان دهید اگر یک تابع دو متغیره‌ی f، همگن از درجه‌ی n باشد آنگاه مشتقات جزیی f_x و f_y، همگن از درجه‌ی $n-1$ هستند.

۱۰) (الف) فرض کنید توابع f و g توابعی یک متغیره هستند که روی $\mathbb{R}$ حداقل دو بار مشتق‌پذیرند. اگر c یک عدد حقیقی غیر صفر باشد، نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$ یک جواب برای معادله‌ی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (موسوم به معادله موج) است.

(ب) تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر جوابی برای معادله‌ی موج هستند.

(۱) $u(x,t)=x^2+c^2t^2$

(۲) $u(x,t)=\sin x\sin ct$

(۳) $u(x,t)=e^x\cosh ct$

۱۱) برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=2xy-3xz+yz$، نمو تابع یعنی $\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)$ را در حالتی که $(a,b,c)=(2,1,4)$، $\Delta x=3$، $\Delta y=-1$ و $\Delta z=2$ محاسبه کنید.

۱۲) مشتق کل هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x,y,z)=x^2y-xy^3+x^3y^2$

(ب) $f(x,y,z)=\frac{x+y}{y+z}$

(ج) $f(x_1,x_2,...,x_n)=x_1x_2...x_n$

۱۳) با استفاده از مشتق کل، مقدار تقریبی $\sqrt{(1/036)^2+(1/99)^3}$ را به دست آورید.

۱۴) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۱۵) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$$

در $(۰,۰)$ پیوسته است و مشتقات جزیی آن وجود دارند اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۶) تابع $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^۲(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در مبدأ پیوسته است.

ب) نشان دهید f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۱۷) نشان دهید برای تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^۲+y^۲} & x^۲+y^۲ \neq ۰ \\ ۰ & x^۲+y^۲ = ۰ \end{cases}$$

مشتقات جزیی وجود دارند اما f در مبدأ ناپیوسته است.

۱۸) تابع f را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(y-۱)}{\sqrt{x^۲+(y-۱)^۲}} & (x,y) \neq (۰,۱) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۱) \end{cases}$$

الف) نشان دهید f در $(۰,۱)$ پیوسته است.

ب) مقادیر f_x و f_y را در $(۰,۱)$ به دست آورید.

ج) آیا f در $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

۱۹) فرض کنید $f(x,y) = ۳xy^۲ - ۵x - ۲xy$ و $\Delta x = ۲$ و $\Delta y = -۱$. نمو تابع f در $(-۱,۳)$ و مشتق کل تابع را در این نقطه محاسبه کنید.

۲۰) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی زیر همه جا مشتق‌پذیر است.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^۴+y^۴}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

۲۱) اگر تابع دو متغیره‌ی f همگن از درجه‌ی n با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد، نشان دهید

$$x^2 f_{xx}(x,y) + 2xy f_{xy}(x,y) + y^2 f_{yy}(x,y) = n(n-1)f(x,y)$$

۲۲) اگر توابع f و g حداقل دو بار مشتق‌پذیر باشند و تابع u به صورت

$$u(x,y) = \frac{1}{x}[f(x+y) + g(x-y)]$$

تعریف شده باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

۲۳) اگر تابع z، به عنوان تابعی از x و y، به طور ضمنی توسط رابطه‌ی $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$ تعریف شده باشد، عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

۲۴) فرض کنید $u = xyz$. نشان دهید اگر u و z توابعی از متغیرهای مستقل x و y در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy(\frac{\partial z}{\partial x}) + yz$$

و اگر x، y و z متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz$$

۲۵) فرض کنید تابع f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = f(\frac{x+y}{y})$. ثابت کنید

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

۲۶) فرض کنید g تابعی یک متغیره و مشتق‌پذیر باشد. تابع برداری $\mathbf{F}$ را به صورت

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}x\mathbf{i} + \frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}y\mathbf{j}$$

تعریف می‌کنیم. در ناحیه‌ای که شامل $(0,0)$ نباشد، تابع f را به قسمی بیابید که $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$.

۲۷) اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = \frac{y}{f(x^۲ + y^۲)}$، ثابت کنید

$$\frac{-۱}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^۲}$$

۲۸) فرض کنید $u(x,y) = e^y \cos x$، $x = ۲t$، $y = t^۲$ و $g(t) = u(x(t), y(t))$. تابع $g''(t)$ را با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای به دست آورید.

۲۹) فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد، $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ و $y = y(r,\theta) = r\sin\theta$. ثابت کنید $(\frac{\partial z}{\partial r})^۲ + \frac{۱}{r^۲}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲$. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بر حسب $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

۳۰) فرض کنید f تابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. با فرض این که $z = f(x,y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند نشان دهید $w = f(x+y, x-y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} = ۱$ صدق می‌کند.

۳۱) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $z = xy + f(x^۲ + y^۲)$ در معادله‌ی $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^۲ - x^۲$ صدق می‌کند.

۳۲) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و $z = f(x,y)$. اگر $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$ و $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α ثابت)، نشان دهید $(\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial u})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial v})^۲$.

۳۳) ثابت کنید تابع $f(x,t) = \int_۰^{\frac{x}{۲\sqrt{kt}}} e^{-\sigma^۲} d\sigma$ در معادله‌ی دیفرانسیل $k\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} - \frac{\partial f}{\partial t} = ۰$ صدق می‌کند (k ثابت).

۳۴) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید

الف) $z = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ب) $w = f(\frac{xy}{x^۲ + y^۲})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ج) $z = f(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

د) $z = xf(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند.

۳۵) فرض کنید f و g دوبار مشتق‌پذیرند و $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$. نشان دهید $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$.

۳۶) فرض کنید معادله‌ی $xz^{۲} = \ln(y^{۲} + z^{۲})$، تابع z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y بیان می‌کند. مطلوب است تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$.

۳۷) تابع $z = z(x, y)$ به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = ۰$ داده شده است. با فرض این که f مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

۳۸) فرض کنید f یک تابع دو متغیره با مشتقات جزیی پیوسته باشد و

$$f(x_۰, y_۰) = f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$$
$$f_{xx}(x_۰, y_۰)f_{yy}(x_۰, y_۰) - f_{xy}^{۲}(x_۰, y_۰) > ۰$$

الف)نشان دهید نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰)$ یک نقطه‌ی تنها برای نمودار $f(x, y) = ۰$ است، یعنی یک همسایگی از P وجود دارد که در آن f تنها در P صفر می‌شود.

ب) نشان دهید که مبدا یک نقطه‌ی تنها برای خم به معادله‌ی $x^{۳} - y^{۳} + xy^{۲} - yx^{۲} + x^{۲} + y^{۲} = ۰$ است.

۳۹) مکان هندسی نقاطی از رویه‌ی $x^{۲} + ۲y^{۲} + ۳z^{۲} + xy + ۲xz + ۴yz = ۸$ را بیابید که صفحه‌ی مماس در آن نقاط موازی صفحه xy باشد.

۴۰) خط مماس بر خم γ حاصل از برخورد دو رویه‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۹$ و $xy + z = ۰$ را در نقطه‌ی $(۲, ۱, -۲)$ بیابید.

۴۱) صفحات مماس در $M = (x, y, z)$ برای $x > ۰$، $y > ۰$ و $z > ۰$ بر رویه‌ی

$$x^{۲/۳} + y^{۲/۳} + z^{۲/۳} = a^{۲/۳} \quad (\text{عددی ثابت و مثبت } a)$$

محور ox و oy و oz را به ترتیب در نقاط A، B و C قطع می‌کنند. نشان دهید $OA^{۲} + OB^{۲} + OC^{۲}$ یک عدد ثابت است.

۴۲) نشان دهید اگر f همه جا مشتق‌پذیر باشد آنگاه صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = xf(\frac{y}{x})$ در هر نقطه، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۴۳) بیضی‌گون به معادله‌ی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۱$ مفروض است.

(الف) نقاطی از رویه را مشخص کنید که قائم بر رویه در این نقاط با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد.

(ب) در چه نقاطی از رویه‌ی فوق صفحات مماس بر رویه موازی صفحات مختصات است؟ چرا؟

۴۴) خم C فصل مشترک رویه‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ و $x^۲ + y^۲ + z = ۰$ است. معادلات پارامتری خط مماس بر C را در نقطه‌ی $(۱, ۰, -۱)$ بیابید.

۴۵) الف) صفحات مماس بر رویه‌ی $z = \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲}$ و عمود بر خط $x - ۱ = y = z - ۳$ را مشخص کنید.

ب) نقاطی از رویه‌ی قسمت قبل را مشخص کنید که صفحات مماس بر رویه در آن نقاط عمود بر محور zها باشند.

۴۶) نقاطی را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ تعیین کنید که در آن نقاط بردار گرادیان تابع $f(x,y) = \ln(\frac{۱}{x} + y)$ بردار $-\frac{۱۶}{۹}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ باشد.

۴۷) رویه‌ی $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ مفروض است.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر رویه را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ به دست آورید.

(ب) نقطه‌ی برخورد دیگر خط عمود با رویه را به دست آورید.

(ج) ثابت کنید صفحه‌ی مماس در هر نقطه از رویه‌ی فوق دقیقا در دو خط راست با رویه اشتراک دارد.

۴۸) رویه‌ی $z = x^۲ + y^۲$ و نقاط $A = (۱, ۱, ۰)$ و $B = (۲, ۲, ۲)$ مفروضند.

(الف) معادله‌ی خطی را به دست آورید که از A بگذرد و بر این رویه عمود باشد.

(ب) معادله‌ی صفحه‌ای شامل A و B را به دست آورید که بر رویه مماس باشد.

۴۹) نشان دهید بر مخروط $z^۲ = ۲x^۲ + ۴y^۲$ خطی وجود دارد که صفحه‌ی مماس بر مخروط در امتداد آن با صفحه‌ی $۱۲x + ۱۴y + ۱۱z = ۲۵$ موازی است. خط و صفحه‌ی مماس را به دست آورید.

۵۰) مطلوب است معادلات پارامتری منحنی حاصل از برخورد سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ و صفحه‌ی $z = ۲$. اگر در هر نقطه از این منحنی، خطی عمود بر سهمی‌گون رسم کنیم، مجموعه‌ی این خطوط تشکیل مخروطی در فضا می‌دهند. معادله‌ی مخروط را به دست آورید.

۵۱) نقاطی را بر روی رویه‌ی $۲x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ پیدا کنید که صفحه‌ی مماس بر رویه در این نقاط عمود بر فصل مشترک دو صفحه‌ی $y = x$ و $y = z$ باشد.

۵۲) معادله‌ی خطوطی را بیابید که از مبدأ مختصات گذشته بر رویه‌ی $x^۲ + y^۲ + ۹z^۲ = ۱$ عمود باشند.

۵۳) ثابت کنید صفحات مماس بر رویه‌ی $xyz = a^{۳}$ ($a > ۰$ ثابت) با صفحات مختصات، چهاروجهی‌هایی با حجم ثابت می‌سازند.

۵۴) معادله‌ی کلیه‌ی صفحات مماس بر کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۳$ را تعیین کنید که شامل خط با معادلات پارامتری $x = t + ۲$، $y = -۲t$ و $z = t + ۱$ باشند.

۵۵) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط قائم بر هر یک از رویه‌های زیر را در نقطه‌ی مورد نظر پیدا کنید.

(الف) $xyz = a^{۳}$، P نقطه‌ی دلخواه بر رویه.

(ب) $z = ۲\sin x \cos y$، $P = (\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}, ۱)$.

۵۶) در کدام‌یک از نقاط مخروط $x^{۲} + y^{۲} - z^{۲} = ۰$، صفحه‌ی مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟ توضیح دهید.

۵۷) معادلات صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌ی درجه‌ی دوم $Ax^{۲}+By^{۲}+Cz^{۲} = ۱$ در نقطه‌ی دلخواه از این رویه را پیدا کنید.

۵۸) بیضی‌گون $x^{۲} + y^{۲} + ۳z^{۲} = ٦٦$ دو صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ دارد. معادله‌ی این صفحات را همراه با نقاط تماسشان پیدا کنید.

۵۹) نشان دهید رویه‌های $z = xy - y^{۲} + ۸y - ۵$ و $z = e^{۲x+y+۴}$، در نقطه‌ی $P = (-۳, ۲, ۱)$ بر هم مماسند و صفحه‌ی مماس مشترکشان را پیدا کنید.

٦۰) فرض کنید C خمی با معادله‌ی $F(x, y) = ۰$ باشد که در آن F دارای مشتقات جزئی پیوسته‌ای است که همزمان صفر نمی‌شوند.

الف) نشان دهید معادله‌ی خط مماس بر C در $(x_۰, y_۰)$ به شکل زیر است:

$$F_x(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + F_y(x_۰, y_۰)(y - y_۰) = ۰$$

ب) خطوط مماس و قائم بر خم‌های $x^{۳}y - x^{۲}y^{۲} + xy^{۳} = ۱$ و $x^y = y^x$ را در $(۱, ۱)$ پیدا کنید.

٦۱) فرض کنید درجه‌ی حرارت در نقطه‌ی (x, y) از صفحه‌ی xy با رابطه‌ی $T(x, y) = \frac{۴x}{x^{۲} + y^{۲}}$ بیان می‌شود. ثابت کنید در هر نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ روی دایره‌ی $(x - ۲)^{۲} + y^{۲} = ۴$، بین همه سوها، در سوی شعاع این دایره بیشترین مقدار تغییر درجه حرارت را داریم. این مقدار تغییر چقدر است؟

۶۲) کلیه‌ی سوهای $\mathbf{u}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$ را پیدا کنید که برای تابع

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y-۲ & y=۱ \quad \text{یا} \quad x=۱ \\ t & y\neq ۱ \ , \ x\neq ۱ \end{cases}$$

مشتق سویی f در سوی $\mathbf{u}$ و در نقطه‌ی $(۱,۱)$ وجود داشته باشد.

۶۳) سوهایی را بدست آورید که تابع $f(x,y)=(x+۱)^۲+(y+۱)^۲$ در $(\circ,\circ)$ دارای مشتق سویی برابر با ۲ باشد.

۶۴) برای هر یک از توابع زیر مشتق سویی را در نقطه‌ی P و در جهت بردار $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

الف) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}\ ,\ P=(-۱,۴)\ ,\ f(x,y)=x^۳-۲xy+y^۲+۸$

ب) $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}\ ,\ P=(۱,۳)\ ,\ f(x,y)=\ln(x^۲+y^۲)$

ج) $\mathbf{a}=-۱\circ\mathbf{i}+۱\circ\mathbf{j}-۵\mathbf{k}\ ,\ P=(-۱,۱,۲)\ ,\ f(x,y,z)=\dfrac{z}{xy}$

۶۵) برای $f(x,y,z)=\ln(x+y+z)$، مشتق سویی f را در $(۲,۳,-۴)$ و در سویی که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد پیدا کنید.

۶۶) اگر $f(x,y)=xy$، بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}}f(۳,۴)=\circ$.

۶۷) تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin(\dfrac{y}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(\circ,\circ) \\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ) \end{cases}$$

مفروض است. کلیه‌ی سوهایی را به دست آورید که f در آن‌ها در مبدأ مختصات دارای مشتق سویی باشد.

۶۸) تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(\circ,\circ) \\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ) \end{cases}$ مفروض است.

الف) مشتق سویی این تابع را در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ و در سوی بردار $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ تعیین کنید.

ب) مطلوب است تعیین $\nabla f(\circ,\circ)\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶۹) مشتق سویی توابع زیر را در نقاط وجهت‌های داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x,y,z)=\cos(xy)+\sin(yz)\ ,\ P_\circ=(\circ,\pi,۱)\ ,\ \mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

ب) $g(x,y,z)=ze^{xy}\ ,\ P_\circ=(۱,\circ,۱)\ ,\ \mathbf{v}=\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$

۷۰) تابع $f(x,y) = x^۲ - ۲xy^۲$ و نقطه‌ی $P_۰ = (۱, -۲)$ مفروضند.

الف) از نقطه‌ی $P_۰$ در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت افزایش یابد؟

ب) در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش یابد؟

۷۱) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = ۴ - x^۲ - y^۲$ و نقطه‌ی $(۱, ۱, ۲)$ بر آن مفروضند. مشخص کنید که از این نقطه در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع با بیشترین سرعت کاهش یابد و در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع تغییر نکند؟

۷۲) اکسترمم‌های موضعی (نسبی) توابع زیر و نوع آن‌ها را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ تعیین کنید.

الف) $f(x,y) = xy(۱ - x^۲ - y^۲)$

ب) $f(x,y) = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + xy \qquad (x > ۰, y > ۰)$

۷۳) به کمک یک تابع دو متغیره‌ی مناسب و محاسبه‌ی مینیمم مطلق این تابع، فاصله‌ی بین دو خط متنافر $L_۱ : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t - ۱ \end{cases}$ و $L_۲ : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ را تعیین کنید.

۷۴) روی کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$، نقطه‌ای را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطه‌ی $(۲, ۰, ۰)$ و $(۰, ۲, ۰)$ مینیمم باشد.

۷۵) ابعاد مکعب مستطیلی را در یک هشتم اول فضا $(z \geq ۰, y \geq ۰, x \geq ۰)$ بیابید که یک رأس آن در مبدأ مختصات، رأس مقابل این رأس روی صفحه‌ی $x + ۲y + ۳z = ۱$ و حجم آن ماکزیمم باشد.

۷۶) فرض کنید x، y و z اضلاع یک مثلث، p نصف محیط این مثلث و S مساحت این مثلث باشد. به کمک فرمول $S^۲ = p(p-x)(p-y)(p-z)$ ثابت کنید بین همه مثلث‌های با محیط ثابت $۲k$، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۷۷) نقطه‌ای بر خط $L : \begin{cases} x + y = ۱ \\ y + z = ۱ \end{cases}$ بیابید که مجموع مربعات فواصل آن از صفحات مختصات کمترین مقدار ممکن باشد.

۷۸) مثلث ABC با اضلاعی به طول‌های a، b و c و مساحت ۴ مفروض است. M نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌اش تا اضلاع مثلث به ترتیب x، y و z می‌باشد.

الف) تحقیق کنید $ax + by + cz = ۸$.

ب) x و y و z را طوری تعین کنید که $x^۲ + y^۲ + z^۲$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۷۹) صفحه $\frac{x}{٦a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = ۱$ مفروض است. a و b و c $(a, b, c > ۰)$ را چنان بیابید که در شرط $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱$ صدق کنند و حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی فوق با صفحات مختصات ماکزیمم باشد (حجم هرم $\frac{۱}{٦}$ حجم متوازی‌السطوحی است که روی یال‌های آن ساخته می‌شود).

۸۰) معادله‌ی کره‌ای به مرکز مبدا را بنویسید که رویه‌ی استوانه‌ای $xy = ۱$ را در دو و تنها دو نقطه قطع کند.

۸۱) بیشترین میزان افزایش تابع $f(x,y,z) = xy^۲z^۳$ در نقطه‌ی $P = (۲, ۱, -۱)$ چقدر است و در چه سویی اتفاق می‌افتد؟

۸۲) فرض کنید تابع دو متغیره‌ی f در داخل یک دایره یا مستطیل D مشتق‌پذیر بوده و در هر نقطه‌ی داخل آن بردار گرادیان برابر با صفر باشد. نشان دهید f روی D یک تابع ثابت است.

۸۳) برای توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تعیین کنید ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه‌ی زینی هستند.

الف) $f(x,y) = ۲x^۲ + (y-۱)^۲$

ب) $f(x,y) = ۸x^۳ + y^۳ - ۱۲xy + ٦$

ج) $f(x,y) = (x-۱)\ln xy \quad (xy > ۰)$

۸۴) فرض کنید تابع f روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x^۲ - y^۲$ تعریف شده باشد. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D به دست آورید.

۸۵) به کمک بسط تیلور ثابت کنید تابع حقیقی و سه متغیره‌ی f با مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته، دارای یک مینیمم موضعی در نقطه‌ی بحرانی $P = (a, b, c)$ است هرگاه سه مقدار A، D و E که توسط روابط

$$A = f_{xx}\ ,\ D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, E = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شوند، در نقطه‌ی P مثبت باشند. همچنین f در P دارای یک ماکزیمم موضعی است هرگاه در نقطه‌ی P داشته باشیم $A < ۰ \ , \ D > ۰ \ , \ E < ۰$.

به کمک آنچه بیان شد، مقادیر ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + ۲z^۲ + xy - ۹x - ۳y + ۴z + ۱۰$ را پیدا کنید.

۸۶) آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - xyz$ در مبدأ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

۸۷) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را با قید داده شده در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x,y) = x^۲ + ۸y^۲ \ , \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱$

ب) $f(x,y,z) = ۲x - ۳y + z - ۱ \ , \ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۴$

ج) $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ \ , \ x - ۲y + ۲z = ٦$

د) $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ \ , \ ۲x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۲$

ه) $f(x,y,z) = xy + xz \ , \ x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ = ۴$

۸۸) با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ مطلوب است:

الف) فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (-۱, ۴)$ و خط $۱۲x - ۵y + ۷۱ = ۰$.

ب) نقاطی از بیضی با معادله‌ی $۳x^۲ - ۲xy + ۳y^۲ - ۲ = ۰$ که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدا کمترین یا بیشترین مقدار است.

ج) فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (۱, ۱, ۱)$ و صفحه‌ی π به معادله‌ی $۲x + ٦y - ۹z + ۱۲ = ۰$.

د) فاصله‌ی بین مبدأ و مقطع صفحات $x + ۲y - z - ۵ = ۰$ و $x - y + z - ۳ = ۰$.

۸۹) اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را روی ناحیه‌های مشخص شده تعیین کنید.

الف) $f(x,y) = x^۲ + xy \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$

ب) $f(x,y) = ۲x - y^۲ \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ ۰ \leq x, ۰ \leq y, x + y \leq ۱\}$

ج) $f(x,y) = \sin(\frac{\pi xy}{۲}) \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ ۱ \leq x \leq ۲, ۱ \leq y \leq ۲\}$

د) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq \mathbf{0} \\ ۰ & (x,y) = \mathbf{0} \end{cases} \ , D = \{(x,y) : ۱ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$

۹۰) درجه‌ی حرارت نقاط ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;:\; x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ با رابطه‌ی $T(x,y) = x^۲ + ۲y^۲ - x$ داده می‌شود. گرم‌ترین و سردترین نقاط D کدامند؟

۹۱) اکسترمم‌های مقید توابع زیر را تحت شرط‌های داده شده تعین کنید.

الف) $f(x,y,z) = x + y + z \;,\; g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۳ = ۰$

ب) $f(x,y,z) = xyz \;,\; g(x,y,z) = ۲xy + ۳xz + yz = ۷۲$

ج) $f(x,y,z) = xy \;,\; g(x,y,z) = y^۲ + z^۲ - ۱$

۹۲) نقطه‌ای را بر صفحه‌ی $x + ۴y + ۳z = ۲$ تعیین کنید که تابع $f(x,y,z) = ۲x^۲ + ۳y^۲ + z^۲$ در آن دارای کمترین مقدار باشد.

۹۳) نزدیکترین نقطه به مبدا مختصات و واقع بر رویه‌ی $xyz = ۸$ را تعیین کنید و نشان دهید خط واصل از مبدا به این نقطه، بر رویه عمود است.

۹۴) تعیین کنید در کدام مثلث مجموع سینوس زوایا بیشترین مقدار ممکن را دارد؟

فصل ۴

انتگرال‌های چندگانه

۴-۱ مفاهیم اولیه و تعریف‌ها

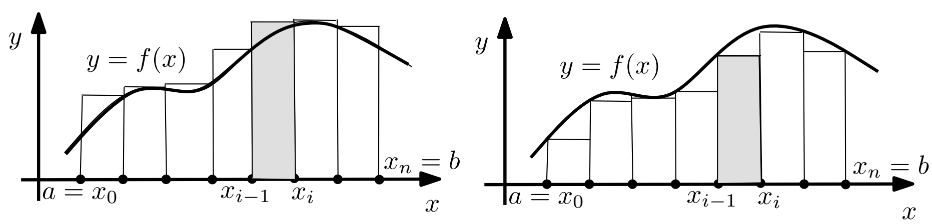
مفهوم انتگرال چندگانه برای توابع حقیقی چند متغیره، تعمیم طبیعی انتگرال توابع حقیقی یک متغیره است. انگیزه‌ی هندسی برای تعریف انتگرال معین توابع حقیقی یک متغیره، تعیین مساحت نواحی در صفحه و برای توابع دو متغیره، تعیین حجم نواحی در فضا بوده است. برای درک بهتر مفهوم انتگرال چندگانه ابتدا به یادآوری تعریف انتگرال معین توابع حقیقی یک متغیره می‌پردازیم. روش‌های مختلفی برای بیان انتگرال معین در کتاب‌های مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی یک متغیره مطرح می‌شود. در این کتاب مفهوم انتگرال به کمک حالت خاصی از مجموع‌های بالایی و پایینی ریمان بیان می‌شود.

فرض کنیم تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ کراندار باشد. یک افراز برای بازه‌ی $[a,b]$ عبارت است از مجموعه‌ی $P = \{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ به قسمی که $a = x_۰ < x_۱ ... < x_n = b$. فرض کنیم M_i کوچکترین کران بالای مقادیر $f(x)$ و m_i بزرگترین کران پایین این مقادیر برای $x \in [x_{i-۱}, x_i]$ باشند. اگر f پیوسته باشد این مقادیر به ترتیب ماکزیمم و مینیمم تابع f بر $[x_{i-۱}, x_i]$ هستند. قرار می‌دهیم:

$$U(f,P) := \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta x_i \quad , \quad L(f,P) := \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta x_i$$

مقادیر $U(f,P)$ و $L(f,P)$ به ترتیب مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی تابع f برای افراز P نامیده می‌شوند. اگر f تابعی با مقادیر غیرمنفی باشد، این مقادیر تقریب‌هائی از مساحت

ناحیه‌ی محدود به نمودار f بین خطوط $x = a$، $x = b$ و محور x هستند. برای این دسته از توابع، $U(f, P)$ دارای مقداری بیشتر یا مساوی مساحت این ناحیه و $L(f, P)$ دارای مقداری کوچک‌تر یا مساوی مساحت این ناحیه است. اگر بتوانیم با انتخاب افرازهای مناسب تفاضل این دو مقدار را به دلخواه کوچک کنیم بنابر ویژگی‌های اعداد حقیقی، عدد حقیقی یکتائی وجود دارد که از تمام مجموع‌های ریمان بالائی f برای افراز دلخواه کوچکتر و از تمام مجموع‌های ریمان پائینی تابع f برای افراز دلخواه بزرگتر است. این عدد یکتا را انتگرال معین f روی $[a, b]$ می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر، در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، افراز P_ε برای $[a, b]$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$، تابع f را روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر می‌نامیم. در این حالت عدد یکتائی مانند I وجود دارد به قسمی که برای هر افراز P از $[a, b]$ داریم $L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$. عدد I را انتگرال معین f روی $[a, b]$ می‌نامیم و با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نمایش می‌دهیم (شکل ۴ــ۱).



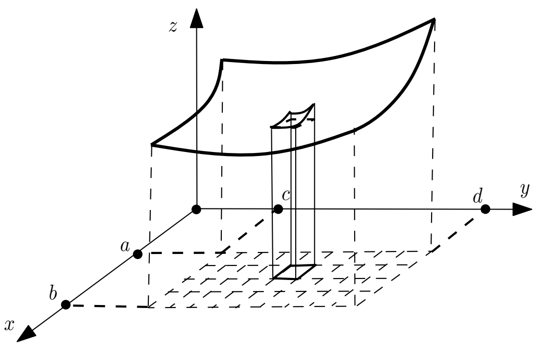
شکل ۴ــ۱ تقریب مساحت با مجموع‌های ریمان بالائی و پایینی.

اکنون برای تعمیم این مفهوم به توابع دو متغیره، فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی f روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ کراندار باشد. افراز $P_x = \{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ را برای بازه‌ی $[a, b]$ و افراز $P_y = \{y_۰, y_۱, ..., y_m\}$ را برای بازه‌ی $[c, d]$ در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی $P := \{[x_{i-۱}, x_i] \times [y_{j-۱}, y_j] \mid ۱ \leq i \leq n \ , \ ۱ \leq j \leq m\}$ را یک افراز برای مستطیل $D := [a, b] \times [c, d]$ می‌نامیم. این افراز مستطیل D را به $m \times n$ مستطیل کوچکتر تقسیم می‌کند. باید توجه داشت که مفهوم افراز برای یک بازه‌ی بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ با افراز یک مستطیل در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ کمی متفاوت است ولی این تفاوت در تعریف انتگرال تاثیری ندارد. برای $i = ۱, ..., n$ و $j = ۱, ..., m$ مجموعه‌ی $D_{ij} := [x_{i-۱}, x_i] \times [y_{j-۱}, y_j]$ را یک زیرمستطیل D می‌نامیم. فرض کنیم M_{ij} کوچکترین کران بالای مقادیر $f(x, y)$ بر زیرمستطیل D_{ij} و m_{ij} بزرگترین کران پایین برای این مقادیر در D_{ij} باشند. مانند توابع یک متغیره، اگر f پیوسته باشد این مقادیر به ترتیب همان ماکزیمم و مینیمم تابع f بر D_{ij}

هستند. قرار می‌دهیم:

$$U(f,P) := \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \quad , \quad L(f,P) := \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$$

همانند آنچه برای توابع حقیقی یک متغیره گفتیم، مقادیر $U(f,P)$ و $L(f,P)$ به ترتیب مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی تابع دو متغیره‌ی حقیقی f متناظر با افراز P نامیده می‌شوند. اگر f تابعی با مقادیر غیرمنفی باشد، این مقادیر تقریب‌هائی از حجم ناحیه‌ی محدود به نمودار f بین صفحه‌های $x = a$، $x = b$، $y = c$، $y = d$ و صفحه‌ی xoy هستند. برای این دسته از توابع، $U(f,P)$ دارای مقداری بیشتر یا مساوی حجم این ناحیه و $L(f,P)$ دارای مقداری کوچک‌تر یا مساوی حجم این ناحیه است.



شکل ۴–۲ مفهوم حجم زیر نمودار تابع دو متغیره‌ی حقیقی f به کمک انتگرال دوگانه روی مستطیل $[a,b] \times [c,d]$.

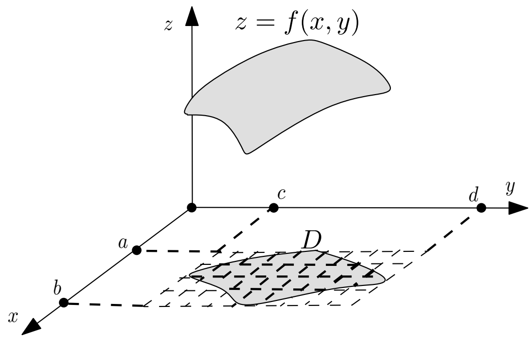
اگر بتوانیم با انتخاب افرازهای مناسب تفاضل این دو مقدار را به دلخواه کوچک کنیم، بنابر ویژگی‌های اعداد حقیقی، عدد حقیقی یکتائی وجود دارد که بین مجموع‌های ریمان بالائی و مجموع‌های ریمان پائینی تابع f برای افراز دلخواه قرار می‌گیرد. این عدد یکتا را انتگرال دوگانه‌ی f روی $[a,b] \times [c,d]$ می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر، در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، افراز P_ε برای مستطیل $[a,b] \times [c,d]$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$، تابع f را روی مستطیل $[a,b] \times [c,d]$ انتگرال‌پذیر می‌نامیم. در این صورت عدد یکتائی مانند I وجود دارد به گونه‌ای که برای هر افراز P از $[a,b] \times [c,d]$ داریم $L(f,P) \le I \le U(f,P)$. عدد I را که همان انتگرال دوگانه‌ی f روی مستطیل $D = [a,b] \times [c,d]$ است، با نماد $\iint_D f\, dA$ یا $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعابیر فوق، در حالتی که نمودار f بالای صفحه‌ی xoy باشد مقدار $\iint_D f\, dA$ را می‌توانیم از لحاظ هندسی حجم محصور توسط نمودار f و صفحه‌ی xoy

روی مستطیل $[a,b] \times [c,d]$ در نظر بگیریم (شکل ۴−۲).

در بیشتر موارد، تابع دو متغیره‌ی f روی ناحیه‌ی غیر مستطیلی در صفحه تعریف شده است. در این حالت، اگر $[a,b] \times [c,d]$ مستطیلی حاوی ناحیه‌ی D، دامنه‌ی تعریف f در صفحه باشد آنگاه برای افراز P از این مستطیل، مجموع‌های بالایی و پایینی $U(f,P)$ و $L(f,P)$ را تنها برای مستطیل‌هایی به دست می‌آوریم که با D اشتراک دارند. به عبارت دیگر مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی برای i,jهایی محاسبه می‌شوند که $D_{ij} \cap D \neq \emptyset$.

$$U(f,p) := \sum_{i,j} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \ , \qquad L(f,P) := \sum_{i,j} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$



شکل ۴−۳ حجم زیر نمودار تابع دو متغیره‌ی f روی ناحیه‌ی دلخواه D.

مانند حالت قبل، در این حالت تابع f را بر ناحیه‌ی D انتگرال‌پذیر می‌نامیم هرگاه با انتخاب افرازی مناسب از ناحیه‌ی D (یا در واقع، افراز مناسبی از مستطیل در بر گیرنده‌ی ناحیه‌ی D) بتوانیم فاصله‌ی بین این دو حاصل جمع را به دلخواه کوچک کنیم. به بیان دقیق‌تر، به ازای هر $\varepsilon > ۰$، افراز P_ε برای مستطیل $[a,b] \times [c,d]$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

یک پرسش طبیعی این است که چه توابعی انتگرال‌پذیر هستند؟ به دلیل پیچیدگی و گستردگی این بحث تنها به ذکر این نکته می‌پردازیم که برای توابع چند متغیره نیز شرط انتگرال‌پذیری ضعیف‌تر از پیوستگی است. به عبارت دیگر توابع پیوسته روی رده‌ی وسیعی از نواحی کراندار در صفحه انتگرال‌پذیرند ولی توابع غیر پیوسته‌ای هم وجود دارند که انتگرال‌پذیر هستند. باید توجه داشت که اطلاع از انتگرال‌پذیری یک تابع در عمل کمکی به محاسبه‌ی مقدار انتگرال آن نمی‌کند.

قضیه‌ی زیر تعمیم قضیه‌ی مشابهی در مورد انتگرال‌های معین توابع حقیقی یک متغیره به انتگرال‌های دوگانه است.

قضیه ۴-۱-۱ الف) اگر توابع دو متغیره‌ی f و g روی ناحیه‌ی کران‌دار $D \subset \mathbb{R}^۲$ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه برای هر $k \in \mathbb{R}$، تابع $kf + g$ نیز روی D انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_D (k\ f + g)\, dA = k\ \iint_D f\, dA + \iint_D g\, dA$$

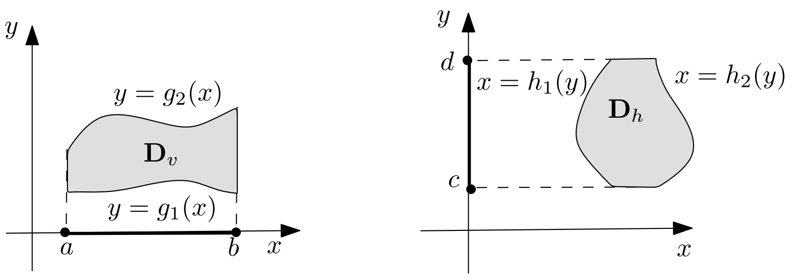
ب) اگر تابع دو متغیره‌ی f روی ناحیه‌های کران‌دار $D_۱$ و $D_۲$ در صفحه انتگرال‌پذیر باشد و اشتراک $D_۱$ و $D_۲$ حداکثر یک خم قطعه به قطعه پیوسته باشد آنگاه f روی $D = D_۱ \cup D_۲$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_D f\, dA = \iint_{D_۱} f\, dA + \iint_{D_۲} f\, dA$$

همانند توابع یک متغیره، محاسبه‌ی انتگرال چندگانه در حالت کلی و در عمل به روش‌های عددی انجام می‌شود. اما برای برخی از نواحی و توابع خاص می‌توان محاسبه‌ی انتگرال دوگانه را به محاسبه‌ی انتگرال توابع یک متغیره تبدیل کرد. به همین دلیل در این قسمت به معرفی چند دسته از این نواحی خاص در صفحه می‌پردازیم.

۱) ناحیه‌ی $D_h \subseteq \mathbb{R}^۲$ را **ساده‌ی افقی** گوییم (شکل ۴-۴) هرگاه توابع پیوسته‌ی $h_۱$ و $h_۲$ روی یک بازه مانند $[c, d]$ وجود داشته باشند به قسمی که $D_h = \{(x, y)\ :\ c \leq y \leq d\ ,\ h_۱(y) \leq x \leq h_۲(y)\}$.

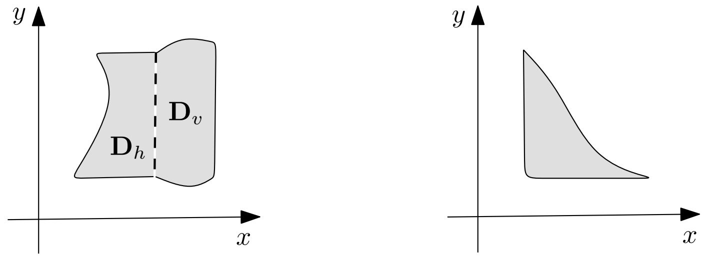
۲) ناحیه‌ی $D_v \subseteq \mathbb{R}^۲$ را **ساده‌ی عمودی** می‌نامیم (شکل ۴-۴) هرگاه توابع پیوسته‌ی $g_۱$ و $g_۲$ روی یک بازه مانند $[a, b]$ وجود داشته باشند به قسمی که $D_v = \{(x, y)\ :\ a \leq x \leq b\ ,\ g_۱(x) \leq y \leq g_۲(x)\}$.



شکل ۴-۴ نواحی ساده‌ی افقی D_h و ساده‌ی عمودی D_v.

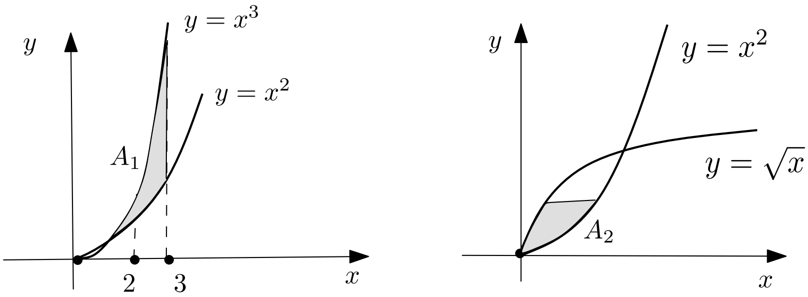
۳) ناحیه‌ی D را **ساده** می‌نامیم هرگاه هم ساده‌ی عمودی و هم ساده‌ی افقی باشد (شکل ۴-۵).

۴) ناحیه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ را **نرمال** می‌نامیم هرگاه اجتماع تعداد باپایانی از نواحی ساده‌ی عمودی و ساده‌ی افقی باشد (شکل ۴—۵).



شکل ۴—۵ نواحی ساده و نرمال.

مثال ۴–۱–۲ الف) ناحیه‌ی $A_۱ := \{(x,y) \ : \ ۲ \leq x \leq ۳ \ , \ x^۲ \leq y \leq x^۳\}$ یک ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی و ناحیه‌ی $A_۲ := \{(x,y) \ : \ ۰ \leq y \leq \frac{۱}{۲} \ , \ y^۲ \leq x \leq \sqrt{y}\}$ یک ناحیه‌ی ساده‌ی افقی است (شکل ۴—۶).



شکل ۴—۶ نواحی $A_۲$ و $A_۱$.

ب) ناحیه‌ی $D_۱ = \{(x,y) : x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$ یک ناحیه‌ی ساده است. ناحیه‌ی $D_۲ = \{(x,y) : ۱ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ یک ناحیه‌ی نرمال است که ساده‌ی افقی یا عمودی نیست.

$$\begin{aligned} D_۱ &= \{(x,y) : -۱ \leq x \leq ۱ \ , \ -\sqrt{۱ - x^۲} \leq y \leq \sqrt{۱ - x^۲}\} \\ &= \{(x,y) : -۱ \leq y \leq ۱ \ , \ -\sqrt{۱ - y^۲} \leq x \leq \sqrt{۱ - y^۲}\} \end{aligned}$$

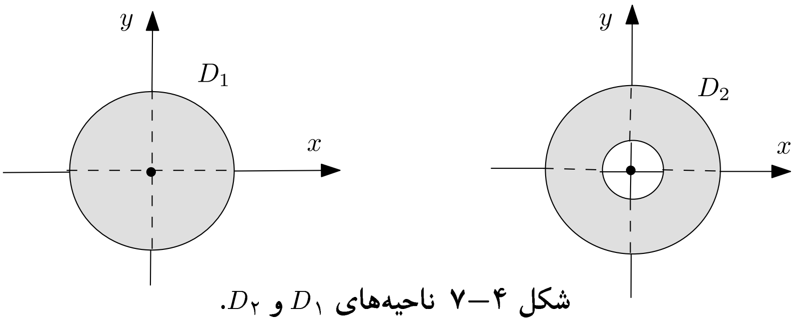
ناحیه‌ی $D_۲$ نرمال است زیرا $D_۲ = A \cup B$، که در آن

$$A = \{(x,y) : -۲ \leq x \leq ۲ \ , \ h_۱(x) \leq y \leq \sqrt{۴ - x^۲}\} \ ,$$

$$h_۱(x) = \begin{cases} \sqrt{۱ - x^۲} & -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$B = \{(x,y) : -2 \le x \le 2\ ,\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le h_2(x)\}\ ,$$

$$h_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - x^2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



شکل ۴–۷ ناحیه‌های D_1 و D_2.

مطالعه‌ی دقیق نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال دوگانه، فراتر از کتاب‌های مقدماتی ریاضی عمومی است و در این قسمت به بیان یک استدلال مقدماتی برای یک حالت خاص اکتفا می‌کنیم.

فرض کنیم f روی یک ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی D پیوسته باشد. بنابر تعریف نواحی ساده‌ی عمودی، توابع پیوسته‌ی g_1 و g_2 روی یک بازه مانند $[a,b]$ وجود دارند که

$$D = \{(x,y)\ :\ a \le x \le b\ ,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

برای سادگی فرض کنیم f روی D منفی نیست. بنابراین انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D f(x,y)dA$ بیانگر حجم ناحیه‌ی T محصور به نمودار f روی ناحیه‌ی D است. برای محاسبه‌ی حجم T می‌توانیم از ایده‌ای شبیه به روش محاسبه‌ی حجم رویه‌های دوار استفاده کنیم. افراز $\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ را برای $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. ناحیه‌ی T را به زیرناحیه‌های T_i افراز می‌کنیم که T_i محصور به صفحات $x = x_{i-1}$، $x = x_i$ و نمودار f روی زیر ناحیه‌ی زیر است.

$$D_i = \{(x,y)\ :\ x_{i-1} \le x \le x_i\ ,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

در این صورت، حجم T_i را می‌توان توسط $A(x_i)\Delta x_i$ تقریب زد که منظور از $A(x_i)$ مساحت ناحیه‌ای است در صفحه‌ی $x = x_i$ و زیر نمودار f. بنابر حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی یک متغیره داریم:

$$A(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)dy$$

بنابر رابطه‌ی زیر، حجم T را می‌توان توسط یک مجموع ریمان برای تابع A با ضابطه‌ی $A(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ تقریب زد.

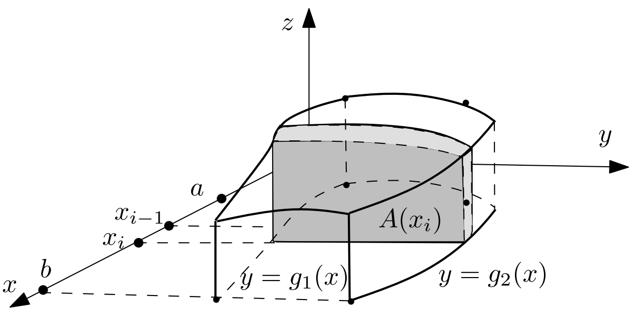
$$T=\sum_{i=1}^{n} T_i \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i,y)dy\Big)\Delta x_i$$

به این ترتیب در حد، یعنی وقتی $n\to\infty$ خواهیم داشت:

$$T=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

پس برای ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی $D=\{(x,y)\ :\ a\le x\le b\ ,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$،

$$\iint_D f(x,y)dA=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$



شکل ۴ـ۸ تعبیر هندسی قضیه‌ی فوبینی.

با بحثی شبیه به آنچه در مورد نواحی ساده‌ی عمودی گفته شد، برای یک ناحیه‌ی ساده‌ی افقی $D=\{(x,y)\ :\ c\le y\le d\ ,\ h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$،

$$\iint_D f(x,y)dA=\int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

آنچه در بالا برای حالت خاص $f\ge 0$ بیان شد، در حالت کلی در قضیه‌ی معروف به **قضیه‌ی فوبینی** به صورت زیر مطرح می‌شود.

قضیه ۴ـ۱ـ۳ اگر تابع دو متغیره‌ی f روی ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی D_v پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_{D_v} f(x,y)dA=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

به همین ترتیب، در حالتی که f روی ناحیه‌ی ساده‌ی افقی D_h پیوسته باشد داریم:

$$\iint_{D_h} f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_۱(y)}^{h_۲(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

برای نواحی ساده دو فرمول فوق به یک نتیجه منجر می‌شود ولی گاهی اوقات محاسبه‌ی با یکی از فرمول‌ها ساده‌تر است.

مثال ۴–۱–۴ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y) = xe^{x-y}$ را روی مستطیل $D = \{(x,y) : ۲ \le x \le ۳, ۱ \le y \le ۲\}$ محاسبه می‌کنیم.

ناحیه‌ی D در این مثال یک ناحیه‌ی ساده است. با در نظر گرفتن این ناحیه به عنوان یک ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی، بنابر قضیه‌ی فوبینی داریم

$$\iint_D xe^{x-y}dA = \int_۲^۳ (\int_۱^۲ xe^{x-y}dy)dx$$

توجه می‌کنیم که $\int_۱^۲ xe^{x-y}dy = xe^x \int_۱^۲ e^{-y}dy$. به این ترتیب

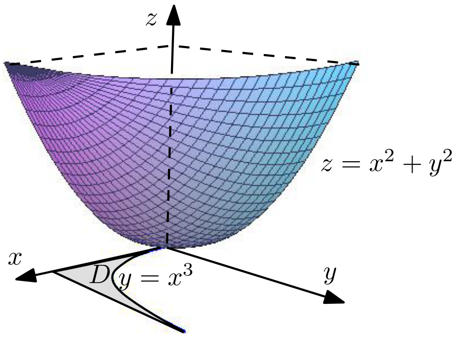
$$\begin{aligned}
\iint_D xe^{x-y}dA &= \int_۲^۳ (xe^x \int_۱^۲ e^{-y}dy)dx \\
&= \Big(\int_۲^۳ xe^x\, dx\Big)\Big(\int_۱^۲ e^{-y}dy\Big) \\
&= \Big((-۱+x)e^x\Big|_۲^۳\Big)\Big(-e^{-x}\Big|_۱^۲\Big) \\
&= ۲e^۲ - ۳e + ۱
\end{aligned}$$

مثال ۴–۱–۵ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y) = xy$ را روی ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی $D = \{(x,y) : ۰ \le x \le ۲, ۰ \le y \le \sqrt{۴-x^۲}\}$ محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\iint_D xydA &= \int_۰^۲ \left(\int_۰^{\sqrt{۴-x^۲}} xydy \right) dx \\
&= \int_۰^۲ \frac{x}{۲}y^۲\Big|_{y=۰}^{y=\sqrt{۴-x^۲}} dx \\
&= \int_۰^۲ \frac{x(۴-x^۲)}{۲}dx = ۲
\end{aligned}$$

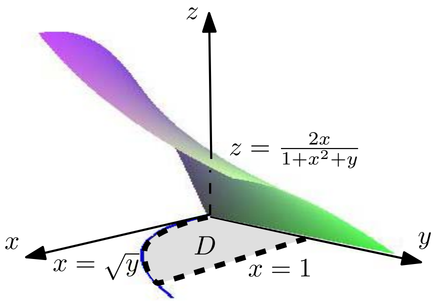
مثال ۴–۱–۶ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ را روی ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی $D = \{(x,y) : ۱ \leq x \leq ۲, ۱ \leq y \leq x^۳\}$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\iint_D (x^۲ + y^۲)dA &= \int_۱^۲ \left(\int_۱^{x^۳} (x^۲ + y^۲)dy \right) dx \\ &= \int_۱^۲ (yx^۲ + \frac{y^۳}{۳})\Big|_{y=۱}^{y=x^۳} dx \\ &= \int_۱^۲ \left(x^۲(x^۳ - ۱) + \frac{۱}{۳}x^۹ - \frac{۱}{۳}\right)dx = \frac{۶۲۹}{۱۵}\end{aligned}$$



شکل ۴–۹ نمودار تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ و ناحیه‌ی
$D = \{(x,y) : ۱ \leq x \leq ۲, ۱ \leq y \leq x^۳\}$.

مثال ۴–۱–۷ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y) = \frac{۲x}{۱ + x^۲ + y}$ را روی ناحیه‌ی محصور توسط خم به معادله‌ی $y = x^۲$، محور x و خط $x = ۱$ به دست می‌آوریم.



شکل ۴–۱۰ نمودار تابع $f(x,y) = \frac{۲x}{۱ + x^۲ + y}$ و ناحیه‌ی
$D = \{(x,y) : ۰ \leq y \leq ۱, \sqrt{y} \leq x \leq ۱\}$.

ناحیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ای ساده است که به عنوان یک ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی به صورت $D = \{(x,y) : ۰ \leq x \leq ۱ \ , \ ۰ \leq y \leq x^۲\}$ و به عنوان یک ناحیه‌ی ساده‌ی افقی به

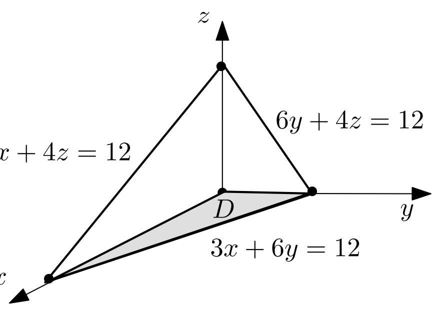
صورت $D = \{(x,y) : ۰ \le y \le ۱, \sqrt{y} \le x \le ۱\}$ توصیف می‌شود. با استفاده از توصیف اخیر،

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{۲x}{۱+x^۲+y}dA &= \int_۰^۱ \left(\int_۰^{\sqrt{y}} \frac{۲xdx}{۱+x^۲+y} \right) dy \\
&= \int_۱^۲ \ln(۱+x^۲+y)\Big|_{x=۰}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_۱^۲ \Big(\ln(۱+۲y) - \ln(۱+y)\Big)dy \\
&= \Big(\frac{۱}{۲}(۱+۲y)\ln(۱+۲y) + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}(۱+y)\ln(۱+y)\Big)\Big|_۰^۱ \\
&= \frac{۳}{۲}\ln ۳ - ۲\ln ۲
\end{aligned}$$

مثال ۴-۱-۸ حجم محصور بین صفحات مختصات و صفحه‌ی π به معادله‌ی $۳x+۶y+۴z=۱۲$ را به دست می‌آوریم.

معادله‌ی خط حاصل از تلاقی صفحه‌ی π با صفحه‌ی xoy به ازای $z=۰$ به دست می‌آید که عبارت است از $۳x+۶y=۱۲$. از سوی دیگر صفحه‌ی π رویه‌ای به معادله‌ی $z=\frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)$ است. بنابر این حجم مورد نظر عبارت است از $\iint_D \frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)dA$ که $D=\{(x,y) : ۰ \le x \le ۴ \ , \ ۰ \le y \le ۲-\frac{x}{۲}\}$. پس

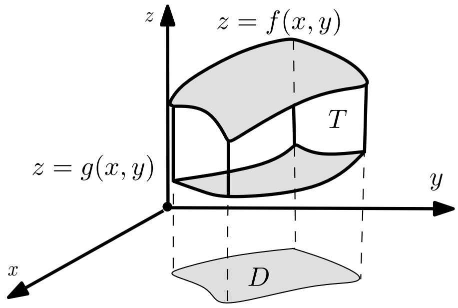
$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)dA &= \int_۰^۴ \left(\int_۰^{۲-\frac{x}{۲}} \frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)dy \right) dx \\
&= \frac{۳}{۴}\int_۰^۴ (۴y-xy-y^۲)\Big|_{y=۰}^{y=۲-\frac{x}{۲}} dx \\
&= \frac{۳}{۱۶}\int_۰^۴ (۱۶-۸x+x^۲)dx = ۴
\end{aligned}$$



شکل ۴-۱۱ حجم محصور به صفحه‌ی $۳x+۶y+۴z=۱۲$ و صفحات مختصات.

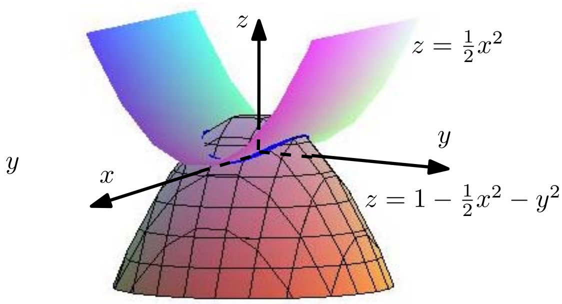
حجم ناحیه‌ی T از فضا، بین نمودار توابع $z = f(x,y)$ و $z = g(x,y)$ روی ناحیه‌ی D (تصویر T بر صفحه‌ی xoy) به کمک انتگرال دوگانه قابل محاسبه است. این حجم در حالتی که روی D داشته باشیم $g(x,y) \leq f(x,y)$ عبارت است از:

$$\iint_D \big(f(x,y) - g(x,y)\big)dA$$



شکل ۴–۱۲ حجم بین نمودار توابع $z = f(x,y)$ و $z = g(x,y)$ روی ناحیه‌ی D .

مثال ۴–۱–۹ حجم محصور بین رویه‌ی استوانه‌ای $z = \frac{۱}{۲}x^{۲}$ و سهمی‌گون بیضوی $z = ۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} - y^{۲}$ را محاسبه می‌کنیم.



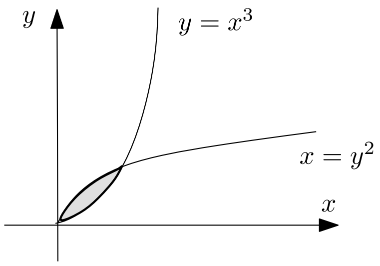
شکل ۴–۱۳ حجم محصور به رویه‌ی $z = \frac{۱}{۲}x^{۲}$ و سهمی‌گون بیضوی $z = ۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} - y^{۲}$.

تصویر قائم خم حاصل از تلاقی رویه‌ی استوانه‌ای $z = \frac{۱}{۲}x^{۲}$ و سهمی‌گون بیضوی $z = ۱ - \frac{۱}{۲}x^{۲} - y^{۲}$ بر صفحه‌ی xoy دایره‌ای با معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ است. اگر $D = \{(x,y) : -۱ \leq x \leq ۱ \ , \ -\sqrt{۱ - x^{۲}} \leq y \leq \sqrt{۱ - x^{۲}}\}$ آنگاه برای هر

$(x,y) \in D$ داریم $1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2 \leq \frac{1}{2}x^2$. در نتیجه حجم مورد نظر عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\iint_D \left((1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2) - \frac{1}{2}x^2\right) dA &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA \\
&= 4\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy \right) dx \\
&= 4\int_0^1 (y - x^2 y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= 4\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} dx \\
&= 4\left(\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{6}x\sqrt{(1-x^2)^3}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

یکی دیگر از کاربردهای انتگرال دوگانه، محاسبه‌ی مساحت نواحی در $\mathbb{R}^2$ است. در واقع حجم محصور به نمودار $f(x,y) = 1$ و صفحه‌ی xoy روی ناحیه‌ی D از نظر مقدار برابر مساحت ناحیه‌ی D است.



شکل ۴–۱۱ مساحت ناحیه‌ی محصور به سهمی $x = y^2$ و نمودار تابع $y = x^3$.

مثال ۴–۱–۱۰ به کمک انتگرال دوگانه مساحت ناحیه‌ی محصور به سهمی $x = y^2$ و نمودار تابع $y = x^3$ را به دست می‌آوریم.

مقدار مساحت ناحیه‌ی مورد نظر برابر است با انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D dA$ که در آن

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ \ y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}$$

بنابر این مساحت این ناحیه عبارت است از:

$$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx \right) dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - y^2) dy = \frac{5}{12}$$

اگر ناحیه‌ی D را به عنوان یک ناحیه ساده‌ی عمودی، یعنی به صورت زیر در نظر بگیریم

$$D = \{(x,y) : ۰ \leq x \leq ۱,\ \ x^۳ \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

آنگاه مساحت ناحیه‌ی مورد نظر به شکل زیر هم قابل محاسبه است:

$$\int_۰^۱ \left(\int_{x^۳}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_۰^۱ (\sqrt{x} - x^۳)dx = \frac{۵}{۱۲}$$

در این مثال مشاهده می‌شود که هر دو فرمول قضیه‌ی فوبینی (۴−۱−۳) به نتیجه‌ی یکسان می‌رسند. برای برخی از نواحی ساده، یکی از فرمول‌ها ممکن است منجر به یک انتگرال پیچیده و فرمول دیگر به انتگرال ساده‌ای منتهی شود.

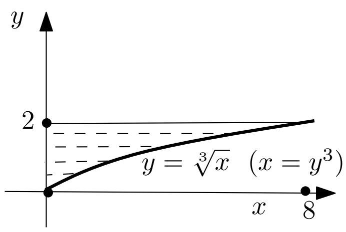
مثال ۴−۱−۱۱ عبارت $\int_۰^۸ \int_{\sqrt[۳]{x}}^۲ \frac{dydx}{۱+y^۴}$ را محاسبه می‌کنیم.

مشاهده می‌شود که محاسبه‌ی این انتگرال با ترتیب داده شده با روش تجزیه‌ی کسرهای جزئی و به سختی امکان پذیر است. در حالی که می‌توانیم ناحیه‌ی ساده‌ی D را به صورت ساده‌ی افقی بیان کنیم.

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) : ۰ \leq x \leq ۸\ ,\ \sqrt[۳]{x} \leq y \leq ۲\} \\ &= \{(x,y) : ۰ \leq y \leq ۲\ ,\ ۰ \leq x \leq y^۳\} \end{aligned}$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_۰^۸ \int_{\sqrt[۳]{x}}^۲ \frac{dydx}{۱+y^۴} &= \int_۰^۲ \int_۰^{y^۳} \frac{dxdy}{۱+y^۴} \\ &= \int_۰^۲ \frac{x}{y^۴+۱}\Big|_{x=۰}^{x=y^۳} dy \\ &= \int_۰^۲ \frac{y^۳}{y^۴+۱}dy = \frac{۱}{۴}\ln(۱+y^۴)\Big|_۰^۲ = \frac{۱}{۴}\ln ۱۷ \end{aligned}$$



شکل ۴−۱۲ ناحیه‌ی D در مثال ۴−۱−۱۱.

مثال ۴-۱-۱۲ مطلوب است $\int_{\circ}^{1}\int_{1}^{2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy+\int_{1}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy$.

برای $D_1=\{(x,y): 1\leq x\leq 2\ ,\ \circ\leq y\leq 1\}$ داریم:

$$\int_{\circ}^{1}\int_{1}^{2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy=\iint_{D_1}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dA$$

به همین ترتیب برای

$$D_2=\{(x,y):\sqrt{y}\leq x\leq 2\ ,\ 1\leq y\leq 4\}=\{(x,y): 1\leq x\leq 2\ ,\ \circ\leq y\leq x^2\}$$

داریم:

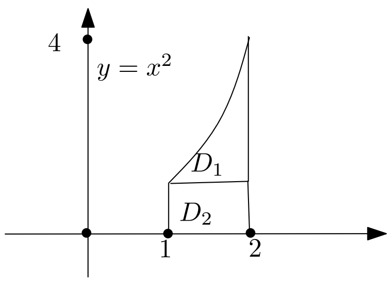
$$\int_{1}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy=\iint_{D_2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dA$$

پس با توجه به قضیه‌ی ۴-۴-۱ داریم:

$$\int_{\circ}^{1}\int_{1}^{2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy+\int_{1}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy=\iint_{D}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dA$$

که در آن $D=\{(x,y): 1\leq x\leq 2\ ,\ \circ\leq y\leq x^2\}$. به این ترتیب:

$$\begin{aligned}\int\int_{D}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dA &= \int_{1}^{2}\int_{\circ}^{x^2}\frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dydx\\ &= \int_{1}^{2}\int_{\circ}^{x^2}(\frac{1}{2}y^2|_{\circ}^{x^2})\frac{1}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\sin(\frac{\pi x}{2})dx=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$



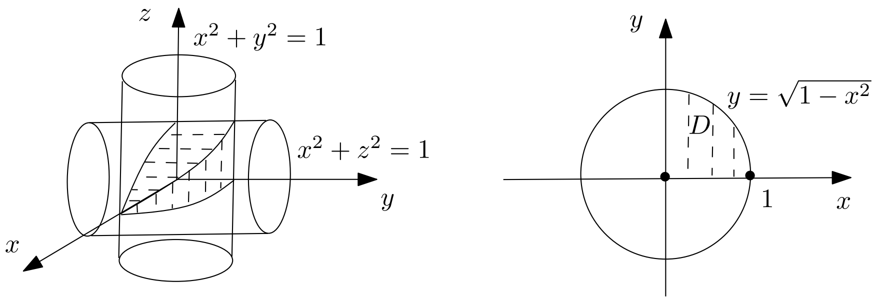
شکل ۴-۱۳ ناحیه‌ی D در مثال ۴-۱-۱۲.

در برخی از موارد، تقارن ناحیه‌ی مورد نظر حجم محاسبات را کم‌تر می‌کند. در مثال بعد یکی از این موارد مطرح شده است.

مثال ۴–۱–۱۳ حجم محصور بین استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + z^۲ = ۱$ را به دست می آوریم.

محورهای مختصات محور تقارن استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + z^۲ = ۱$ هستند. پس کافی است حجم زیرناحیه‌ی واقع در یک هشتم اول فضا، یعنی زیرناحیه‌ای که برای آن $x, y, z \geq ۰$ محاسبه و در هشت ضرب شود. حجم مورد نظر را می‌توانیم حجم محصور به یک رویه، روی یک ناحیه‌ی مناسب در نظر بگیریم. این رویه را می‌توان نمودار یکی از استوانه‌ها مثلاً $z = f(x, y) = \sqrt{۱ - x^۲}$ و ناحیه‌ی مناسب را $D = \{(x, y) : ۰ \leq x \leq ۱\ ,\ ۰ \leq y \leq \sqrt{۱ - x^۲}\}$ در نظر گرفت. به این ترتیب حجم مورد نظر عبارت است از:

$$۸\int_۰^۱ \left(\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} \sqrt{۱ - x^۲} dy\right) dx = ۸\int_۰^۱ (۱ - x^۲) dx = \frac{۱٦}{۳}$$



شکل ۴–۱۴ حجم محصور به استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + z^۲ = ۱$ در $\frac{۱}{۸}$ اول.

۴–۲ تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

تغییر متغیر یکی از روش‌های موثر برای حل تحلیلی دسته‌ی گسترده‌ای از انتگرال‌ها است. در انتگرال‌های چندگانه، علاوه بر پیچیدگی ساختار تابع چندمتغیره، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نیز می‌تواند دارای پیچیدگی‌هایی باشد که محاسبه‌ی مستقیم انتگرال را مشکل سازد. خواهیم دید که با تغییر متغیر در انتگرال چندگانه می‌توانیم در برخی از موارد علاوه بر این که ساختار تابع انتگرالده را ساده‌تر کنیم، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری هم به ناحیه‌ای مناسب‌تر برای محاسبه‌ی انتگرال تبدیل می‌شود. برای این منظور ابتدا مفهوم نگاشت در صفحه را به عنوان تابعی تعریف شده بر زیرمجموعه‌ای از صفحه با مقادیر در صفحه مورد بررسی قرر می‌دهیم. فرض کنیم D^* ناحیه‌ای از صفحه‌ی دکارتی متناظر با دو متغیر u و v باشد. این صفحه‌ای را اصطلاحاً صفحه‌ی uv می‌نامیم. اگر $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$ توابعی

دو متغیره باشند که بر این ناحیه‌ی D^* تعریف شده‌اند آنگاه تابع $T : D^* \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ را یک **نگاشت** از D^* به $\mathbb{R}^۲$ و ناحیه‌ی

$$D := \{\big(x(u,v), y(u,v)\big) \mid (u,v) \in D^*\}$$

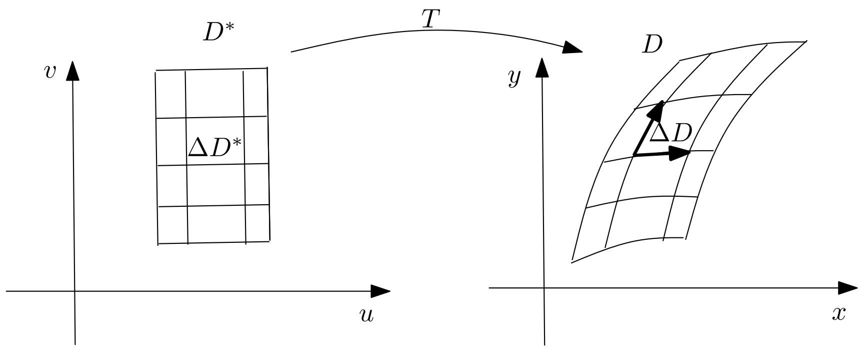
را تصویر ناحیه‌ی D^* تحت نگاشت T می‌نامیم. در این حالت تابع $T : D^* \to D$ تابعی پوشا است. نگاشت T را بر D^* یک به یک نامیم هرگاه برای نقاط متمایز (u,v) و (u',v') در D^* داشته باشیم $T(u,v) \neq T(u',v')$.

فرض کنیم $D^* \subset \mathbb{R}^۲$ ناحیه‌ای بسته و کراندار از صفحه‌ی uv و $T : D^* \to \mathbb{R}^۲$ نگاشتی با ضابطه‌ی $T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ باشد که در آن توابع $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ بر D^* پیوسته و در نقاط درونی این ناحیه مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. همچنین فرض کنیم نگاشت T در نقاط درونی D^* یک به یک باشد و برای هر (u,v) درون D^* داشته باشیم:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq ۰$$

عبارت فوق را **ژاکوبین** نگاشت T می‌نامیم و با نماد $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم P^* افرازی برای ناحیه‌ی D^* توسط شبکه‌ای از خطوط موازی محورهای u و v و P افراز متناظر برای ناحیه‌ی D باشد که توسط تصویر شبکه‌ی فوق تحت نگاشت T حاصل شده است. اگر $\Delta D^* = [u_۰, u_۰ + \Delta u] \times [v_۰, v_۰ + \Delta v]$ زیرناحیه‌ای مستطیلی شکل در D^* و ΔD تصویر آن ناحیه در D باشد آنگاه زیرناحیه‌ی ΔD با یک متوازی‌الاضلاع قابل تقریب است که اضلاع آن بردارهای $\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u\mathbf{j}$ و $\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v\mathbf{j}$ هستند.



شکل ۴–۱۵ تغییر متغیر $x = x(u,v)$ **و** $y = y(u,v)$.

بنابر این اگر مساحت این زیرناحیه را با ΔA نشان دهیم آنگاه تقریب زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\Delta A &\approx \|(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\mathbf{j})\times(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\mathbf{j})\| \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right|\Delta u\Delta v \\
&= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta A^*
\end{aligned}$$

که در آن ΔA^* مساحت ناحیه‌ی ΔD^* است. با توجه به رابطه‌ی فوق می‌توانیم قضیه‌ای تحت عنوان تغییر متغیر در انتگرال دوگانه به صورت زیر به دست آوریم.

قضیه ۴-۲-۱ فرض کنیم D^* ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه‌ی uv و $T:D^*\to\mathbb{R}^2$ نگاشتی با دستور $T(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ باشد. به علاوه، فرض کنیم توابع $x=x(u,v)$ و $y=y(u,v)$ بر D^* پیوسته و در نقاط درونی D^* مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند و در این مجموعه نقاط $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$. همچنین فرض کنیم T بر نقاط درونی D^* یک به یک باشد. در این صورت اگر $D\subset\mathbb{R}^2$ تصویر D^* تحت نگاشت T و $f:D\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه

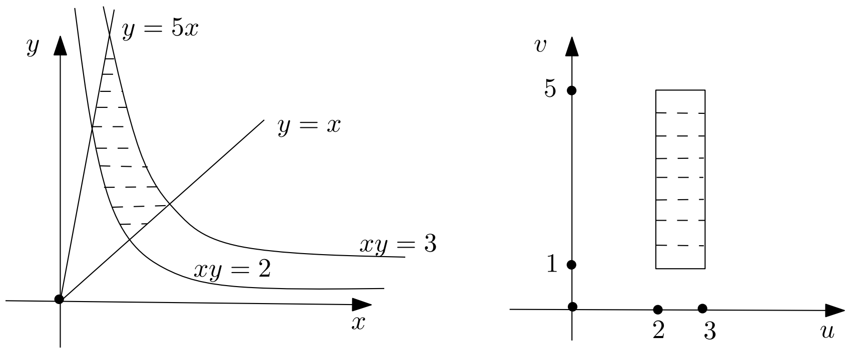
$$\iint_D f\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

اگر توابع $x=x(u,v)$ و $y=y(u,v)$ در شرایط قضیه‌ی فوق صدق کنند آنگاه آنها را یک تغییر متغیر مجاز برای انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D f\,dA$ و عبارت $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ را ژاکوبین این تغییر متغیر می‌نامیم. با توجه به فرض یک به یک و پوشا بودن نگاشت $T:D^*\to D$ این نگاشت دارای وارونی چون $S:D\to D^*$ با ضابطه‌ی $S(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ است. تحت شرایط قضیه‌ی فوق و بنابر قضیه‌ای به نام قضیه‌ی نگاشت وارون، که اثبات آن فراتر از سطح این کتاب است، توابع $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ نیز مشتقات جزئی پیوسته دارند و اگر $(x_0,y_0)\in D$ نقطه‌ی نظیر $(u_0,v_0)\in D^*$ باشد آنگاه $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(u_0,v_0)\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(x_0,y_0)=1$ یا به طور خلاصه $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$.

مثال ۴-۲-۲ انتگرال دوگانه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=x^2y^2$ را روی ناحیه‌ی D، محصور به هذلولی‌های $xy=2$، $xy=3$ و خطوط $y=x$ و $y=5x$ محاسبه می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $u = xy$ و $v = \frac{y}{x}$. در این‌صورت $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ و $y = \sqrt{uv}$. برای نقاط (x, y) در ناحیه‌ی D داریم $۲ \le xy \le ۳$ و $۱ \le \frac{y}{x} \le ۵$. به این ترتیب تصویر ناحیه‌ی D تحت این تغییر متغیر عبارت است از:

$$D^* = \{(u, v) \ : \ ۲ \le u \le ۳ \ , \ ۱ \le v \le ۵\}$$



شکل ۴ـ۱۶ ناحیه‌ی D محصور به خم‌های $xy = ۲$، $xy = ۳$، $y = x$ و $y = ۵x$

همچنین:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲v\sqrt{\frac{u}{v}}} & \frac{-\frac{u}{v^۲}}{۲v\sqrt{\frac{u}{v}}} \\ \frac{v}{۲\sqrt{uv}} & \frac{u}{۲\sqrt{uv}} \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲v}$$

بنابر این:

$$\begin{aligned} \iint_D x^۲ y^۲ dA &= \iint_{D^*} u^۲ |\frac{۱}{۲v}| \, dudv \\ &= \int_۱^۵ \int_۲^۳ u^۲ \ |\frac{۱}{۲v}| \ dudv \\ &= \frac{۱}{۶} \int_۱^۵ \frac{u^۳}{|v|} \Big|_۲^۳ dv = \frac{۱۹}{۶} \int_۱^۵ \frac{dv}{v} = \frac{۱۹}{۶} \ln ۵ \end{aligned}$$

در این مثال می‌توانستیم $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ را به شکل دیگری هم محاسبه کنیم.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^۲} & \frac{۱}{x} \end{pmatrix} = ۲\frac{y}{x} = ۲v \ \ , \ \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{۱}{۲v}$$

مثال ۴-۲-۳ مساحت ناحیه‌ی محدود به خطوط $x+y=۱$، $x+y=۲$، $y-x=۰$ و $y-x=۱$ را به کمک انتگرال دوگانه به دست می‌آوریم.

اگر قراردهیم $u=x+y$ و $v=y-x$ آنگاه $x=\frac{u-v}{۲}$ و $y=\frac{u+v}{۲}$. برای نقاط (x,y) در ناحیه‌ی D داریم $۱\le x+y\le ۲$ و $۰\le y-x\le ۱$. در نتیجه:

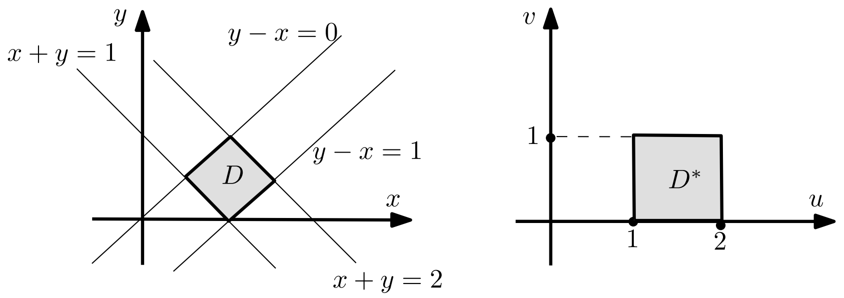
$$D^*=\{(u,v)\ :\ ۱\le u\le ۲\ ,\ ۰\le v\le ۱\}$$

ژاکوبین این تغییر متغیر عبارت است از:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=det\begin{pmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{pmatrix}=\frac{۱}{۲}$$

بنابر این مساحت مورد نظر عبارت است از:

$$\iint_D dA=\iint_{D^*}|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dA=\int_۰^۱\int_۱^۲|\frac{۱}{۲}|\,dudv=\frac{۱}{۲}\int_۰^۱ dv\int_۱^۲ du=\frac{۱}{۲}$$



شکل ۴-۱۷ ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x+y=۱$، $x+y=۲$، $y-x=۰$، $y-x=۱$ و ناحیه‌ی D^*، تصویر D تحت تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=y-x$.

مثال ۴-۲-۴ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y)=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ را روی ناحیه‌ی D، محصور به خطوط $x=۰$، $y=۰$ و خم به معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ محاسبه می‌کنیم.

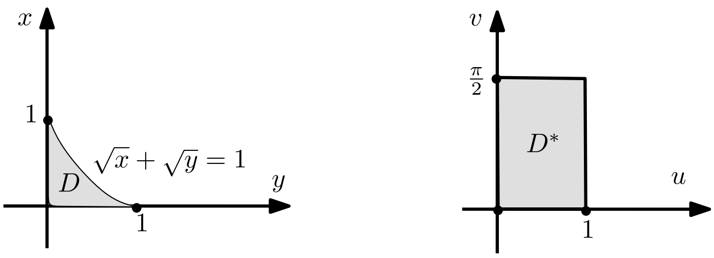
قرار می‌دهیم $x=u\cos^۴ v$ و $y=u\sin^۴ v$. اکنون مرز D^* در دستگاه مختصات uv، تصویر ناحیه‌ی D تحت این تغییر متغیر را به دست می‌آوریم. معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ در دستگاه جدید عبارت است از $\sqrt{u\cos^۴ v}+\sqrt{u\sin^۴ v}=۱$، یا به طور معادل $u=۱$. نقاط واقع بر محور x، یعنی نقاط $(x,۰)$ در رابطه‌های $x=u\cos^۴ v$ و $u\sin^۴ v=۰$ صدق می‌کنند. پس این نقاط در دستگاه مختصات uv در معادله‌ی $v=۰$ صدق

می‌کنند. به همین ترتیب نقاط واقع بر محور y، یعنی نقاط $(0,y)$ در رابطه‌های $0 = u\cos^4 v$ و $y = u\sin^4 v$ صدق می‌کنند. پس این نقاط در دستگاه مختصات uv در معادله‌ی $v = \frac{\pi}{2}$ صدق می‌کنند. با این تغییر متغیر، محور v در دستگاه مختصات uv به نقطه‌ی $(0,0)$ در دستگاه مختصات xy نظیر می‌شود. به این ترتیب داریم:
$D^* = \{(u,v)\ :\ 0 \le u \le 1\ ,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}\}$ و

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \cos^4 v & -4u\sin v\cos^3 v \\ \sin^4 v & 4u\cos v\sin^3 v \end{pmatrix} = 4u\cos^3 v\ \sin^3 v$$

بنابر این:

$$\begin{aligned}\int\int_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dA &= \int\int_{D^*} \sqrt[4]{u}\ |4u\cos^3 v\ \sin^3 v|dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 4\sqrt[4]{u^5}\ |\cos^3 v\ \sin^3 v|\ dudv \\ &= \Big(\int_0^1 4\sqrt[4]{u^5}\ du\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v\ \sin^3 v\ dv\Big) = \frac{4}{27}\end{aligned}$$



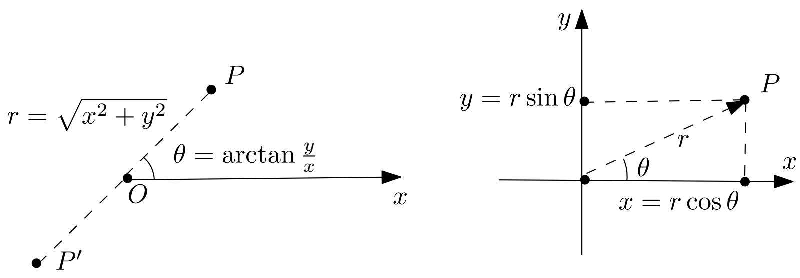
شکل ۴–۱۸ ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x=0$، $y=0$ و خم به معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و ناحیه‌ی D^*، تصویر D تحت تغییر متغیر $x = u\cos^4 v$ و $y = u\sin^4 v$.

در ادامه‌ی بحث به معرفی یک تغییر متغیر مهم حاصل از یک دستگاه مختصات غیر دکارتی در صفحه می‌پردازیم.

۴–۳ دستگاه مختصات و تغییر متغیر قطبی

یکی از روش‌های نمایش نقاط صفحه استفاده از مختصات قطبی است. برای این منظور ابتدا یک نیم‌خط جهت دار $\overrightarrow{Ox}$ در صفحه انتخاب می‌کنیم. می‌توانیم این نیم‌خط را نیمه‌ی نظیر اعداد مثبت از محور x بگیریم. نقطه‌ی O را **مبدأ یا قطب** و نیم خط $\overrightarrow{Ox}$ را **محور قطب** می‌نامند. اگر P نقطه‌ای درصفحه باشد به قسمی که $r = ||\overrightarrow{OP}||$ و زاویه‌ی

بین $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{Ox}$ برابر θ باشد، (r,θ) را **مختصات قطبی** P می‌نامیم (شکل ۴—۱۷). برای تعیین مختصات قطبی P ابتدا محور قطب را طوری دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی P روی آن قرار گیرد. سپس با توجه به جهت محور، r همان فاصله‌ی جبری P تا مبدأ خواهد بود. به این ترتیب می‌توان برای r مقادیر منفی نیز قائل شد. به عبارت دیگر اگر P دارای مختصات (r,θ) باشد آنگاه می‌توانیم برای آن مختصات $(-r,\theta-\pi)$ و $(-r,\pi+\theta)$ نیز قائل شویم. در این صورت P' منعکس نقطه‌ی P نسبت به O دارای مختصات $(-r,\theta)$ است. نقطه‌ی P' دارای مختصات $(r,\theta-\pi)$ نیز هست. باید توجه داشت که با این روش تناظر یک به یک بین نقاط صفحه و مختصات قطبی آنها وجود ندارد ولی هر مختصات قطبی نقطه‌ای یکتا را مشخص می‌کند. برای مبدأ مختصات، زاویه‌ی θ را دلخواه و r را برابر صفر در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی P با مختصات دکارتی (x,y) دارای مختصات قطبی $(r,\theta)=(\sqrt{x^2+y^2},\arctan(\frac{y}{x}))$ و نقطه‌ی P با مختصات قطبی (r,θ) دارای مختصات دکارتی $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ است.

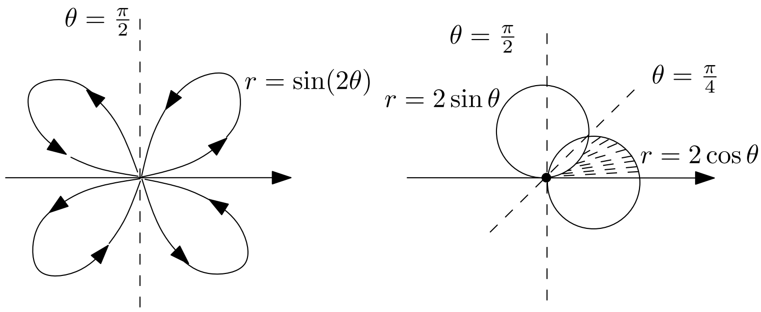


شکل ۴—۱۷ مختصات دکارتی و قطبی.

مثال ۴—۳—۱ الف) نقطه‌ی P با مختصات دکارتی $(1,1)$ دارای مختصات قطبی $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ و نقطه‌ی P' با مختصات دکارتی $(-1,-1)$ در دستگاه قطبی دارای مختصات $(\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4})$ یا $(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4})$ است.

ب) معادله‌ی دایره‌های $C_1\ : x^2+(y-1)^2=4$ و $C_2\ : x^2+(y-2)^2=4$ را در دستگاه مختصات قطبی تعیین می‌کنیم. برای این منظور ابتدا معادله‌ی $x^2+(y-1)^2=4$ را به صورت $x^2+y^2=2y+3$ و معادله‌ی $x^2+(y-2)^2=4$ را به صورت $x^2+y^2=4y$ بیان می‌کنیم. با جایگزینی $x^2+y^2=r^2$ و $y=r\sin\theta$ معادله‌های این دو دایره در دستگاه مختصات قطبی عبارتند از $C_1\ : r^2=2r\sin\theta+3$ و $C_2\ : r=4\sin\theta$.

ج) برای مشخص کردن ناحیه‌ی D، داخل دایره‌ی $C_۱ \ : x^۲ + y^۲ = ۲x$ و خارج دایره‌ی $C_۲ \ : x^۲ + y^۲ = ۲y$ واقع در ربع اول صفحه در مختصات قطبی با جایگزینی $x^۲ + y^۲ = r^۲$ ، $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$ داریم $C_۱ \ : r = ۲\cos\theta$ و $C_۲ \ : r = ۲\sin\theta$ و در نتیجه $D = \{(r, \theta) \ : \ ۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۴} \ , \ ۲\sin\theta \leq r \leq ۲\cos\theta\}$.



شکل ۴–۱۸ ناحیه‌ی D در قسمت (ب) مثال ۴–۳–۱ و نمودار $r = \sin(۲\theta)$.

اگر f تابعی باشد که توسط آن تغییرات متغیر r به متغیر θ وابسته شده باشد (یعنی $r = f(\theta)$) آنگاه نمودار این تابع عبارت است از تمام نقاطی چون P با مختصات قطبی (r, θ) که برای آنها $r = f(\theta)$.

مثال ۴–۳–۲ نمودار $r = f(\theta) = \sin(۲\theta)$ را در صفحه‌ی دکارتی رسم می‌کنیم.

با مشتق‌گیری نسبت به θ نتیجه می‌شود $r' = ۲\cos(۲\theta)$. جدول تغییرات تابع برای $۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}$ داده شده است. برای این تابع داریم:

$$f(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \sin(۲(\theta + \frac{\pi}{۲})) = -\sin(۲\theta) = -f(\theta)$$

نمودار تابع را در شکل ۴–۱۸ مشاهده کنید.

جهت روی نمودار بیانگر پیمایش r بر حسب افزایش θ است. مثلاً به ازای $\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \pi$ نقطه‌ی $(\theta, f(\theta))$ در ربع چهارم است. علامت مثبت $f'(\theta)$ بیانگر صعودی بودن $r = f(\theta)$ نسبت به θ و علامت منفی، نزولی بودن r را نشان می‌دهد.

θ	۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۲}$
$f(\theta)$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$f'(\theta)$	$+$	$+$	$+$	۰	$-$	$-$	$-$

بر اساس مختصات قطبی، تغییر متغیر $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ در انتگرال‌های دوگانه را تغییر متغیر قطبی می‌نامند. برای این تغییر متغیر داریم

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

مثال ۴-۳-۳ مقدار $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dA$ را به دست می‌آوریم که در آن D قرص $x^2+y^2 \leq 1$ است.

قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. در این صورت نقاط ناحیه‌ی D در دستگاه مختصات قطبی به شکل زیر بیان می‌شوند.

$$D = \{(r,\theta) \ : \ 0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

به این ترتیب:

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dA \quad = \quad \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\ drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\ dr = \pi\ln 2$$

مثال ۴-۳-۴ مقدار $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dA$ را روی ناحیه‌ی D، محصور بین دایره‌های $x^2+y^2=\pi^2$ و $x^2+y^2=4\pi^2$ تعیین می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. در این صورت نقاط ناحیه‌ی D در دستگاه مختصات قطبی به شکل زیر توصیف می‌شوند.

$$D = \{(r,\theta) \ : \ \pi \leq r \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

بنابر این:

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dA = \int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} r\sin r\ drd\theta = -6\pi^2$$

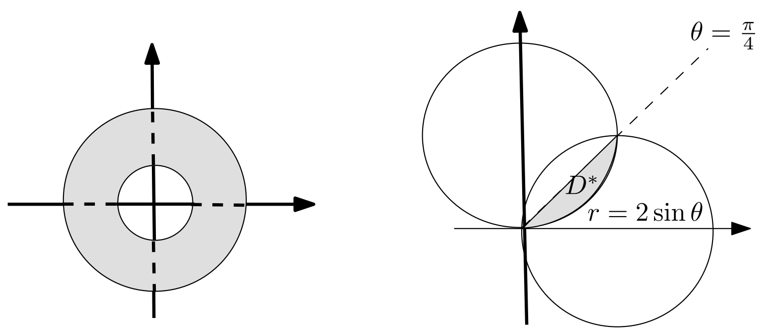
مثال ۴-۳-۵ مساحت ناحیه‌ی D در ربع اول صفحه، محصور به دایره‌های $C_1 \ : x^2+y^2=2x$ و $C_2 \ : x^2+y^2=2y$ را به کمک انتگرال دوگانه به دست می‌آوریم.

با استفاده از تغییر متغیر قطبی، معادله‌ی دایره‌ی C_1 به صورت $r = 2\cos\theta$ و دایره‌ی C_2 به صورت $r = 2\sin\theta$ خواهد بود. مساحت D دو برابر مساحت ناحیه‌ی به شکل زیر است (شکل ۵–۱۸).

$$\{(r,\theta)\ :\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\ ,\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta\}$$

به عبارت دیگر مساحت D عبارت است از:

$$\begin{aligned}\iint_D dA &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{2\sin\theta} r\ dr\Big)d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\ d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$



شکل ۵–۱۸ ناحیه مثال ۴–۳–۵ و مثال ۴–۳–۴.

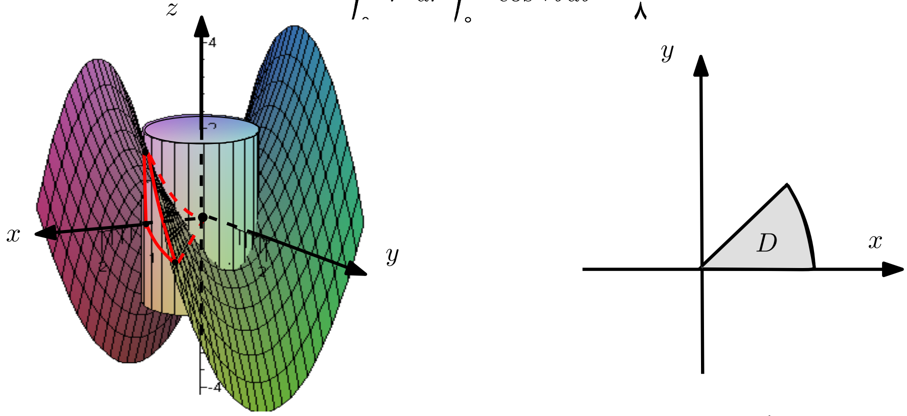
مثال ۴–۳–۶ حجم ناحیه‌ی بالای صفحه‌ی xoy محصور به زین اسبی $z = x^2 - y^2$ و استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ را در $\frac{1}{8}$ اول فضا به کمک انتگرال دوگانه به دست می‌آوریم (شکل ۵–۱۹).

اگر تصویر حجم فوق بر صفحه‌ی xoy را D بنامیم آنگاه این ناحیه در دستگاه مختصات قطبی به شکل زیر خواهد بود.

$$D = \{(r,\theta)\ :\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\ ,\ 0 \leq r \leq 1\}$$

به این ترتیب، حجم مورد نظر عبارت است از:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2-y^2)dA &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)r\, d\theta dr\\ &= \int_0^1 r^3 dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta = \frac{1}{8}\end{aligned}$$



شکل ۵–۱۹ حجم محصور به زین اسبی و استوانه، بالای صفحه‌ی xoy

۴–۴ انتگرال سه گانه

مفهوم انتگرال سه‌گانه برای توابع حقیقی سه متغیره شباهت بسیار زیادی با انتگرال دوگانه‌ی توابع حقیقی دو متغیره دارد. فرض کنیم تابع سه متغیره‌ی f روی مکعب مستطیل $T := [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ کراندار باشد. افرازهای $P_x = \{x_0,x_1,...,x_n\}$ را برای بازه‌ی $[a_1,b_1]$، $P_y = \{y_0,y_1,...,y_m\}$ را برای $[a_2,b_2]$ و $P_z = \{z_0,z_1,...,z_p\}$ را برای $[a_3,b_3]$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم M_{ijk} کوچکترین کران بالای مقادیر $f(x,y,z)$ در مکعب مستطیل $T_{ijk} := [x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$ برای $i=1,...,n$، $j=1,...,m$ و $k=0,...,p$ و m_{ijk} بزرگترین کران پایین مقادیر $f(x,y,z)$ در این مکعب باشند. اگر f پیوسته باشد آنگاه این مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بر T_{ijk} خواهند بود. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}U(f,P) &:= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k\\ L(f,P) &:= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k\end{aligned}$$

همانند آنچه برای توابع حقیقی یک و دو متغیره گفتیم، در اینجا نیز مقادیر $U(f,P)$ و $L(f,P)$ به ترتیب مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی تابع سه متغیره‌ی حقیقی f

برای افراز $P := \{T_{ijk} \ : \ ۱ \leq i \leq n \ , \ ۱ \leq j \leq m \ , \ ۱ \leq k \leq p\}$ از مکعب T نامیده می‌شوند. اگر بتوانیم با انتخاب افرازهای مناسب تفاضل این دو مقدار را به دلخواه کوچک کنیم، بنابر ویژگی‌های اعداد حقیقی، عدد حقیقی یکتائی وجود دارد که از تمام مجموع‌های ریمان بالائی f برای افراز دلخواه، کوچکتر و از تمام مجموع‌های ریمان پائینی تابع f برای افراز دلخواه، بزرگتر است. این عدد یکتا را انتگرال سه‌گانه‌ی f روی T می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر، در صورتی که برای هر $\varepsilon > ۰$ افراز P_ε برای مکعب مستطیل $T := [a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$، تابع f را روی مکعب مستطیل T انتگرال‌پذیر می‌نامیم. در این صورت عدد منحصر به فردی مانند I وجود دارد به قسمی که برای افراز P از T داریم $L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$. عدد I را انتگرال سه‌گانه‌ی f روی T می‌نامیم و با نماد $\iiint_T f \ dV$ یا $\iiint_T f(x, y, z) \ dxdydz$ نشان می‌دهیم.

در بسیاری از موارد تابع سه متغیره‌ی f روی ناحیه‌ای که لزوما به شکل مکعب مستطیل نیست تعریف شده است. در این حالت، برای ناحیه‌ی دلخواه ولی کراندار T (محصور در مکعب مستطیلی مانند $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$)، به ازای افراز P از $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$ مجموع‌های بالایی و پایینی $U(f, P)$ و $L(f, P)$ را تنها برای مکعب مستطیل‌هایی به دست می‌آوریم که با T اشتراک دارند. به عبارت دیگر، در این حالت قرار می‌دهیم

$$P_T := \{\Delta T_\ell \ : \ \ell = ۱, \ldots, q\}$$

که در آن $\Delta T_۱$، ...، ΔT_q اعضایی از افراز P هستند که با ناحیه‌ی T اشتراک دارند. بر این مبنا، حاصل‌جمع‌های بالا و پایین f متناظر افراز P_T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} U(f, P_T) &:= \sum_{\ell=۱}^{q} M_\ell \mathrm{vol}(\Delta T_\ell) \\ L(f, P_T) &:= \sum_{\ell=۱}^{q} m_\ell \mathrm{vol}(\Delta T_\ell) \end{aligned}$$

که در آن M_ℓ و m_ℓ به ترتیب کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین f بر ناحیه‌ی $\Delta T_\ell \cap T$، و $\mathrm{vol}(\Delta T_\ell)$ حجم مکعب مستطیل ΔT_ℓ است. مانند حالت قبل، تابع f را بر ناحیه‌ی T انتگرال‌پذیر ریمان نامیم هرگاه بتوانیم مقادیر $U(f, P_T)$ و $L(f, P_T)$ را با انتخاب افراز مناسب P از مکعب مستطیل حاوی ناحیه‌ی T به اندازه دلخواه به یکدیگر نزدیک کنیم و در این صورت عدد منحصر به فردی وجود خواهد داشت که همواره بین

حاصل‌جمع‌های بالا و حاصل‌جمع‌های پایین قرار بگیرد و آنرا با همان نماد $\iiint_T f\ dV$ نشان می‌دهیم.

انتگرال تابع f بر ناحیه‌ی T را می‌توانیم به صورت زیر تقریب بزنیم. اگر $P_T = \{\Delta T_\ell \ :\ \ell = ۱, \ldots, q\}$ افرازی از ناحیه‌ی T باشد که به شرح فوق حاصل شده باشد آنگاه برای هر ℓ با انتحاب نقطه‌ی دلخواه $c_\ell \in \Delta T_\ell \cap T$ عبارت $\sum_{\ell=۱}^{q} f(c_\ell)\mathrm{vol}(\Delta T_\ell)$ را یک حاصل‌جمع ریمان f بر T نظیر افراز P_T از این ناحیه می‌نامیم و آنرا با نماد $S(f, P_T)$ نشان می‌دهیم. روشن است که برای هر افراز P_T، $L(f, P_T) \leq S(f, P_T) \leq U(f, P_T)$. به این ترتیب اگر f بر T انتگرال‌پذیر باشد آنگاه با تغییر افراز P_T به گونه‌ای که عبارت $U(f, P_T) - L(f, P_T)$ کوچک شود، مقدار $S(f, P_T)$ نیز به $\iiint_T f\ dV$ نزدیک خواهد شد. به این ترتیب با انتخاب افراز مناسب P_T، عدد $S(f, P_T)$ تقریب مناسبی از انتگرال f بر T خواهد بود.

در حالت خاص اگر f تابع ثابت ۱ باشد، آنگاه هر سه حاصل‌جمع $L(f, P_T)$، $S(f, P_T)$ و $U(f, P_T)$ تقریب‌هائی از حجم ناحیه‌ی T هستند. در این حالت خاص، $U(f, P)$ دارای مقداری بیشتر یا مساوی حجم این ناحیه و $L(f, P)$ دارای مقداری کوچک‌تر یا مساوی حجم T است. به این ترتیب حجم ناحیه‌ی T برابر $\iiint_T ۱\ dV$ خواهد بود.

برای توابع سه متغیره نیز به دلیل پیچیدگی و گستردگی بحث تنها به ذکر این نکته می‌پردازیم که برای این دسته از توابع، شرط انتگرال‌پذیری شرطی ضعیف‌تر از پیوستگی است.

قضیه‌ی زیر تعمیم قضیه‌ی مشابه برای انتگرال‌های دوگانه است.

قضیه ۴-۴-۱ الف) اگر توابع سه متغیره‌ی f و g روی ناحیه‌ی کران‌دار T انتگرال‌پذیر باشند، برای $k \in \mathbb{R}$ تابع $kf + g$ نیز روی T انتگرال‌پذیر است و

$$\iiint_T (k\ f + g)\ dV = k\ \iiint_T f\ dV + \iiint_T g\ dV$$

ب) اگر تابع سه متغیره‌ی f روی ناحیه‌های کران‌دار $T_۱, T_۲$ انتگرال‌پذیر باشد و اشتراک $T_۱$ و $T_۲$ حداکثر یک رویه‌ی پیوسته باشد آنگاه f روی $T = T_۱ \cup T_۲$ نیز انتگرال‌پذیر است و

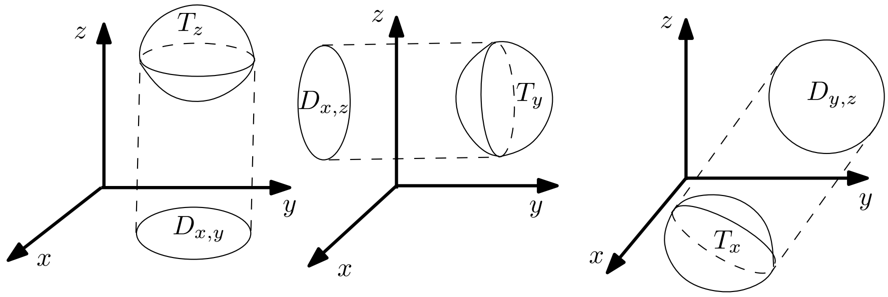
$$\iiint_T f\ dV = \iiint_{T_۱} f\ dV + \iiint_{T_۲} f\ dV$$

همانند انتگرال معین توابع حقیقی یک متغیره و انتگرال دوگانه، انتگرال‌های سه‌گانه نیز در عمل به روش‌های عددی تقریب زده می‌شوند ولی برای موارد خاص می‌توان از تعمیم قضیه‌ی فوبینی برای محاسبه‌ی انتگرال سه‌گانه استفاده کرد. به همین دلیل در این قسمت به معرفی چند دسته از نواحی خاص در فضا می‌پردازیم.

۱) ناحیه‌ی $T_z \subseteq \mathbb{R}^۳$ را یک ناحیه‌ی z—**ساده** می‌نامیم (شکل ۵—۲۰) هرگاه یک ناحیه‌ی D_{xy} در صفحه‌ی xoy و توابع پیوسته‌ی دو متغیره‌ی $g_۱$ و $g_۲$ روی D_{xy} وجود داشته باشند به قسمی که $T_z = \{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in D_{xy} \ , \ g_۱(x,y) \leq z \leq g_۲(x,y)\}$.

۲) ناحیه‌ی $T_y \subseteq \mathbb{R}^۳$ را y—**ساده** می‌نامیم (شکل ۵—۲۰) هرگاه یک ناحیه‌ی D_{xz} در صفحه‌ی xoz و توابع پیوسته‌ی دو متغیره‌ی $h_۱$ و $h_۲$ روی D_{xz} وجود داشته باشند به قسمی که $T_y = \{(x,y,z) \ : \ (x,z) \in D_{xz} \ , \ h_۱(x,z) \leq y \leq h_۲(x,z)\}$.

۳) ناحیه‌ی $T_x \subseteq \mathbb{R}^۳$ را x—**ساده** می‌نامیم (شکل ۵—۲۰) هرگاه یک ناحیه‌ی D_{yz} در صفحه‌ی yoz و توابع پیوسته‌ی دو متغیره‌ی $k_۱$ و $k_۲$ روی D_{yz} وجود داشته باشند به قسمی که $T_x = \{(x,y,z) \ : \ (y,z) \in D_{yz} \ , \ k_۱(y,z) \leq x \leq k_۲(y,z)\}$.



شکل ۵—۲۰ نواحی x—ساده ، y—ساده و z—ساده .

مثال ۴–۴–۲ ناحیه‌ی T محدود به کره‌ی $(x-۳)^۲ + (y-۴)^۲ + (z-۱)^۲ = ۱$ هم x—ساده، هم y—ساده وهم z—ساده است. برای این ناحیه داریم

$$T = \{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in D_{xy} \ , \ f_۱(x,y) \leq z \leq f_۲(x,y)\}$$

که در آن

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \{(x,y) \ : \ (x-۳)^۲ + (y-۴)^۲ \leq ۱\} \\ f_۱(x,y) &= ۱ - \sqrt{۱ - (x-۳)^۲ + (y-۴)^۲} \\ f_۲(x,y) &= ۱ + \sqrt{۱ - (x-۳)^۲ + (y-۴)^۲} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، اگر T را به عنوان یک ناحیه‌ی y—ساده در نظر بگیریم آنگاه

$$T = \{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in D_{xz} \ , \ g_۱(x,z) \leq z \leq g_۲(x,z)\}$$

که در آن $D_{xz} = \{(x,z) \ : \ (x-۳)^۲ + (z-۱)^۲ \leq ۱\}$ و

$$\begin{aligned} g_۱(x,z) &= ۴ - \sqrt{۱ - (x-۳)^۲ + (z-۱)^۲} \\ g_۲(x,z) &= ۴ + \sqrt{۱ - (x-۳)^۲ + (z-۱)^۲} \end{aligned}$$

نهایتا به عنوان یک ناحیه‌ی z—ساده، T به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in D_{yz} \ , \ h_۱(y,z) \leq z \leq h_۲(y,z)\} \ , \\ D_{yz} &= \{(y,z) \ : \ (y-۴)^۲ + (z-۱)^۲ \leq ۱\} \\ h_۱(y,z) &= ۳ - \sqrt{۱ - (y-۴)^۲ + (z-۱)^۲} \\ h_۲(y,z) &= ۳ + \sqrt{۱ - (y-۴)^۲ + (z-۱)^۲} \end{aligned}$$

قضیه‌ی زیر نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال یک تابع پیوسته را بر یک ناحیه‌ی ساده بیان می‌کند.

قضیه ۴-۴-۳ اگر f روی ناحیه‌ی z—ساده‌ی

$$T = \{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in D_{xy} \ , \ g_۱(x,y) \leq z \leq g_۲(x,y)\}$$

پیوسته باشد، آنگاه روی T انتگرال‌پذیر است و

$$\iiint_T f dV = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{g_۱(x,y)}^{g_۲(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dA$$

به همین ترتیب اگر T ناحیه‌ی y—ساده‌ی

$$T = \{(x,y,z) \ : \ (x,z) \in D_{xz} \ , \ h_۱(x,z) \leq y \leq h_۲(x,z)\}$$

باشد آنگاه

$$\iiint_T f dV = \iint_{D_{xz}} \left(\int_{h_۱(x,z)}^{h_۲(x,z)} f(x,y,z) dy \right) dA$$

و برای ناحیه‌ی x—ساده‌ی $T = \{(x,y,z) : (y,z) \in D_{yz}, k_1(y,z) \leq x \leq k_2(y,z)\}$،

$$\iiint_T f dV = \iint_{D_{yz}} \left(\int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x,y,z) dx \right) dA$$

همانند انتگرال‌های دوگانه، برای نواحی که x، y و z—ساده باشند هر سه فرمول قضیه‌ی فوق به یک نتیجه منجر می‌شود ولی گاهی اوقات محاسبه‌ی با یکی از این فرمول‌ها ساده‌تر است.

مثال ۴–۴–۴ انتگرال سه‌گانه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ را روی $T = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ محاسبه می‌کنیم.

این ناحیه، x، y و z—ساده است. برای مثال به ازای $D_{yz} = [0,1] \times [0,1]$ داریم

$$\begin{aligned}
\iiint_T f dV &= \iint_{D_{yz}} \Big(\int_0^1 (xy + yz + xz) dx\Big) dA \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \Big(\int_0^1 (xy + yz + xz) dx\Big) dydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [\tfrac{1}{2}x^2(y+z) + xyz]\Big|_0^1 dydz \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^1 [\tfrac{1}{2}(y+z) + yz] dy\Big) dz \\
&= \int_0^1 (\tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{1}{2}y^2 z + \tfrac{1}{2}yz)\Big|_0^1 dz \\
&= \int_0^1 (\tfrac{1}{4} + z) dz = \tfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

مثال ۴–۴–۵ انتگرال سه گانه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xyz$ را روی ناحیه‌ی T، محصور به رویه‌ی استوانه‌ای $z = 1 - x^2$ و صفحه‌ی $x + y = 1$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا به دست می‌آوریم.

ناحیه‌ی $T = \{(x,y,z) \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x, \ 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$ یک ناحیه‌ی z—ساده است. پس

$$\begin{aligned}
\iiint_T xyz dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(\int_0^{1-x^2} xyz \, dz\Big) dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (\tfrac{1}{2}xyz^2)\Big|_{z=0}^{z=1-x^2} dydx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_۰^۱\int_۰^{۱-x} \Big(\frac{۱}{۲}x(۱-x^۲)^۲ y\, dy\Big)dx\\
&= \int_۰^۱ \Big(\frac{۱}{۴}x(۱-x^۲)^۲ y^۲\Big|_{y=۰}^{y=۱-x}\Big)dx\\
&= \int_۰^۱ \frac{۱}{۴}x(۱-x^۲)^۲(۱-x)^۲dx = \frac{۴۷}{۳۳۶۰}
\end{aligned}
$$

مثال ۴-۴-۶ انتگرال سه گانه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = z + x\cos y$ را روی ناحیه‌ی محصور به رویه‌ی استوانه‌ای $y = x^۲$ و صفحات $x = ۱$، $y = ۰$، $z = ۰$ و $z = ۲$ به دست می آوریم.

ناحیه‌ی T به عنوان یک ناحیه‌ی y—ساده به صورت زیر بیان می‌شود

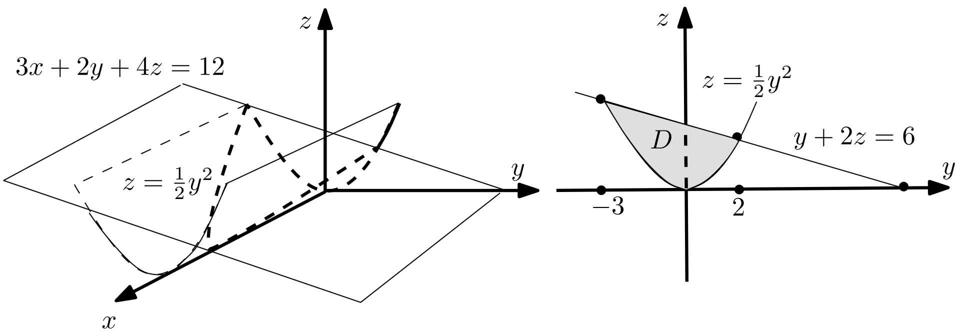
$$T = \{(x,y,z)\ :\ ۰ \le x \le ۱\ ,\ ۰ \le z \le ۲\ ,\ ۰ \le y \le x^۲\}$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\iiint_T (z + x\cos y)\, dV &= \int_۰^۱\int_۰^۲ \Big(\int_۰^{x^۲} (z + x\cos y)dy\Big)dzdx\\
&= \int_۰^۱\int_۰^۲ \big(zx^۲ + x\sin x^۲\big)dzdx\\
&= \int_۰^۱ \big(۲x^۲ + ۲x\sin x^۲\big)dx = \frac{۵}{۳} - \cos(۱)
\end{aligned}
$$

همان طور که قبلا نیز اشاره کردیم، در حالتی که تابع f بر ناحیه‌ی T تابع ثابت ۱ باشد آنگاه مقدار عبارت $\iiint_T dV$ برابر حجم محصور به ناحیه‌ی T خواهد بود.

مثال ۴-۴-۷ حجم ناحیه‌ی T محصور به صفحه‌های $۳x + ۲y + ۴z = ۱۲$ و $x = ۰$ و استوانه‌ی سهموی $z = \frac{۱}{۲}y^۲$ را به کمک انتگرال سه‌گانه به دست می آوریم.



شکل ۵–۲۱ حجم ناحیه‌ی T در مثال ۴–۴–۷.

در این مثال ناحیه‌ی T را به عنوان یک ناحیه‌ی x–ساده در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $h_1(y,z)=0$، $h_2(y,z)=4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z$ و $D_{yz}=\{(y,z)\ :\ -3\le y\le 2\ ,\ \frac{1}{2}y^2\le z\le 3-\frac{1}{2}y\}$. بنابر این حجم مورد نظر عبارت است از $\iiint_T dV$ که در آن

$T=\{(x,y,z)\ :\ (y,z)\in D_{yz}\ ,\ h_1(y,z)\le x\le h_2(y,z)\}$.

به این ترتیب

$$\begin{aligned}
\iiint_T dV &= \iint_{D_{yz}}\Big(\int_0^{4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z} dx\Big)dA\\
&= \iint_{D_{yz}}(4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z)dA\\
&= \int_{-3}^{2}\Big(\int_{\frac{1}{2}y^2}^{3-\frac{1}{2}y}(4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z)dz\Big)dy\\
&= \int_{-3}^{2}(4z-\frac{2}{3}yz-\frac{2}{3}z^2)\Big|_{z=\frac{1}{2}y^2}^{z=3-\frac{1}{2}y}dy\\
&= \frac{625}{36}
\end{aligned}$$

۴–۵ تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه

برای توابع سه متغیره نیز به کمک تغییر متغیر می‌توان در حالت‌های خاص ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را به یک ناحیه‌ی ساده‌تر یا تابع را به تابعی ساده‌تر تبدیل کرد. با بحثی شبیه به آنچه در مورد توابع حقیقی دو متغیره گفته شد، قضیه‌ی زیر برای تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه قابل بیان است. پیش از بیان این قضیه یادآوری می‌کنیم که منظور از یک نقطه‌ی درونی برای مجموعه‌ی D نقطه‌ای است که یک همسایگی از آن نقطه زیرمجموعه‌ی D باشد.

قضیه ۴–۵–۱ فرض کنیم D^* ناحیه‌ای در دستگاه مختصات uvw و D تصویر آن در دستگاه مختصات xyz تحت نگاشت $S:D^*\to D$ با ضابطه‌ی $S(u,v,w)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$ و S تناظری یک به یک و پوشا بین نقاط درونی D و D^* باشد. همچنین فرض کنیم توابع $x=x(u,v,w)$، $y=y(u,v,w)$ و $z=z(u,v,w)$ در نقاط درونی D^* مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند و در

هر نقطه‌ی درونی $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq ۰$ که در آن

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

در این صورت اگر تابع f بر D پیوسته باشد آنگاه

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\ |J|\ dudvdw$$

قابل ذکر است که شبیه به توابع دومتغیره، $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$.

مثال ۴–۵–۲ حجم محدود به صفحات $x + y + ۲z = \pm ۳$، $x - ۲y + z = \pm ۲$ و $۴x + y + z = \pm ٦$ را به کمک انتگرال سه‌گانه به دست می‌آوریم.

اگر قرار دهیم $u = x + y + ۲z$، $v = x - ۲y + z$ و $w = ۴x + y + z$ آنگاه

$$T^* = \{(u,v,w)\ :\ -۳ \leq u \leq ۳\ ,\ -۲ \leq v \leq ۲\ ,\ -٦ \leq w \leq ٦\}$$

ناحیه‌ی متناظر T، ناحیه‌ی محدود به صفحات فوق در فضای xyz خواهد بود. در این تغییر متغیر

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} = ۱۸$$

و در نتیجه $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{۱}{۱۸}$. بنابر این حجم مورد نظر عبارت است از

$$\iiint_T dxdydz = \iiint_{T^*} |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| dudvdw = \int_{-٦}^{٦}\int_{-۲}^{۲}\int_{-۳}^{۳} \frac{۱}{۱۸}\ dudvdw = ۱٦$$

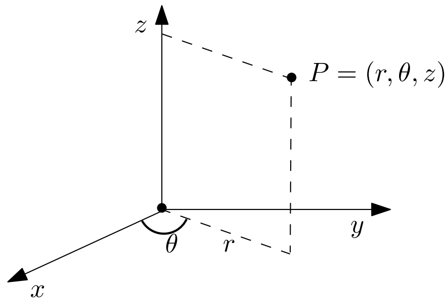
مثال ۴-۵-۳ حجم ناحیه‌ی محصور به بیضی‌گون غیراستاندارد T با معادله‌ی $(x+y+2z)^2+(x-2y+z)^2+(4x+y+z)^2=4$ را به کمک انتگرال سه‌گانه به دست می‌آوریم (محورهای این بیضی‌گون با محورهای مختصات موازی نیستند).

اگر قراردهیم $u=x+y+2z$، $v=x-2y+z$ و $w=4x+y+z$ آنگاه $u^2+v^2+w^2=(x+y+2z)^2+(x-2y+z)^2+(4x+y+z)^2=4$. پس با این تغییر متغیر، بیضی‌گون T در دستگاه xyz به کره‌ی $T^*=\{(u,v,w)\ :u^2+v^2+w^2=4\}$ در دستگاه uvw تبدیل می‌شود. برای این تغییر متغیر $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{18}$. با توجه به این که حجم T^*، یعنی حجم کره‌ی به شعاع ۲ برابر $\iiint_{T^*}dudvdw=\frac{4}{3}\pi(2^3)=\frac{32}{3}\pi$ است، حجم مورد نظر عبارت است از

$$\iiint_T dxdydz=\iiint_{T^*}|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw=\frac{1}{18}\iiint_{T^*}dudvdw=\frac{16}{27}\pi$$

۴-۶ دستگاه مختصات استوانه‌ای و تغییر متغیر استوانه‌ای

یکی از روش‌های نمایش یک نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ استفاده از دستگاه مختصات استوانه‌ای است. این دستگاه به نوعی تعمیم دستگاه مختصات قطبی از صفحه به فضا است. اگر P نقطه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ با مختصات دکارتی (x,y,z) باشد، مختصات استوانه‌ای P عبارت است از (r,θ,z)، که در آن z سومین مولفه‌ی مختصات دکارتی P و (r,θ) مختصات قطبی نقطه‌ی (x,y)، تصویر P بر صفحه‌ی xoy، است (شکل ۵-۲۲).



شکل ۵-۲۲ مختصات استوانه‌ای.

پس نقطه‌ی با مختصات دکارتی (x,y,z) برای $x\neq 0$ دارای مختصات استوانه‌ای $(\sqrt{x^2+y^2},\arctan(\frac{y}{x}),z)$ است. به عکس، نقطه‌ی با مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) دارای مختصات دکارتی $(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$ است.

مثال ۴-۶-۱ الف) نقطه‌ی با مختصات دکارتی $(\sqrt{۳}, ۳, -۱)$ دارای مختصات استوانه‌ای $(۲\sqrt{۳}, \frac{\pi}{۳}, -۱)$ است.

ب) معادله‌ی نیم مخروط $x^۲ + y^۲ - \frac{z^۲}{c^۲} = ۰$ که $z \geq ۰$ در مختصات استوانه‌ای با جایگزینی $x^۲ + y^۲ = r^۲$ در معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - \frac{z^۲}{c^۲} = ۰$ به صورت $r^۲ - \frac{z^۲}{c^۲} = ۰$ یا $z = r|c|$ بیان می‌شود. معادله‌ی این مخروط به صورت $z = r\cot\varphi$ نیز قابل بیان است که $\varphi = \cot^{-۱}|c|$، زاویه‌ی بین مولد و محور مخروط است.

ج) معادله‌ی نیم‌کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = k^۲ \quad , z \geq ۰$ در مختصات استوانه‌ای، با جایگزینی $x^۲ + y^۲ = r^۲$ در معادله‌ی نیم‌کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = k^۲$ $(z \geq ۰)$ عبارت است از $z = \sqrt{k^۲ - r^۲}$.

د) برای بیان ناحیه‌ی T، محصور بین سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ و نیم مخروط $z = \sqrt{۳(x^۲ + y^۲)}$ در مختصات استوانه‌ای با جایگزینی $x^۲ + y^۲ = r^۲$، معادله‌ی سهمی‌گون در مختصات استوانه‌ای به شکل $z = r^۲$ و معادله‌ی مخروط به صورت $z = \sqrt{۳}\, r$ بیان می‌شود. محل تلاقی این دو رویه از حل معادله‌ی $z = r^۲ = \sqrt{۳}\, r$ به دست می‌آید، پس $z = ۳$ و $r = \sqrt{۳}$. در نتیجه:

$$T = \{(r, \theta, z) \ : \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ ۰ \leq r \leq \sqrt{۳} \ , \ r^۲ \leq z \leq \sqrt{۳}\, r\}$$

اکنون به تغییر متغیر خاصی برای انتگرال‌های سه‌گانه می‌پردازیم که یک نوع تعمیم طبیعی از تغییر متغیر قطبی است. این تغییر متغیر مهم، تغییر متغیر استوانه‌ای است و بر اساس دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌شود. برای این تغییر متغیر داریم $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $z = z$. پس

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & r\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = r$$

مانند تغییر متغیر قطبی، اهمیت این تغییر متغیر در تعبیر هندسی متغیرهای استوانه‌ای در فضای دکارتی است. در واقع همان طور که در قسمت (د) مثال قبل مشاهده کردیم، با استفاده از این تعبیر هندسی می‌توانیم محدوده‌ی مناسب برای تغییرات متغیرهای استوانه‌ای را تعیین کنیم.

مثال ۴-۶-۲ انتگرال سه‌گانه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = x^۲y^۲$ را روی ناحیه‌ی T، محصور به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحه‌ی $z = a$ به دست می‌آوریم.

قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $z = z$. نقاط مشترک مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحه‌ی $z = a$ در معادله‌ی $a = \sqrt{x^۲ + y^۲}$، یعنی $x^۲ + y^۲ = a^۲$

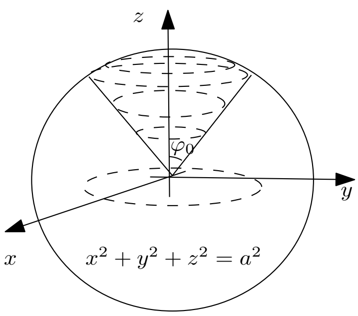
صدق می‌کنند. به این ترتیب

$$T=\{(r,\theta,z)\ :\ ۰\leq\theta\leq ۲\pi\ ,\ ۰\leq r\leq a\ ,\ r\leq z\leq a\}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}\iiint_T x^{۲}y^{۲}dxdydz &= \int_{۰}^{۲\pi}\Big(\int_{۰}^{a}\Big(\int_{r}^{a} r^{۵}\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta\ dz\Big)dr\Big)d\theta\\ &= \int_{۰}^{۲\pi}\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta\ d\theta\int_{۰}^{a} r^{۵}(a-r)\ dr\\ &= \frac{۱}{۱۶۸}\pi a^{۷}\end{aligned}$$

مثال ۴–۶–۳ حجم ناحیه‌ی T، درون مخروط $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\cot\varphi_{۰}$ و محصور توسط کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ را به کمک انتگرال سه‌گانه و با تغییر متغیر استوانه‌ای به دست می‌آوریم.



شکل ۵–۲۳ حجم ناحیه‌ی T در مثال ۴–۶–۲.

در دستگاه مختصات استوانه‌ای معادله‌ی مخروط $z=r\cot\varphi_{۰}$ و معادله‌ی نیم کره‌ی بالایی $z=\sqrt{a^{۲}-r^{۲}}$ است. تصویر خم حاصل از برخورد این دو رویه بر صفحه‌ی xoy دایره به معادله‌ی $r=a\sin\varphi_{۰}$ است. به این ترتیب

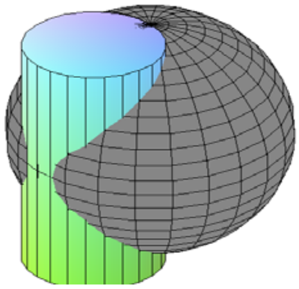
$$T=\{(r,\theta,z):\ ۰\leq\theta\leq ۲\pi\ ,\ ۰\leq r\leq a\sin\varphi_{۰}\ ,\ r\cot\varphi_{۰}\leq z\leq\sqrt{a^{۲}-r^{۲}}\}$$

و در نتیجه

$$\iiint_T dxdydz = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{a\sin\varphi_{۰}}\int_{r\cot\varphi_{۰}}^{\sqrt{a^{۲}-r^{۲}}} r\ dzdrd\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left(\int_{\circ}^{a\sin\varphi_{\circ}}(\sqrt{a^{\text{۲}}-r^{\text{۲}}}-r\cot\varphi_{\circ})r\,dr\right)d\theta \\
&= \int_{\circ}^{\text{۲}\pi}d\theta\int_{\circ}^{a\sin\varphi_{\circ}}(\sqrt{a^{\text{۲}}-r^{\text{۲}}}-r\cot\varphi_{\circ})r\,dr \\
&= \text{۲}\pi\left(-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\sqrt{(a^{\text{۲}}-r^{\text{۲}})^{\text{۳}}}-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}r^{\text{۳}}\cot\varphi_{\circ}\right)\Big|_{\circ}^{a\sin\varphi_{\circ}} \\
&= \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\pi a^{\text{۳}}(\text{۱}-\cos^{\text{۳}}\varphi_{\circ}-\sin^{\text{۳}}\varphi_{\circ}\cot\varphi_{\circ})=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\pi a^{\text{۳}}(\text{۱}-\cos\varphi_{\circ})
\end{aligned}
$$

مثال ۴ـ۶ـ۴ حجم ناحیه‌ی T، درون استوانه‌ی $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}=ax$ و محصور به کره‌ی $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}=a^{\text{۲}}$ را با کمک انتگرال سه‌گانه تعیین می‌کنیم (شکل ۵ـ۲۴).



شکل ۵ـ۲۴ حجم ناحیه‌ی T در مثال ۴ـ۶ـ۴.

در دستگاه مختصات استوانه‌ای معادله‌ی کره‌ی $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}=a^{\text{۲}}$ به صورت $r^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}=a^{\text{۲}}$ است. تصویر حجم مورد نظر بر صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی محصور توسط دایره‌ی $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}=ax$، یا $r=a\cos\theta$ در سیستم مختصات قطبی، خواهد بود. با توجه به تقارن موجود در ناحیه‌ی T، حجم مورد نظر ۴ برابر حجم ناحیه‌ی $T_{\text{۱}}$ به شکل زیر است.

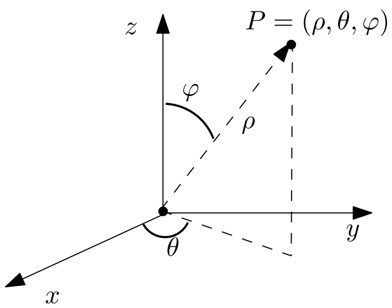
$$
T_{\text{۱}}=\{(r,\theta,z)\ :\ \circ\le\theta\le\frac{\pi}{\text{۲}}\ ,\ \circ\le r\le a\cos\theta\ ,\ \circ\le z\le\sqrt{a^{\text{۲}}-r^{\text{۲}}}\}
$$

بنابر این

$$
\begin{aligned}
\iiint_T dxdydz &= \text{۴}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\int_{\circ}^{a\cos\theta}\int_{\circ}^{\sqrt{a^{\text{۲}}-r^{\text{۲}}}}r\,dzdrd\theta \\
&= \text{۴}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\int_{\circ}^{a\cos\theta}r\sqrt{a^{\text{۲}}-r^{\text{۲}}}dr\,d\theta \\
&= -\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\sqrt{(a^{\text{۲}}-r^{\text{۲}})^{\text{۳}}}\Big|_{\circ}^{a\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{\text{۴}}{\text{۳}}a^{\text{۳}}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}(\text{۱}-\sin^{\text{۳}}\theta)d\theta=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}a^{\text{۳}}(\frac{\pi}{\text{۲}}-\frac{\text{۲}}{\text{۳}})
\end{aligned}
$$

۴–۷ دستگاه مختصات کروی و تغییر متغیر کروی

یکی دیگر از روش‌های نمایش نقاط در فضای $\mathbb{R}^۳$ استفاده از مختصات کروی است. اگر P نقطه‌ای در فضا با مختصات دکارتی (x,y,z) باشد، مختصات کروی P عبارت است از (ρ,θ,φ) به قسمی که ρ فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مبدأ، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ زاویه‌ی بین بردار مکان نقطه‌ی P' به مختصات (x,y) (تصویر P بر صفحه‌ی xoy) با جهت مثبت محور x و $۰ \leq \varphi \leq \pi$ زاویه‌ی بین بردار مکان $\overrightarrow{OP}$ با جهت مثبت محور z است (شکل ۵—۲۴). به این ترتیب نقطه‌ی P با مختصات دکارتی (x,y,z) برای $x \neq ۰$ دارای مختصات کروی $(\rho,\theta,\varphi) = (\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\ ,\ \arctan(\frac{y}{x})\ ,\ \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}))$ و نقطه‌ی P با مختصات کروی (ρ,θ,φ) دارای مختصات دکارتی به شکل $(x,y,z) = (\rho\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \rho\sin\theta\sin\varphi\ ,\ \rho\cos\varphi)$ است (شکل ۵—۲۴).



شکل ۵—۱۴ مختصات کروی.

با چند مثال مفهوم دستگاه مختصات کروی روشن‌تر خواهد شد.

مثال ۴–۷–۱ الف) نقطه‌ی P با مختصات دکارتی $(۱, \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$ دارای مختصات کروی $(\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۴})$ است. به همین ترتیب نقطه‌ی P با مختصات دکارتی $(۱,-۱,\sqrt{۲})$ دارای مختصات کروی $(۲, \frac{۷\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴})$ است.

ب) معادله‌ی نیم‌مخروط $x^۲+y^۲-z^۲ = ۰$ $(z > ۰)$ در مختصات کروی با جایگزینی $x^۲+y^۲ = \rho^۲\sin^۲\varphi$ و $z=\rho\cos\varphi$ به صورت $\rho^۲\sin^۲\varphi - \rho^۲\cos^۲\varphi = ۰$ یا $\rho^۲\cos(۲\varphi) = ۰$ بیان می‌شود. بنابر این $\varphi = \frac{\pi}{۴}$ معادله‌ی این مخروط در دستگاه مختصات کروی خواهد بود.

ج) معادله‌ی کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = k^۲$ در مختصات کروی با جایگزینی $x^۲+y^۲+z^۲ = \rho^۲$، به صورت $\rho = k$ بیان می‌شود.

د) برای تعیین ناحیه‌ی T در فضا، داخل سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ و خارج مخروط $z = \sqrt{۳(x^۲ + y^۲)}$ در مختصات کروی، با جایگزینی $x^۲ + y^۲ = \rho^۲ \sin^۲ \varphi$ و $z = \rho \cos\varphi$ معادله‌ی سهمی‌گون به شکل $\rho\cos\varphi = \rho^۲ \sin^۲\varphi$، یا به طور معادل $\rho = \dfrac{\cos\varphi}{\sin^۲\varphi}$ بیان می‌شود. معادله‌ی مخروط نیز به شکل $\rho\cos\varphi = \sqrt{۳\rho^۲ \sin^۲\varphi}$، یا به طور معادل $\varphi = \dfrac{\pi}{۶}$ است. ناحیه‌ی T از دوران ناحیه‌ی محصور به سهمی $z = y^۲$ و خط $z = \sqrt{۳}y$ حول محور z به دست می‌آید. به این ترتیب با استفاده از سیستم مختصات کروی، ناحیه‌ی T به صورت زیر توصیف می‌شود.

$$T = \{(\rho,\theta,\varphi) \ : \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ \frac{\pi}{۶} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲} \ , \ ۰ \leq \rho \leq \frac{\cos\varphi}{\sin^۲\varphi}\}$$

بر اساس سیستم مختصات کروی می‌توانیم تغییر متغیر کروی در انتگرال سه‌گانه که یکی دیگر از تغییر متغیرهای مهم در این مبحث است را مطرح کنیم. برای این تغییر متغیر داریم $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$، $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$ و $z = \rho\cos\varphi$. پس

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & ۰ & \rho\sin\varphi \end{pmatrix} = \rho^۲ \sin\varphi$$

مثال ۴-۷-۲ انتگرال سه‌گانه‌ی تابع $f(x,y,z) = \dfrac{۱}{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}}$ را روی ناحیه‌ی T، محصور به کره‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ به دست می آوریم.

با استفاده از تغییر متغیر کروی، ناحیه‌ی T به صورت زیر توصیف می‌شود.

$$T = \{(\rho,\theta,\varphi) \ : \ ۱ \leq \rho \leq ۲ \ , \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ ۰ \leq \varphi \leq \pi\}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{dV}{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}} &= \int_۰^{\pi} \int_۰^{۲\pi} \int_۱^{۲} \frac{\sin\varphi}{\rho} \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= (\int_۰^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi) \, (\int_۰^{۲\pi} d\theta) \, (\int_۱^{۲} \frac{d\rho}{\rho}) = ۴\pi \ln ۲ \end{aligned}$$

مثال ۴–۷–۳ حجم ناحیه‌ی T، درون مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲} \cot \varphi_۰$ و محصور توسط کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ را به کمک انتگرال سه‌گانه (با تغییر متغیر کروی) محاسبه می‌کنیم.

در دستگاه مختصات کروی معادله‌ی مخروط و کره‌ی مورد نظر به ترتیب $\varphi = \varphi_۰$ و $\rho = a$ است. تصویر ناحیه‌ی فوق بر صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی محصور توسط دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = a^۲ \sin^۲ \varphi_۰$ است. به این ترتیب:

$$T = \{(\rho, \theta, \varphi) \ : \ ۰ \leq \rho \leq a \ , \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ ۰ \leq \varphi \leq \varphi_۰\}$$

و در نتیجه حجم مورد نظر برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} \iiint_T dV &= \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{\varphi_۰} \int_۰^a \rho^۲ \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \left(\int_۰^{\varphi_۰} \sin \varphi \, d\varphi\right) \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right) \left(\int_۰^a \rho^۲ \, d\rho\right) = \frac{۲}{۳}\pi a^۳ (۱ - \cos \varphi_۰) \end{aligned}$$

این مثال را قبلا در بحث تغییر متغیر استوانه‌ای نیز مطرح کرده بودیم. مشاهده می‌کنیم که به طور طبیعی هر دو روش به یک نتیجه منجر شده‌اند ولی در این مورد تغییر متغیر کروی محاسبات را کمی کوتاهتر کرده است.

مثال ۴–۷–۴ به کمک انتگرال سه‌گانه حجم کره‌ی به شعاع k را به دست می‌آوریم.

مرکز کره را مبدأ مختصات در نظر می‌گریم. به این ترتیب در سیستم مختصات کروی ناحیه‌ی T، محصور توسط کره، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$T = \{(\rho, \theta, \varphi) \ : \ ۰ \leq \rho \leq k \ , \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ ۰ \leq \varphi \leq \pi\}$$

بنابر این حجم برابر است با

$$\begin{aligned} \iiint_T dV &= \int_۰^{\pi} \int_۰^{۲\pi} \int_۰^k \rho^۲ \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \left(\int_۰^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi\right) \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right) \left(\int_۰^k \rho^۲ \, d\rho\right) = \frac{۴}{۳}\pi k^۳ \end{aligned}$$

مثال ۴–۷–۵ مقدار عبارت $\int_{-۲}^{۲} \int_{-\sqrt{۴-x^۲}}^{\sqrt{۴-x^۲}} \int_۰^{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}} (x^۲ + y^۲) dz dy dx$ را محاسبه می‌کنیم.

در اینجا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری ناحیه‌ی بین نیم‌کره‌ی $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ و صفحه‌ی xoy است. داریم

$$\begin{aligned} \circ \leq z \leq \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲} \quad &\Longleftrightarrow \quad x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴ \ , \ z \geq \circ \\ &\Longleftrightarrow \quad \circ \leq \rho \leq ۲ \ , \ \circ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

به این ترتیب با استفاده از دستگاه مختصات کروی،

$$T = \{(\rho, \theta, \varphi) \ : \ \circ \leq \rho \leq ۲ \ , \ \circ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ \circ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲}\}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned} \int_{-۲}^{۲} \int_{-\sqrt{۴-x^۲}}^{\sqrt{۴-x^۲}} \int_{\circ}^{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}} (x^۲ + y^۲) dz dy dx &= \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\circ}^{۲\pi} \int_{\circ}^{۲} \rho^۴ \sin^۳ \varphi \ d\rho \ d\theta \ d\varphi \\ &= \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۳ \varphi \ d\varphi \int_{\circ}^{۲\pi} d\theta \int_{\circ}^{۲} \rho^۴ \ d\rho \\ &= \frac{۱۲۸}{۱۵} \pi \end{aligned}$$

مثال ۴-۷-۶ مقدار انتگرال $\iiint_T e^{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}} \ dV$ را محاسبه می‌کنیم که در آن $T = \{(x, y, z) \ : \ x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۱$ و $y \geq \circ\}$.

با استفاده از دستگاه مختصات کروی،

$$T = \{(\rho, \theta, \varphi) \ : \ \circ \leq \rho \leq ۱ \ , \ \circ \leq \theta \leq \pi \ , \ \circ \leq \varphi \leq \pi\}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} \iiint_T e^{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}} \ dV &= \int_{\circ}^{\pi} \int_{\circ}^{\pi} \int_{\circ}^{۱} e^{\rho^۳} \rho^۲ \sin \varphi \ d\rho \ d\theta \ d\varphi \\ &= \left(\int_{\circ}^{\pi} \sin \varphi \ d\varphi\right) \left(\int_{\circ}^{\pi} d\theta\right) \left(\int_{\circ}^{۱} e^{\rho^۳} \rho^۲ \ d\rho\right) \\ &= \frac{۲}{۳} \pi (e - ۱) \end{aligned}$$

۴-۸ برخی کاربردهای انتگرال چندگانه در فیزیک

یکی از دستاوردهای مهم گالیله و نیوتن استفاده از فضای دکارتی برای مدل کردن رخدادهای جهان فیزیکی بود. بنابر قانون بنیانی نیوتن در فیزیک کلاسیک، شئ متحرکی

به جرم m را به عنوان نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که مسیر حرکت آن توسط یک تابع برداری مانند $\mathbf{r}$ و بر حسب پارامتر زمان، t، توصیف می‌شود. اگر این نقطه تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ شتاب گیرد آنگاه $\mathbf{F} = m\dfrac{d^۲\mathbf{r}}{dt^۲}$. اما در عمل یک شئ فیزیکی را نمی‌توان یک نقطه در نظر گرفت. بنابر این باید با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، این شئ را با یک نقطه جایگزین کنیم که همان جرم را دارد. به عبارت دیگر برای استفاده‌ی درست از فرمول نیوتن مفهوم **مرکز جرم** مطرح می‌شود. برای درک بهتر این ایده بهتر است با یک شئ فیزیکی شامل n جزء شروع کنیم. فرض کنیم هر یک از این اجزا با جرم m_i، تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}_i$ قرار دارد و مسیر آن توسط تابع برداری $\mathbf{r}_i$ با پارامتر زمان t توصیف می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=۱}^{n} F_i, \qquad M = \sum_{i=۱}^{n} m_i, \qquad \bar{\mathbf{r}} = \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n} m_i\mathbf{r}_i$$

به این ترتیب برای این مجموعه‌ی n نقطه‌ای داریم:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=۱}^{n}\mathbf{F}_i = \sum_{i=۱}^{n} m_i\frac{d^۲\mathbf{r}_i}{dt^۲} = \frac{d^۲}{dt^۲}\sum_{i=۱}^{n} m_i\mathbf{r}_i = M\ \ \frac{d^۲}{dt^۲}\Big(\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n} m_i\mathbf{r}_i\Big) = M\frac{d^۲\bar{\mathbf{r}}}{dt^۲}$$

در نتیجه یک تعریف منطقی برای مرکز جرم این مجموعه، نقطه‌ای است که بردار مکان آن توسط تابع برداری $\bar{\mathbf{r}}$ مشخص می‌شود. اگر داشته باشیم $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ آنگاه

$$\bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \Big(\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n} m_i x_i, \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n} m_i y_i, \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n} m_i z_i\Big)$$

در فیزیک کلاسیک، مقادیر $\sum_{i=۱}^{n} m_i x_i$، $\sum_{i=۱}^{n} m_i y_i$ و $\sum_{i=۱}^{n} m_i z_i$ را **گشتاورهای اول** این مجموعه از نقاط نسبت به صفحات yoz، xoz و xoy می‌نامند و با نمادهای M_{yz}، M_{xz} و M_{xy} نمایش می‌دهند.

اکنون می‌توانیم به کمک ایده‌ی بنیانی حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی تقسیم یک ناحیه به قطعات بی‌نهایت کوچک، مختصات مرکز جرم یک جسم فیزیکی را محاسبه کنیم. فرض کنیم چگالی جرمی در نقاط مختلف یک جسم T در دستگاه مختصات دکارتی بر حسب مختصات آن نقاط و توسط تابع حقیقی سه متغیره‌ی $\rho = \rho(x, y, z)$ مشخص شده باشد. از این پس ناحیه‌ی شامل این جسم را هم با T نمایش می‌دهیم. این جسم را می‌توان محدود به یک مکعب مستطیل $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ در نظر گرفت. به کمک افرازهای $P_۱ = \{a = x_۰, x_۱, \cdots, x_n = b\}$ ، $P_۲ = \{c = y_۰, y_۱, \cdots, y_m = d\}$ و $P_۳ = \{e = z_۰, z_۱, \cdots, z_p = f\}$ ناحیه‌ی T را به شبکه‌ای از نواحی کوچکتر T_{ijk} افراز

می‌کنیم. بنابر این می‌توانیم T را مجموعه‌ای شامل حداکثر $m \times n \times p$ جزء، هر کدام با حجم ΔV_{ijk} در نظر بگیریم. با توجه به تعریف جرم حجمی، جرم یک جزء به طور تقریب برابر $\Delta m_{ijk} = \rho(x_i, y_j, z_k)\Delta V_{ijk}$ خواهد بود. در نتیجه تقریبی از جرم کل این مجموعه عبارت است از مجموع ریمان

$$\sum_{i,j,k} \Delta m_{ijk} = \sum_{i,j,k} \rho(x_i, y_j, z_k)\Delta V_{ijk}$$

در اینجا جمع بر روی اندیس‌هایی صورت می‌گیرد که زیرمکعب‌های حاصل از افراز فوق با ناحیه‌ی اشتراک داشته باشد. بنابر این اگر افرازهای $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ را ظریف‌تر کنیم (مثلا با افزایش تعداد نقاط افراز و هم زمان کم کردن فاصله‌ی بین نقاط آن) آنگاه در حالت حدی انتگرال سه‌گانه‌ی زیر برای مقدار جرم کل این جسم به دست می‌آید.

$$M = \iiint_T \rho(x, y, z)dV$$

به همین ترتیب گشتاور مجموعه‌ی T_{ijk} ها نسبت به صفحه‌ی xoy عبارت است از:

$$M_{xy} = \sum_{i,j,k} z_i \Delta m_{ijk} = \sum_{i,j,k} z_i \rho(x_i, y_j, z_k)\Delta V_{ijk}$$

پس در حالت حدی برای گشتاور ناحیه‌ی T نسبت به صفحه‌ی xoy انتگرال سه‌گانه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$M_{xy} = \iiint_T z\rho(x, y, z)dV$$

به شکل مشابه داریم:

$$M_{xz} = \iiint_T y\rho(x, y, z)dV \quad , \quad M_{yz} = \iiint_T x\rho(x, y, z)dV$$

نهایتا مرکز جرم جسم T دارای مختصات

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad , \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

خواهد بود.

مثال ۴–۸–۱ چگالی جرمی نقطه‌ی دلخواه از یک نیم‌کره‌ی توپر به شعاع a متناسب با فاصله‌ی آن تا مرکز کره است، یعنی در دستگاه دکارتی $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$.

الف) جرم نیم‌کره را به دست می‌آوریم.

ب) گشتاورهای مرتبه‌ی اول و مرکز جرم نیم کره را تعیین می‌کنیم.

الف) می‌توانیم فرض کنیم که مرکز نیم‌کره‌ی T، مبدأ مختصات و تصویر آن روی صفحه‌ی xoy قرصی به شعاع R است. اگر جرم نیم‌کره را با M نمایش دهیم آنگاه:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_T \rho(x,y,z)dV \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a (k\rho)(\rho^2\sin\varphi)d\rho d\theta d\varphi \\ &= k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a \sin\varphi d\theta d\varphi \\ &= k\frac{a^4}{4}\Big(\int_0^{2\pi}d\theta\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\Big) = \frac{1}{2}k\pi a^4 \end{aligned}$$

با توجه به تقارن شکل، اگر $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ مختصات مرکز جرم نیم‌کره باشد آنگاه $\bar{x}=\bar{y}=0$. برای محاسبه‌ی $\bar{z}$ از دستگاه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این دستگاه مختصات، نیم‌کره‌ی T عبارت است از:

$$T = \{(r,\theta,z) \ : \ 0\le\theta\le 2\pi \ , \ 0\le r\le a \ , \ 0\le z\le\sqrt{a^2-r^2}\}$$

با توجه به این که $\rho(x,y,z)=k\sqrt{r^2+z^2}$، داریم:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_T z\rho(x,y,z)dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z(k\sqrt{r^2+z^2})rdzdrd\theta \\ &= \frac{1}{5}k\pi a^5 \end{aligned}$$

پس $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{2}{5}a$، یعنی نقطه‌ی با مختصات $(0,0,\frac{2}{5}a)$ مرکز جرم این نیم‌کره است.

تمرین‌های فصل چهارم

۱) هر یک از انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\iint_D e^y\, dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به خم $y = \ln x$، بالای محور x، بین خطوط $x = ۱$ و $x = ۲$ است.

ب) $\iint_D xy\, dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محصور بین نمودار $y = \sin x$ و خط $y = ۱$ برای $۰ \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$ است.

ج) $\iint_D |x^۲ - y|\, dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی مربعی $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ است.

د) $\iint_D \frac{۱}{۱ + y^۴}\, dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محصور توسط خم $y = x^{\frac{۱}{۳}}$ و خط‌های $y = ۲$ و $x = ۰$ است.

۲) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین کنید.

الف) ناحیه‌ی داخل دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۴$ و سمت راست خط $x = ۱$.

ب) ناحیه‌ی محصور بین خم‌های $xy = ۱$، $xy = ۲$ و خطوط $x = ۱$ و $x = ۲$.

ج) ناحیه‌ی محصور به خم‌های $x = ۴ - ۳y^۲$ و $x = y^۲$.

۳) فرض کنید تابع f پیوسته است. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_۰^۳ dx \int_۰^x f(x,y)dy + \int_۳^٦ dx \int_۰^{٦-x} f(x,y)dy$$

۴) انتگرال $\iint_D \frac{y}{x^۲ + y^۲}\, dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به سهمی $y = x^۲$ و خط $y = x$ به دست آورید.

۵) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_۰^۱ \int_۱^۲ \frac{y}{x^۴} \sin(\frac{\pi x}{۲}) dxdy + \int_۱^۴ \int_{\sqrt{y}}^۲ \frac{y}{x^۴} \sin(\frac{\pi x}{۲}) dxdy$.

ب) $\int_۰^۲ \int_۰^{۴-x^۲} \frac{xe^{۲y}}{۴ - y} dydx$.

ج) $\iint_A \sqrt{x^۲ + y^۲}\, dA$ ، $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ ; ۱ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۲\}$.

د) $\int_۰^۱ \int_۰^x \frac{dydx}{(۱ + x^۲ + y^۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \int_۱^{\sqrt{۲}} \int_۰^{\sqrt{۲-x^۲}} \frac{dydx}{(۱ + x^۲ + y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$

ه) $\iint_A (x-y)\sin(x^{۲}-y^{۲})\ dA$، A ناحیه‌ی بین خطوط $x+y=۲$، $y-x=۱$، $y-x=-۱$ و $x+y=۰$ است.

و) $\iint_A e^{\frac{y}{x+y}}\ dA$، A ناحیه‌ی بین خطوط $x+y=۱$، $y=۰$ و $x=۰$ است.

ز) $\iint_G x\ dA$، G ناحیه‌ی بین خم‌های $xy=۱$، $xy=۳$، $x(۱-y)=۲$ و $x(۱-y)=۱$ است.

ح) $\iint_D \frac{dA}{(xy)^{\frac{۲}{۳}}}$، D ناحیه‌ی محصور به خم $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=۱$ است.

۶) مساحت ناحیه‌ی محصور به خم‌های $x^{۲}=y$, $x^{۲}=۲y$, $x^{۳}=y^{۲}$, $x^{۳}=۲y^{۲}$ را به دست آورید.

۷) مساحت ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^{۲}+y^{۲}=۲x$ و $x^{۲}+y^{۲}=۴x$ و خطوط $y=x$ و $y=۰$ را به دست آورید.

۸) انتگرال دوگانه‌ی $\iint_R xy\ dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ محاسبه کنید.

۹) مجموعه‌ی D را **همبند** می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی P و Q در D، یک خم پیوسته با معادلات پارامتری $x=x(t)\ ,\ y=y(t)$ به ازای $۰\leq t\leq ۱$ وجود داشته باشد که $P=(x(۰),y(۰))$، $Q=(x(۱),y(۱))$ و برای هر $t\in[۰,۱]$ نقطه‌ی $(x(t),y(t))$ در D قرار گیرد. به عبارت دیگر هر دو نقطه‌ی دلخواه در D با یک خم پیوسته در D به هم قابل وصل باشند.

نشان دهید اگر تابع دو متغیره‌ی f روی حوزه‌ی همبند D به مساحت A پیوسته باشد، آنگاه یک نقطه مثل (a,b) در D وجود دارد به قسمی که:

$$\iint_R f(x,y)\ dA = Af(a,b)$$

این گزاره قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌های دوگانه نامیده می‌شود.

۱۰) الف) نشان دهید که اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^{۲}(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^{۲}(x)dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\iint_A (f(x)g(y)-f(y)g(x))^{۲}\ dA$ روی ناحیه‌ی مناسب A، استفاده کنید)

ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a,b]$ باشد، نشان دهید

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$$

۱۱) مقدار انتگرال ناسره‌ی $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ را به دست آورید. (راهنمایی: ابتدا توجه کنید که تساوی $\int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ برای انتگرال‌های ناسره برقرار است. سپس عبارت سمت راست را به کمک مختصات قطبی محاسبه کنید.)

۱۲) انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\int_a^b e^{-xy}dy = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ استفاده کنید.)

۱۳) انتگرال‌های زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.

الف) $\iint_D \frac{x^2 \sin xy}{y}\ dA$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^2=\pi y$، $x^2=\frac{\pi y}{2}$، $y^2=x$ و $y^2=\frac{x}{2}$ است.

ب) $\iint_D \cos\frac{x-y}{x+y}\ dA$ که در آن D محدود است به خطوط $y=0$، $y=x$ و $x+y=\frac{\pi}{2}$.

ج) $\iiint_T yz\ dV$ که T محدود به صفحات $x+y+z=2$، $x+y+z=-2$، $x-y+z=3$، $x-y+z=-3$، $x+y-z=1$ و $x+y-z=-1$ است.

۱۴) ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$ و تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ مفروضند. مقدار $\iint_D f(x,y)\ dA$ را به‌دست آورید.

۱۵) با استفاده از مختصات قطبی انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\ dA$ را محاسبه کنید که در آن D قرص واحد $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ است.

۱۶) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیر قطبی محاسبه کنید.

الف) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9\}$ ، $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dA$

ب) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{\pi^2}{16}\leq x^2+y^2\leq\frac{\pi^2}{9}\}$ ، $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dA$

ج) $\{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : ۱ \leq x^۲+y^۲ \leq ۴, \frac{x}{\sqrt{۳}} \leq y \leq \sqrt{۳}x\}$ ، $\iint_D \tan^{-۱}(\frac{y}{x})\, dA$

۱۷) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت‌های هر یک از نواحی زیر را پیدا کنید.

الف) ناحیه‌ی داخل کاردیوئید $r = a(۱ - \cos\theta)$ و خارج دایره‌ی $r = a$.

ب) ناحیه‌ی محصور بین دوایر $x^۲ + y^۲ = x$ و $x^۲ + y^۲ = ۲x$ و خطوط $y = ۰$ و $y = x$.

ج) ناحیه‌ی بین مارپیچ‌های $r = \theta$ و $r = ۲\theta$ به ازای $۰ \leq \theta \leq ۴\pi$.

۱۸) با استفاده از تغییر متغییرهای $u = x^۲ - y^۲$ و $v = ۲xy$، انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D x^۲y^۲(x^۲ + y^۲)\, dA$ را به دست آورید که D ناحیه‌ای در ربع اول و محدود به هذلولی‌های $x^۲ - y^۲ = ۱$، $x^۲ - y^۲ = ۹$، $xy = ۱$ و $xy = ۲$ است.

۱۹) مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_۰^۲ (\int_{y/۲}^۱ \cos(\frac{\pi}{۲}x^۲)dx)dy$.

۲۰) انتگرال دوگانه $\iint_D |x - y|e^{x-y}\, dA$ را حساب کنید که در آن ناحیه‌ی D محدود به خطوط $x - y = ۰$، $x - y = -۴$ ، $x + y = ۰$ و $x + y = ۴$ است.

۲۱) تابع $f(x,y) = \frac{y}{x^۴} \sin \frac{\pi x}{۲}$ مفروض است. انتگرال $\int_۰^۱ \int_۱^۲ f(x,y)dxdy$ روی ناحیه‌ی D از صفحه‌ی xy و انتگرال $\int_۱^۴ \int_{\sqrt{y}}^۲ f(x,y)dxdy$ روی ناحیه‌ی E از صفحه‌ی xy تعریف شده‌اند.

الف) نواحی D و E را در صفحه‌ی xy مشخص کنید.

ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_{D\cup E} f(x,y)dydx$.

۲۲) G ناحیه‌ی محصور به خم‌های $xy = ۱$ و $xy = ۳$ و $x(۱-y) = ۲$ و $x(۱-y) = ۱$ است. مطلوب است انتگرال $\iint_G x\, dA$.

۲۳) انتگرال $\iint_D \cos(\frac{x-y}{x+y})\, dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x = ۰$ و $y = ۰$ و $x + y = ۲$ بیابید.

۲۴) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را حساب کنید.

الف) $\int_۰^۱ \int_۰^۱ \int_۰^۱ (xy + yz + zx)dxdydz$

ب) $\int_۰^۱ dx \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} dy \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} \frac{dz}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲ - z^۲}}$

۲۵) مقدار متوسط تابع سه متغیره‌ی f روی $T \subseteq \mathbb{R}^3$، که حجم آن برابر V است توسط $\frac{1}{V}\iiint_T f(x,y,z)dV$ تعریف می‌شود. مقدار متوسط تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ را روی هرمی که از برخورد صفحه‌ی $x + y + z = 1$ با صفحات مختصات پدید می‌آید به دست آورید. آیا می‌توان روی T نقطه‌ای را به دست آورد که در آن f مقدار متوسط خود را اختیار کند؟

۲۶) حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$، از زیر به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}\cot\beta$ و از دو طرف به صفحات $y = x\tan\alpha$ و $y = 0$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت با شرط $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ هستند.)

۲۷) فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای هر عدد مثبت t تعریف می‌کنیم $g(t) = \iiint_{D_t} f(x^2 + y^2 + z^2)\, dV$ که در آن $D_t = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dg}{dt}$.

۲۸) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\iiint_T z\, dV$ که در آن T ناحیه‌ی بین صفحه‌ی $z = 0$ و نیمه‌ی بالایی کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

ب) $\iiint_T (x + y)\, dxdydz$ که در آن T ناحیه‌ی محصور توسط صفحه‌ی $x + y + z = 2$ و صفحات مختصات و زیر صفحه $z = 1$ است.

۲۹) حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌های $y^2 = 4 - 3x$ و $y^2 = x$ و صفحات $z = 9$ و $z = -9$ را به دست آورید.

۳۰) حجم ناحیه‌ای را به دست آورید که توسط سه رویه‌ی $z^2 = 2xy$، $x + y = 2$ و $x + y = 1$ مشخص می‌شود.

۳۱) حجم هر یک از نواحی زیر را به دست آورید.

الف) T محدود به سهمیگون $az = x^2 + y^2$ و صفحه‌ی $z = a$ ($a > 0$).

ب) T ناحیه‌ی محصور به کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و سهمی‌گون $x^2 + y^2 = 4(1 - z)$.

ج) T درون مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و خارج کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

۳۲) مطلوب است انتگرال $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dV$ که در آن T ناحیه‌ای در یک هشتم اول فضا محدود به مخروط بیضوی $z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ و صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 1$

است.

۳۳) معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} - z^{۲} = ۱$ را به معادله‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

۳۴) معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}$ را در مختصات کروی بنویسید.

۳۵) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را با تبدیل به مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

الف) $\iiint_T x^{۲}y^{۲}\ dV$ که در آن T محدود است به مخروط $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ و صفحه‌ی $z = a$ $(a > ۰)$.

ب) $\iiint_T (x^{۳} + y^{۳})\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = y$، سهمی‌گون $z = x^{۲} + y^{۲}$ و صفحه‌ی $z = ۰$.

۳۶) با استفاده از مختصات استوانه‌ای حجم ناحیه‌ی T شامل مبدأ مختصات و محدود به هذلولی‌گون $x^{۲} + y^{۲} - z^{۲} = ۱$ و کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۳$ را پیدا کنید.

۳۷) مقدار انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیر کروی پیدا کنید.

الف) $\iiint_T \frac{۱}{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۴$ و مخروط $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}$.

ب) $\iiint_T \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲} + (z - ۲)^{۲}}}\ dV$ که در آن T ناحیه‌ی درونی کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱$ است.

ج) $\iiint_T \frac{۱}{\sqrt{((x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۳}}}\ dV$ که در آن T بین دو کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۱$ و $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = e$ قرار دارد.

۳۸) با استفاده از مختصات کروی حجم ناحیه‌ی محصور توسط کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۴z - ۳$ و درون مخروط $z^{۲} = ۴(x^{۲} + y^{۲})$ را پیدا کنید.

فصل ۵

آنالیز برداری

آنالیز برداری یک ابزار کارآمد برای مدل کردن مفاهیم بنیانی فیزیک کلاسیک مانند میدان‌های نیرو، کار و امثال آن است. در این فصل به بررسی چند مفهوم بنیانی در آنالیز برداری مانند انتگرال‌های خطی، انتگرال روی رویه‌ها و قضیه‌های گرین، واگرائی و استوکس می‌پردازیم. انتگرال‌های خطی برای مدل کردن پدیده‌های فیزیکی مانند کار و محاسبه‌ی کمیت‌هائی مانند جرم اجسام ناهمگن منحنی شکل و امثال آنها به کار برده می‌شوند. به کمک انتگرال روی رویه‌ها مساحت بخشی از رویه‌ها را محاسبه می‌کنیم. یکی دیگر از مفاهیم مهم این فصل، مفهوم شار یک میدان نیرو و رابطه‌ی آن با دیگر مفاهیم آنالیز برداری است که در قضیه‌ی واگرائی گاوس به آن می‌پردازیم.

۵–۱ انتگرال خطی نوع اول

کار انجام شده روی یک خم به وسیله‌ی یک میدان نیرو مثال ساده‌ای از یک پدیده‌ی فیزیکی است که منجر به تعریف انتگرال خطی (نوع دوم) می‌شود. پیش از آن به نوع دیگری از انتگرال‌های خطی می‌پردازیم که برای محاسبه‌ی جرم اجسام ناهمگن منحنی‌شکل به کار می‌روند.

فرض کنیم خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B، نمودار تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^۲$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ و $y=y(t)$ در صفحه باشد. همچنین فرض کنیم تابع حقیقی (اسکالر) $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ روی C تعریف شده و پیوسته باشد.

هر افراز مانند $a=t_۰<t_۱<\dots<t_n=b$ روی $[a,b]$ نقاط $A=P_۰$، $P_۱$، $\cdots$ و $P_n=B$ را روی خم C مشخص می‌کند به قسمی که $P_i=\mathbf{r}(t_i)$. به ازای

$\Delta s_i := \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|$ حاصل جمع $\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i), y(t_i))\Delta s_i$ را حاصل جمع ریمان تابع f روی C متناظر با افراز فوق می‌نامیم. برای $\mu = \max \Delta s_i$، $(i = 1, ..., n)$ در صورت وجود $\lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i), y(t_i))\Delta s_i$، تابع f را روی C انتگرال‌پذیر می‌نامیم. مقدار این حد را در صورت وجود **انتگرال خطی (منحنی‌الخط) نوع اول** تابع f روی C می‌نامیم و با نماد $\int_C f(x,y)ds$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که به ازای تابع ثابت ۱ مقدار $\int_C ds$ همان طول خم C است. به علاوه تعریف انتگرال خطی به گونه‌ای است که مقدار $\int_C fds$ مستقل از جهت منحنی C است. این نکته را در قسمت بعد نیز به طور دقیق‌تر نشان خواهیم داد.

به همین ترتیب برای خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B نظیر یک تابع برداری $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ با معادلات پارامتری $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ و برای تابع حقیقی (اسکالر) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ که روی C تعریف شده و پیوسته باشد، انتگرال خطی نوع اول f روی C تعریف و با نماد $\int_C f(x,y,z)ds$ نمایش داده می‌شود.

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگینِ توابع برداری، برای یک $t_{i-1} \le \tau_i \le t_i$ می‌توان نوشت:

$$\Delta s_i = \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \|\mathbf{r}'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\| = \|\mathbf{r}'(\tau_i)\|\Delta t_i$$

پس

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y)ds &= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i), y(t_i))\Delta s_i \\
&= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i), y(t_i))\|\mathbf{r}'(\tau_i)\|\Delta t_i \\
&= \int_a^b f(x(t), y(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \\
&= \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt
\end{aligned}$$

به همین ترتیب $\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$.

مثال ۵-۱-۱ انتگرال خطی $\int_C \frac{ds}{x-y}$ را محاسبه کنید که در آن C پاره‌خط $\overline{PQ}$ با $P = (0, -3)$ و $Q = (6, 0)$ است.

پاره‌خط $\overline{PQ}$ را می‌توان به ازای $0 \le t \le 1$ به کمک تابع برداری $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ با

ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = (0,-3) + t(6,3) = 6t\,\vec{i} + (3t-3)\,\mathbf{j}$ بیان کرد. بنابر این $x(t) = 6t$ و $y(t) = 3t-3$. پس $x'(t) = 6$ ، $y'(t) = 3$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}\int_C \frac{ds}{x-y} &= \int_0^1 \frac{1}{x(t)-y(t)}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\;dt\\ &= \frac{\sqrt{45}}{3}\int_0^1 \frac{1}{t+1}\;dt = \sqrt{5}\;\ln 2\end{aligned}$$

مثال ۵-۱-۲ انتگرال خطی $\int_C xyz\;ds$ را محاسبه کنید که C مارپیچ $x = \sin t$ ، $y = \cos t$ و $z = t$ به ازای $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ است.

از $x = \sin t$ ، $y = \cos t$ و $z = t$ نتیجه می‌شود $x' = \cos t$ ، $y' = -\sin t$ ، $z' = 1$ و

$$\begin{aligned}\int_C xyz\;ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y(t)z(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\;dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t\;\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\;dt\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t\;dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

تعبیر فیزیکی انتگرال خطی نوع اول

یک میله را به شکل خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B در نظر می‌گیریم. فرض کنیم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ با معادلات پارامتری $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ و چگالی میله در هر نقطه $\rho(x,y,z)$ باشد. در این صورت برای محاسبه‌ی m ، جرم میله به کمک یک افراز روی $[a,b]$ و در نتیجه افرازی روی C با نمادگزاری به کار رفته در تعریف انتگرال خطی داریم

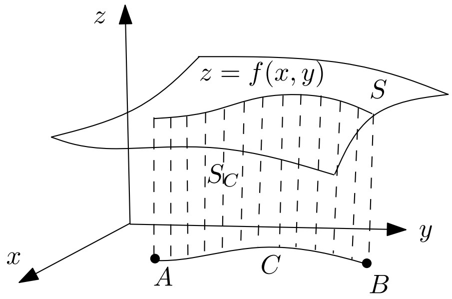
$$m = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\Delta s_i = \int_C \rho(x,y,z)ds$$

تعبیر هندسی انتگرال خطی نوع اول

فرض کنیم C یک خم هموار با ابتدا و انتهای A و B واقع در صفحه xoy و S نمودار یک تابع دو متغیره‌ی $z = f(x,y)$ باشد که در یک همسایگی منحنی C تعریف شده است.

اگر S_C قسمتی از سطح استوانه‌ای با مولد C محدود به صفحه‌ی xoy و سطح S باشد ، نظیر افرازی از منحنی C و با نمادگزاری قبلی می‌توان نوشت:

$$\text{مساحت } S_C = \lim_{\mu \to ۰} \sum_{i=۱}^{n} f(x(t_i), y(t_i)) \Delta s_i = \int_C f(x,y) ds$$

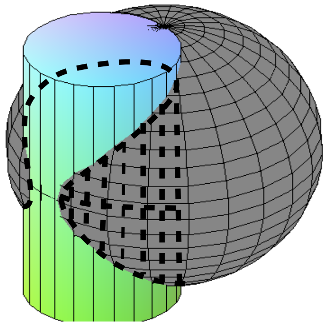


شکل ۵ــ۱ تعبیر هندسی انتگرال خطی نوع اول.

مثال ۵ــ۱ــ۳ مساحت قسمتی از سطح استوانه‌ای $x^۲ + y^۲ = ۲x$ را که به وسیله‌ی کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ جدا شده به دست آورید.

فرض کنیم C دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ به معادلات پارامتری $x = ۱ + \cos t$ و $y = \sin t$ به ازای $۰ \leq t \leq ۲\pi$ و $z = f(x,y) = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ باشد. در این صورت اگر σ مساحت مورد نظر باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
\sigma &= ۲\int_C f(x,y) ds \\
&= ۲\int_۰^{۲\pi} \sqrt{۴ - (\cos t + ۱)^۲ - \sin^۲ t}\ \sqrt{\sin^۲ t + \cos^۲ t}\ dt \\
&= ۲\sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi} \sqrt{۱ - \cos t}\ dt = ۴\int_۰^{۲\pi} |\sin \frac{t}{۲}|\ dt = ۱٦
\end{aligned}$$



شکل ۵ــ۲ مساحت بخشی از استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ که توسط کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ جدا شده است.

ویژگی‌های انتگرال خطی نوع اول

۱. اگر توابع اسکالر f و g روی خم C انتگرال‌پذیر باشند آنگاه به ازای هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ تابع اسکالر $\lambda f + g$ نیز روی خم C انتگرال‌پذیر است و

$$\int_C (\lambda f + g) ds = \lambda \int_C f ds + \int_C g ds$$

۲. اگر تابع اسکالر f روی خم C_1 بین نقاط A و B و روی خم C_2 بین نقاط B و C انتگرال‌پذیر باشد آنگاه روی $C := C_1 \cup C_2$ بین نقاط A و C انتگرال‌پذیر است و

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

۵–۲ انتگرال خطی نوع دوم

رده‌ی مهمی دیگری از توابع روی زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ توابع برداری هستند. برای $D \subseteq^2$ تابع $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ را که به هر نقطه از D یک بردار در صفحه نظیر می‌کند یک **میدان برداری** روی D می‌نامیم. در حالت کلی یک میدان برداری به شکل $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\ \mathbf{i} + Q(x,y)\ \mathbf{j}$ است که $P : D \to \mathbb{R}$ و $Q : D \to \mathbb{R}$ توابع حقیقی دو متغیره روی D هستند.

به همین ترتیب تابع $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را که به هر نقطه از $\mathbb{R}^3$ برداری در فضا نظیر می‌کند یک **میدان برداری در فضا** می‌نامیم. در حالت کلی یک میدان برداری در فضا به شکل $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ قابل بیان است که P ، Q و R توابع حقیقی سه متغیره هستند.

میدان برداری $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ را روی $D \subseteq \mathbb{R}^2$ **پیوسته** می‌نامیم هرگاه توابع P و Q بر D پیوسته باشند. میدان برداری $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ بر D **مشتق‌پذیر** است هرگاه توابع P و Q بر D مشتق‌پذیر باشند. پیوستگی و مشتق‌پذیری برای $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^3$، ($D \subseteq \mathbb{R}^3$) به شکل مشابه تعریف می‌شوند.

فرض کنیم C یک خم هموار بین دو نقطه‌ی A و B ، نمودار تابع برداری $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ با معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در صفحه باشد. همچنین فرض کنیم تابع برداری $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ روی C تعریف شده و پیوسته باشد. یک افراز $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ روی $[a,b]$ نقاط $A = P_0$، P_1، $\cdots$ و $P_n = B$ را روی خم C مشخص می‌کند. به ازای $\Delta\mathbf{r}_i := \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ حاصل جمع $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(x(t_i), y(t_i)) \cdot \Delta\mathbf{r}_i$ را

حاصل جمع ریمان تابع برداری $\mathbf{F}$ روی C متناظر با افراز فوق می‌نامیم. در صورت وجود $\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i))\cdot\Delta\mathbf{r}_i$ که $\mu=\max\|\Delta\mathbf{r}_i\|$ ، $(i=1,...n)$، تابع $\mathbf{F}$ را روی C انتگرال‌پذیر نامیده و حد فوق را **انتگرال خطی (منحنی‌الخط) نوع دوم** تابع برداری $\mathbf{F}$ روی C می‌نامیم و با نماد $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ نمایش می‌دهیم.

به همین ترتیب برای یک خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B ، نمودار تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ در فضا و تابع برداری $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ که روی C تعریف شده و پیوسته باشد انتگرال خطی نوع دوم $\mathbf{F}$ روی C تعریف و با نماد $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ نمایش داده می‌شود.

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای توابع برداری به ازای یک $t_{i-1}\le\tau_i\le t_i$،

$$\Delta\mathbf{r}_i=\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})=\mathbf{r}'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})=\mathbf{r}'(\tau_i)\Delta t_i$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i))\cdot\Delta\mathbf{r}_i\\ &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i))\cdot\mathbf{r}'(\tau_i)\Delta t_i\\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt\end{aligned}$$

به همین ترتیب برای $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt$.

همچنین به ازای $\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\ \mathbf{i}+Q(x,y)\ \mathbf{j}$ و $\mathbf{r}(t)=x(t)\ \mathbf{i}+y(t)\ \mathbf{j}$،

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt\\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t))\ \mathbf{i}+Q(x(t),y(t))\ \mathbf{j}\ ]\cdot[x'(t)\ \mathbf{i}+y'(t)\ \mathbf{j}\ ]\ dt\\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t))\ x'(t)+Q(x(t),y(t))\ y'(t)]\ dt\\ &= \int_a^b P(x(t),y(t))\ x'(t)\ dt+\int_a^b Q(x(t),y(t))\ y'(t)\ dt\\ &= \int_C P\ dx+\int_C Q\ dy\end{aligned}$$

به شکل مشابه به ازای $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\ dx + \int_C Q\ dy + \int_C R\ dz$$

مثال ۵–۲–۱ برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = (x^۲ + ۳y)\ \mathbf{i} + (۳x - ۲y)\ \mathbf{j}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C قسمتی از منحنی به معادلات $x = t^۲$ ، $y = t^۳$ است که از نقطه‌ی $A = (۱,۱)$ به نقطه‌ی $B = (۴,۸)$ پیموده شده باشد.

ب) خم C سهمی به معادلات $x = t$ و $y = t^۲ - \frac{۸}{۳}t + \frac{۸}{۳}$ به ازای $۱ \le t \le ۴$ است که از نقطه‌ی A به B پیموده شده است.

ج) خم C پاره خط AB است که از نقطه‌ی A به B پیموده شده است.

الف) از $x = t^۲$ و $y = t^۳$ نتیجه می‌شود $x' = ۲t$ و $y' = ۳t^۲$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy \\
&= \int_C (x^۲ + ۳y)\ dx + (۳x - ۲y)\ dy \\
&= \int_۱^۲ [(x(t)^۲ + ۳y(t))\ x'(t) + (۳x(t) - ۲y(t))\ y'(t)]\ dt \\
&= \int_۱^۲ [(t^۴ + ۳t^۳)(۲t) + (۳t^۲ - ۲t^۳)(۳t^۲)]\ dt = ۵۱
\end{aligned}$$

ب) از $x = t$ و $y = t^۲ - \frac{۸}{۳}\ t + \frac{۸}{۳}$ نتیجه می‌شود $x' = ۱$ و $y' = ۲t - \frac{۸}{۳}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy \\
&= \int_C (x^۲ + ۳y)\ dx + (۳x - ۲y)\ dy \\
&= \int_۱^۴ [(x(t)^۲ + ۳y(t))\ x'(t) + (۳x(t) - ۲y(t))\ y'(t)]\ dt \\
&= \int_۱^۴ [(t^۲ + ۳t^۲ - ۸t + ۸) + (۳t - ۲t^۲ + \frac{۱۶}{۳}t - \frac{۱۶}{۳})(۲t - \frac{۸}{۳})]\ dt \\
&= ۵۱
\end{aligned}$$

ج) اگر $O = (۰,۰)$ مبدأ مختصات باشد، پاره خط AB را که از نقطه‌ی A به B

پیموده می‌شود می‌توان به صورت زیر پارامتریزه کرد.

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (۱,۱) + t(۳,۷) = (۱+۳t)\ \mathbf{i} + (۱+۷t)\ \mathbf{j}$$

بنابراین $x = ۱ + ۳t$ و $y = ۱ + ۷t$. در نتیجه $x' = ۳$ و $y' = ۷$. پس

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy \\ &= \int_C (x^۲ + ۳y)\ dx + (۳x - ۲y)\ dy \\ &= \int_۰^۱ [(x(t)^۲ + ۳y(t))\ x'(t) + (۳x(t) - ۲y(t))\ y'(t)]\ dt \\ &= \int_۰^۱ [((۱+۳t)^۲ + ۳(۱+۷t))(۳) + (۳(۱+۳t) - ۲(۱+۷t)(۷)]\ dt \\ &= ۵۱\end{aligned}$$

مثال ۵–۲–۲ برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = \sin x\ \mathbf{i} + xy\ \mathbf{j} + \frac{۱}{۱+z}\ \mathbf{k}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C قسمتی از منحنی به معادلات $x = t$ ، $y = t^۲$ و $z = t^۳$ است که از نقطه‌ی $A = (۰,۰,۰)$ به نقطه‌ی $B = (۱,۱,۱)$ پیموده شده باشد.

ب) خم C پاره خط AB است که از نقطه‌ی A به B پیموده شده است.

ج) خم C پاره خط AB است ولی از نقطه‌ی B به A پیموده شده است.

الف) از $x = t$ ، $y = t^۲$ و $z = t^۳$ نتیجه می‌شود $x' = ۱$ ، $y' = ۲t$ و $z' = ۳t^۲$. پس

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_C \sin x\ dx + xy\ dy + \frac{۱}{۱+z}\ dz \\ &= \int_۰^۱ [\sin x(t)\ x'(t) + x(t)\ y(t)\ y'(t) + \frac{z'(t)}{۱+z(t)}]\ dt \\ &= \int_۰^۱ (\sin t + ۲t^۴ + \frac{۳t^۲}{۱+t^۳})\ dt = [-\cos t + \frac{۲}{۵}t^۵ + \ln(۱+t^۳)]_۰^۱ \\ &= \ln ۲ + \frac{۷}{۵} - \cos ۱\end{aligned}$$

ب) پاره خط AB را که از نقطه‌ی A به B پیموده می‌شود می‌توان به ازای $۰ \le t \le ۱$

به صورت $x=y=z=t$ پارامتریزه کرد. در نتیجه $x'=y'=z'=۱$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx+Qdy+Rdz\\
&= \int_C \sin x\ dx+xy\ dy+\frac{۱}{۱+z}\ dz\\
&= \int_۰^۱ [\sin x(t)\ x'(t)+x(t)\ y(t)\ y'(t)+\frac{z'(t)}{۱+z(t)}]\ dt\\
&= \int_۰^۱ (\sin t+t^۲+\frac{۱}{۱+t})\ dt=[-\cos t+\frac{۱}{۳}t^۳+\ln(۱+t)]_۰^۱\\
&= \ln ۲+\frac{۴}{۳}-\cos ۱
\end{aligned}$$

ج) پاره خط AB را که از نقطه‌ی B به A پیموده می‌شود می‌توان به صورت زیر پارامتریزه کرد.

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BA}=(۱,۱,۱)+t(-۱,-۱,-۱)=(۱-t)\ \mathbf{i}+(۱-t)\ \mathbf{j}+(۱-t)\ \mathbf{k}$$

بنابراین $x=y=z=۱-t$ و در نتیجه $x'=y'=z'=-۱$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx+Qdy+Rdz\\
&= \int_C \sin x\ dx+xy\ dy+\frac{۱}{۱+z}\ dz\\
&= \int_۰^۱ [\sin x(t)\ x'(t)+x(t)\ y(t)\ y'(t)+\frac{z'(t)}{۱+z(t)}]\ dt\\
&= \int_۰^۱ (-\sin(۱-t)-(۱-t)^۲-\frac{۱}{۲-t})\ dt\\
&= [-\cos(۱-t)+\frac{۱}{۳}(۱-t)^۳+\ln(۲-t)]_۰^۱\\
&= \cos ۱-\ln ۲-\frac{۴}{۳}
\end{aligned}$$

تعبیر فیزیکی انتگرال خطی نوع دوم

مسیر (خم) هموار C را بین دو نقطه‌ی A و B در نظر می‌گیریم. فرض کنیم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^۳$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ و نیروی وارد شده بر یک جسم فیزیکی در طول مسیر C در نقطه‌ی (x,y,z) برابر $\mathbf{F}(x,y,z)$ باشد (شکل ٦—٢). در این صورت برای محاسبه‌ی W ، کار انجام شده

به وسیله‌ی F در طول C با نمادگزاری به کار رفته در تعریف انتگرال خطی داریم

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \\ &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\|\ \|\Delta\mathbf{r}_i\|\ \cos\theta_i \\ &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\cdot\Delta\mathbf{r}_i = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

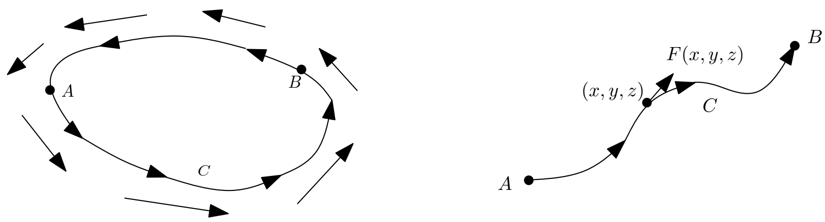
به قسمی که θ زاویه‌ی بین نیرو و تغییر مکان است.

یک تعبیر فیزیکی مهم دیگر انتگرال خطی نوع دوم برای میدان سرعت $\mathbf{F}$ از یک سیال مطرح می‌شود. برای این میدان اگر $\mathbf{F}$ مولفه‌ای هم جهت با یکه‌ی مماس بر خم بسته‌ی C داشته باشد آنگاه $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt > 0$. در این حالت ذرات سیال روی خم C هم جهت با یکه‌ی مماس می‌چرخند.

به همین ترتیب اگر F مولفه‌ای خلاف جهت یکه‌ی مماس بر خم C داشته باشد آنگاه $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt < 0$. در این حالت ذرات سیال روی خم C در خلاف جهت یکه‌ی مماس می‌چرخند.

در حالتی که F مولفه‌ای موازی با یکه‌ی مماس بر خم C نداشته باشد آنگاه $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt = 0$. در این حالت ذرات سیال روی خم C چرخشی ندارند.

بر اساس این تعبیر، برخی از مؤلفین $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را **چرخش** F روی C هم می‌نامند.



شکل ۵–۳ کار انجام شده به وسیله‌ی $\mathbf{F}$ در طول C و چرخش $\mathbf{F}$ روی C.

ویژگی‌های انتگرال خطی نوع دوم

۱. اگر توابع برداری $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ روی خم C انتگرال‌خطی نوع دوم داشته باشند آنگاه به ازای هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ تابع برداری $\lambda\mathbf{F} + \mathbf{G}$ نیز روی خم C انتگرال‌خطی دارد و

$$\int_C (\lambda\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

۲. اگر تابع برداری $\mathbf{F}$ روی خم $C_۱$ بین نقاط A و B و روی خم $C_۲$ بین نقاط B و C انتگرال‌خطی نوع دوم داشته باشد آنگاه روی خم $C := C_۱ + C_۲$ بین نقاط A و C انتگرال خطی دارد و

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_۱} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_۲} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

رابطه‌ی بین انتگرال‌های خطی نوع اول و دوم

فرض کنیم خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در بازه‌ی $[a, b]$، به وسیله‌ی $s = s(t)$ تابع طول قوس پارامتری سازی مجدد شود. به ازای L ، طول قوس خم C دیدیم که C را می‌توان نمودار تابع برداری $\mathbf{R} = \mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(t(s))$ روی $[\circ, L]$ نیز در نظر گرفت که $t = t(s)$ معکوس تابع s است. در این صورت به ازای بردار یکه‌ی مماس $\mathbf{T}$ می‌توان رابطه‌ی بین انتگرال‌های خطی نوع اول و دوم را به صورت زیر بیان کرد.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_\circ^L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} ds = \int_\circ^L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

در روابط فوق از تغییر متغیر $t = t(s)$ به صورت زیر استفاده شده است. از $t = t(s)$ نتیجه می‌شود $dt = t'(s)ds = \frac{dt}{ds}(s)ds$. همچنین به ازای $t = a$ داریم $s = \circ$ و به ازای $t = b$ داریم $s = L$. بنابر این

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\
&= \int_\circ^L \mathbf{F}(\mathbf{r}(t(s))) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(s)) \ \frac{dt}{ds}(s) ds \\
&= \int_\circ^L \mathbf{F}(\mathbf{R}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) ds \\
&= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(s)) \cdot \mathbf{T}(s) ds
\end{aligned}$$

تأثیر تغییر پارامتر در انتگرال خطی نوع دوم

فرض کنیم خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ در بازه‌ی $[a,b]$ ، به وسیله‌ی تابع تغییر پارامتر $t:[c,d]\to[a,b]$ با ضابطه‌ی $t=t(\tau)$ پارامتری سازی مجدد شود. اگر $\frac{dt}{d\tau}>0$ ، $t(c)=a$ و $t(d)=b$ باشد پارامتری سازی مجدد را **جهت نگه‌دار** می‌نامیم. در واقع با پارامتر جدید τ، خم C همچنان از نقطه‌ی $A=\mathbf{r}(a)$ به نقطه‌ی $B=\mathbf{r}(b)$ پیموده می‌شود. روابط زیر نشان می‌دهند که تغییر پارامتر جهت نگه‌دار تأثیری در انتگرال خطی نوع دوم ندارد. فرض کنیم $\mathbf{R}(\tau)=\mathbf{r}(t(\tau))$. در این صورت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_c^d \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int_c^d \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}d\tau=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

به عکس اگر $\frac{dt}{d\tau}<0$ ، $t(c)=b$ و $t(d)=a$ باشد پارامتری سازی مجدد را **جهت برگردان** می‌نامیم. به این ترتیب به ازای هر پارامتر جدید جهت برگردان مانند τ خم C از نقطه‌ی $B=\mathbf{r}(b)$ به نقطه‌ی $A=\mathbf{r}(a)$ پیموده می‌شود. روابط زیر نشان می‌دهند که تغییر پارامترجهت برگردان علامت انتگرال خطی نوع دوم را تغییر می‌دهد.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_d^c \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau=-\int_c^d \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}d\tau=-\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

نتیجه‌ی ساده‌ی بحث فوق این است که برای تغییر پارامترجهت برگردان $t:[a,b]\to[a,b]$ با ضابطه‌ی $t\mapsto b+(a-t)$ که $-C$ را مشخص می‌کند داریم

$$\int_{-C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

شرط استقلال از مسیر برای انتگرال خطی نوع دوم

در مثال ۵−۲−۱ برای تابع برداری $\mathbf{F}(x,y)=(x^{۲}+۳y)\ \mathbf{i}+(۳x-۲y)\ \mathbf{j}$ مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ بین دو نقطه‌ی A و B روی سه مسیر متفاوت یکسان شد. در حالت کلی اگر مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ برای تابع برداری $\mathbf{F}$ روی هر مسیر دلخواه بین دو نقطه‌ی A و B یکسان شد $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را **مستقل از مسیر** می‌نامیم. خواهیم دید که این ویژگی بستگی به تابع برداری $\mathbf{F}$ دارد. در مثال ۵−۲−۱ برای $Q(x,y)=۳x-۲y$ ، $P(x,y)=x^{۲}+۳y$ داریم $\frac{\partial Q}{\partial x}=۳=\frac{\partial P}{\partial y}$. نشان می‌دهیم که می‌توان تابع حقیقی $U=U(x,y)$ را به قسمی

به دست آورد که $\nabla U = \mathbf{F}$. برای این کار باید داشته باشیم $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = ۳x - ۲y$ و $\frac{\partial U}{\partial x} = P = x^۲ + ۳y$. از رابطه‌ی دوم با انتگرال‌گیری نسبت به x نتیجه می‌شود $U(x,y) = \int (x^۲ + ۳y)\ dx = \frac{۱}{۳}x^۳ + ۳xy + h(y)$ به قسمی که $h(y)$ نسبت به متغیر x ثابتی است که باید تعیین شود. از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = ۳x - ۲y$ نتیجه می‌شود $۳x + h'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = ۳x - ۲y$. پس $h'(y) = -۲y$ و در نتیجه $h(y) = -y^۲$. به این ترتیب برای $U(x,y) = \frac{۱}{۳}x^۳ + ۳xy - y^۲$ داریم $\nabla U = \mathbf{F}$.

برای بیان حالت کلی ابتدا به چند تعریف مقدماتی می‌پردازیم.

تابع برداری $\mathbf{F}$ را روی یک ناحیه باز مانند D یک **میدان گرادیان** می‌نامیم هرگاه تابع مشتق‌پذیر $U : D \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به قسمی که $\nabla U = \mathbf{F}$. در این صورت تابع U را **تابع پتانسیل** $\mathbf{F}$ روی D می‌نامیم.

یادآوری می کنیم که مجموعه‌ی D باز است هرگاه به ازای هر نقطه‌ی $\mathbf{x} \in D$ یک همسایگی از $\mathbf{x}$ در D وجود داشته باشد.

مجموعه‌ی D را **همبند (همبند راهی)** می‌نامیم هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ یک خم پیوسته‌ی $C \subseteq D$ با ابتدا و انتهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ وجود داشته باشد.

مجموعه‌ی D را یک **دامنه** می‌نامیم هرگاه باز و همبند باشد.

خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ روی $[a,b]$ را **بسته** گوییم هرگاه $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

خم C ، نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ روی $[a,b]$ را **ساده** گوییم هرگاه روی (a,b) یک به یک باشد.

دامنه‌ی D را **دامنه‌ی ساده** گوییم هرگاه به ازای هر خم ساده و بسته‌ی $C \subseteq D$ ، درون C نیز زیر مجموعه‌ی D باشد.

یکی از ویژگی‌های مهم میدان‌های گرادیان، استقلال کار انجام شده از مسیری است که دو نقطه را به هم وصل می‌کند. ابتدا فرض کنیم $\mathbf{F}$ روی دامنه‌ی D یک میدان گرادیان باشد، یعنی تابع مشتق‌پذیر $U : D \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla U = \mathbf{F}$. اگر $C \subset D$ قطعه‌ای از یک خم هموار به معادلات پارامتری $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ برای $t \in [a,b]$ باشد که نقطه‌ی $\mathbf{x} = (x(a), y(a), z(a))$ را به $\mathbf{y} = (x(b), y(b), z(b))$ وصل می‌کند آنگاه با استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای تابع $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$g(t) = U\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}z'(t) \\ &= P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t) \\ &= \mathbf{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t) \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \int_a^b \mathbf{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a) = U(\mathbf{y}) - U(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

در حالتی که C خمی قطعه به قطعه هموار باشد که نقطه‌ی $\mathbf{x}$ را به نقطه‌ی $\mathbf{y}$ وصل می‌کند، با تقسیم خم C به تعداد متناهی قطعه خم هموار و تکرار روند فوق برای هر مولفه‌ی همبند C، نتیجه‌ی فوق مجددا به دست می‌آید. به این ترتیب، مقدار انتگرال $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ از مسیر C مستقل و فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی خواهد داشت.

عکس این ویژگی نیز برقرار است. به عبارت دیگر، برای میدان پیوسته‌ای مانند $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ که بر ناحیه‌ی D در فضای $\mathbb{R}^3$ تعریف شده‌است اگر مقدار $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ مستقل از مسیر C واقع در D و فقط وابسته به نقاط ابتدا و انتهای مسیر باشد آنگاه میدان $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان است. برای اثبات فرض کنیم $\mathbf{x}_0 \in D$ نقطه‌ای دلخواه باشد. برای $\mathbf{x} = (x, y, z)$ در D با انتخاب مسیری قطعه به قطعه هموار مانند $C \subset D$ از $\mathbf{x}_0$ به $\mathbf{x}$ بنا به فرض مقدار $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ مستقل از C و فقط تابعی از مختصات نقطه‌ی $\mathbf{x}$ خواهد بود. قرار می‌دهیم $U(x, y, z) = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$. در این صورت $U : D \to \mathbb{R}$ تابعی است که بر ناحیه‌ی D تعریف شده است. برای نقاط $\mathbf{x} = (x, y, z)$ و $\mathbf{y} = (x + h, y, z)$ در D، فرض کنیم C' پاره‌خطی از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}$ باشد. لازم به ذکر است که بنابر فرض باز بودن D، همواره با انتخاب نقطه‌ی $\mathbf{y}$ در یک همسایگی مناسب $\mathbf{x}$ می‌توانیم چنین مسیری در دامنه‌ی D داشته باشیم. به این ترتیب، با توجه به تعریف تابع U، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} U(x + h, y, z) - U(x, y, z) &= \int_{C \cup C'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} - \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \\ &= \int_{C'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_x^{x+h} P(t, y, z)\, dt \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از فرض پیوستگی تابع P،

$$\lim_{h\to \circ} \frac{U(x+h,y,z)-U(x,y,z)}{h} = \lim_{\Delta x\to \circ} \frac{۱}{h}\int_x^{x+h} P(t,y,z)\,dt = P(x,y,z)$$

در نتیجه $\frac{\partial U}{\partial x} = P$. به همین ترتیب، $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ و $\frac{\partial U}{\partial z} = R$. با توجه به فرض پیوستگی توابع P، Q و R بر دامنه‌ی D، تابع U بر D مشتقات جزئی پیوسته دارد و در نتیجه بر D مشتق‌پذیر است و $\nabla U = \mathbf{F}$، یعنی $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان است. خلاصه‌ی بحث فوق در قضیه‌ی زیر بیان شده است.

قضیه ۵–۲–۳ اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ روی دامنه‌ی D پیوسته باشد آنگاه برای هر مسیر $C \subseteq D$ مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر C است اگر و تنها اگر $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان باشد. به علاوه اگر $\mathbf{F} = \nabla U$ و خم C از نقطه‌ی $\mathbf{x}$ به نقطه‌ی $\mathbf{y}$ پیموده شده باشد آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y})$$

به این ترتیب اگر $\mathbf{F} = \nabla U$ و خم C از نقطه‌ی $\mathbf{x}$ به نقطه‌ی $\mathbf{y}$ پیموده شده باشد آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{y}) - U(\mathbf{x})$$

یک نتیجه‌ی ساده‌ی قضیه‌ی ۵–۲–۳ این است که اگر $\mathbf{F}$ روی دامنه‌ی D یک میدان گرادیان باشد برای هر مسیر ساده و بسته‌ی $C \subseteq D$ و نقطه‌ی دلخواه $\mathbf{x} \in C$ داریم

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) = \circ$$

همانگونه که مشاهده کردیم، برای یک میدان گرادیان، انتگرال خط میدان در امتداد یک خم مقداری مستقل از مسیر و وابسته به نقاط ابتدا و انتهای آن است. در مباحث کاربردی شناسایی چنین میدان‌هایی اهمیت خاصی دارد. در ادامه‌ی این بخش، با یک شرط معادل برای این خاصیت در حالت‌های خاصی آشنا می‌شویم. فرض کنیم D دامنه‌ای در صفحه‌ی xoy باشد که میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بر آن تعریف شده است. همچنین فرض کنیم توابع $P, Q : D \to \mathbb{R}$ بر این ناحیه مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند. اگر $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان باشد آنگاه تابع مشتق‌پذیر $U : D \to \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

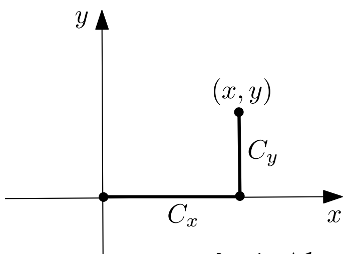
در نتیجه

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^۲ U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (۱)$$

با توجه به فرض پیوستگی توابع $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ بر D مشتقات $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ بر D پیوسته و در نتیجه برابر هستند. پس بنابر معادلات (۱)، در هر نقطه از D، $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

عکس این ویژگی برای دسته‌ای از دامنه‌ها در صفحه برقرار است. فرض کنیم D دامنه‌ای به صورت $I \times J$ باشد که در آن $I, J \subseteq \mathbb{R}$ دو بازه‌ی باز از اعداد حقیقی هستند. همچنین فرض کنیم $P, Q : D \to \mathbb{R}$ دو تابع با مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته بر این دامنه باشند به گونه‌ای که در هر نقطه از این دامنه $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. نشان می‌دهیم، تحت این شرط، میدان $\mathbf{F} + P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بر D یک میدان گرادیان است. نقطه‌ای ثابت مانند $\mathbf{x}_0 \in D$ را در نظر می‌گیریم. برای سهولت فرض کنیم $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. برای هر نقطه‌ی دلخواه $(x, y) \in D$ فرض کنیم $C_{(x,y)}$ مسیری متشکل از دو پاره‌خط C_x، به معادلات $x(t) = t$ و $y(t) = 0$ برای $t \in [0, x]$، و C_y، به معادلات $x(t) = x$ و $y(t) = t$ برای $t \in [0, y]$ باشد. اکنون تابع $U : D \to \mathbb{R}$ را برای هر $(x, y) \in D$، با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
U(x,y) := \int_{C_{(x,y)}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_x} P\, dx + \int_{C_y} Q\, dy \\
&= \int_0^x P(t, 0)\, dt + \int_0^y Q(x, t)\, dt
\end{aligned}
$$



شکل ۵–۴ مسیر $C_{(x,y)}$.

برای دو نقطه‌ی $(x + h, y)$, (x, y) در D داریم

$$
\begin{aligned}
U(x+h, y) - U(x, y) &= \Big(\int_0^{x+h} P(t, 0)\, dt + \int_0^y Q(x+h, t)\, dt \Big) \\
&- \Big(\int_0^x P(t, 0)\, dt + \int_0^y Q(x, t)\, dt \Big) \\
&= \int_x^{x+h} P(t, 0)\, dt + \int_0^y \big(Q(x+h, t) - Q(x, t) \big)\, dt
\end{aligned}
$$

و از آنجا

$$
\frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(t, 0)\, dt + \int_0^y \frac{Q(x+h, t) - Q(x, t)}{h}\, dt
$$

با توجه به پیوستگی تابع P بر D و بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال توابع یک متغیره،

$$\lim_{h\to \circ} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(t,\circ)\,dt = P(x,\circ)$$

از سوی دیگر، با استفاده از فرض پیوستگی تابع $\frac{\partial Q}{\partial x}$ بر D، می‌توان ثابت کرد

$$\begin{aligned}\lim_{h\to \circ}\int_\circ^y \frac{Q(x+h,t)-Q(x,t)}{h}\,dt &= \int_\circ^y \lim_{h\to \circ}\frac{Q(x+h,t)-Q(x,t)}{h}\,dt\\ &= \int_\circ^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\,dt\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از فرض $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\lim_{h\to \circ}\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} &= P(x,\circ)+\int_\circ^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\,dt\\ &= P(x,\circ)+\int_\circ^y \frac{\partial P}{\partial y}(x,t)\,dt\\ &= P(x,\circ)+P(x,t)\big|_\circ^y = P(x,y)\end{aligned}$$

به این ترتیب، برای هر نقطه در D، $\frac{\partial U}{\partial x}=P$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$. با توجه به پیوستگی توابع P و Q بر D، تابع U بر D مشتق‌پذیر است. پس بنا به تعریف، میدان $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان است. در بخش بعد، با استفاده از قضیه‌ی گرین، این خاصیت را می‌توانیم برای هر دامنه‌ی همبند ساده در صفحه اثبات کنیم و در نتیجه قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۵-۲-۴ فرض کنیم D یک دامنه‌ی همبند ساده در صفحه و $P,Q : D\to\mathbb{R}$ توابعی با مشتقات جزئی پیوسته بر این دامنه باشند. در این صورت میدان $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ بر این دامنه یک میدان گرادیان است اگر و تنها اگر در هر نقطه از این دامنه $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

همان طور که مثال زیر نشان می‌دهد، شرط همبند ساده بودن D در این قضیه شرطی ضروری است و بدون آن قضیه‌ی فوق لزوما برقرار نیست.

مثال ۵-۲-۵ فرض کنیم $P(x,y)=\frac{-y}{x^{۲}+y^{۲}}$ و $Q(x,y)=\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}$. در این صورت توابع P و Q بر $D:=\mathbb{R}^{۲}-\{(\circ,\circ)\}$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. به علاوه برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}-\{(\circ,\circ)\}$،

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^{۲}-x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

اگر $\mathbf{F} + P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بر D میدان گرادیان باشد آنگاه بنابر قضیه‌ی ۵–۲–۳، مقدار انتگرال خط این میدان بر روی یک مسیر بسته واقع در این ناحیه برابر صفر خواهد بود. فرض کنیم C دایره به معادله‌ی $x(t) = \cos t$ و $y(t) = \sin t$ برای $t \in [\circ, ۲\pi]$ باشد. با محاسبه‌ی مستقیم $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$، خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\circ^{۲\pi} \Big(\frac{-\sin t}{\sin^۲ t + \cos^۲ t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^۲ t + \cos^۲ t}(\cos t)\Big)\, dt = ۲\pi \neq \circ$$

این نتیجه نشان می‌دهد میدان $\mathbf{F}$ بر $D = \mathbb{R}^۲ - \{(\circ, \circ)\}$ میدان گرادیان نیست. توجه می‌کنیم که در اینجا دامنه‌ی $\mathbb{R}^۲ - \{(\circ, \circ)\}$ دامنه‌ای همبند ولی غیر ساده است.

مثال ۵–۲–۶ برای میدان برداری مثال قبل انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C نیم‌دایره‌ی به معادله‌ی $(x - \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۳}{۴}$ و $۱ \leq y$ است که از نقطه‌ی $A = (\sqrt{۳}, ۱)$ به نقطه‌ی $B = (\circ, ۱)$ پیموده شده باشد.

ب) خم C دایره‌ی به معادله‌ی $(x - \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۳}{۴}$ است.

الف) تابع $\mathbf{F}$ روی هر دامنه‌ای شامل خم C که مبدأ را در بر نداشته باشد دارای مشتقات جزئی پیوسته است.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^۲ + y^۲) + ۲y^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{y^۲ - x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{x^۲ + y^۲ - ۲x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

بنابر این $\mathbf{F}$ در این دامنه یک میدان گرادیان است. می‌خواهیم تابع حقیقی $U = U(x, y)$ را به قسمی به دست آوریم که $\nabla U = \mathbf{F}$. برای این کار باید داشته باشیم $\frac{\partial U}{\partial x} = P = \frac{-y}{x^۲ + y^۲}$ و $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = \frac{x}{x^۲ + y^۲}$. از رابطه‌ی دوم با انتگرال‌گیری نسبت به x نتیجه می‌شود

$$U(x, y) = \int \frac{-y}{x^۲ + y^۲}\, dx = \int \frac{-\frac{۱}{y}}{(\frac{x}{y})^۲ + ۱}\, dx = -\arctan(\frac{x}{y}) + h(y)$$

به قسمی که $h(y)$ تابعی است که باید تعیین شود (نسبت به متغیر x مانند یک ثابت است). از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = \frac{x}{x^۲ + y^۲}$ نتیجه می‌شود

$\frac{x}{x^۲+y^۲} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^۲+y^۲} + h'(y)$. پس $h'(y) = ۰$ و در نتیجه می‌توان نوشت $h(y) = ۰$. به این ترتیب برای $U(x,y) = -\arctan(\frac{x}{y})$ داریم $\nabla U = \mathbf{F}$ و

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(۰,۱) - U(\sqrt{۳},۱) = \frac{\pi}{۳}$$

ب) برای میدان گرادیان $\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^۲+y^۲}\ \mathbf{i} + \frac{x}{x^۲+y^۲}\ \mathbf{j}$ روی هر مسیر بسته که مبدأ را در بر نداشته باشد، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = ۰$.

مشابه بحث فوق، اگر میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ بر دامنه‌ای مانند $D \subset \mathbb{R}^۳$ تعریف شده باشد و توابع P، Q و R بر D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند آنگاه به شرط گرادیان بودن این میدان بر D، معادلات زیر برقرار خواهند بود:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

عکس این ویژگی، مانند آنچه در مورد میدان‌های روی $\mathbb{R}^۲$ گفته شد، برای دسته‌ای از میدانها روی دامنه‌های همبند در $\mathbb{R}^۳$ قابل اثبات است.

مثال ۵–۲–۷ برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^z + y^۲)\ \mathbf{i} + ۲xy\ \mathbf{j} + xe^z\ \mathbf{k}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C خم دلخواه هموار و بسته‌ای در فضای $\mathbb{R}^۳$ است.

ب) خم C خم هموار دلخواهی در فضای $\mathbb{R}^۳$ است که از نقطه‌ی $\mathbf{x} = (۰,۱,۱)$ به نقطه‌ی $\mathbf{y} = (۱,۰,۱)$ پیموده شده است.

الف) تابع $\mathbf{F}$ روی هر دامنه‌ی شامل خم C دارای مشتقات جزئی پیوسته است.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = ۲y = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \ \frac{\partial R}{\partial y} = ۰ = \frac{\partial Q}{\partial z} \ , \ \frac{\partial P}{\partial z} = e^z = \frac{\partial R}{\partial x}$$

پس $\mathbf{F}$ در $\mathbb{R}^۳$ یک میدان گرادیان است و روی هر مسیر بسته داریم:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = ۰$$

ب) **روش اول.** چون $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر است و می‌توان به جای C خط راست بین A و B را جایگزین کرد. پاره خط AB را که از نقطه‌ی

A به B پیموده می‌شود می‌توان به صورت زیر پارامتری کرد.

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (۰, ۱, ۱) + t(۱, -۱, ۰) = t\ \mathbf{i} + (۱ - t)\mathbf{j} + \ \mathbf{k}$$

بنابراین $x = t$ ، $y = ۱ - t$ و $z = ۱$. در نتیجه $x' = ۱$ ، $y' = -۱$ و $z' = ۰$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz \\
&= \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (e^z + y^۲)\ dx + ۲xy\ dy + xe^z\ dz \\
&= \int_۰^۱ [(e^z + y^۲)\ x' + ۲x\ y\ y' + xe^z\ z']\ dt \\
&= \int_۰^۱ [(e^۱ + (۱ - t)^۲) + ۲(t)(۱ - t)(-۱)]\ dt \\
&= [te + t - ۲t^۲ + t^۳]_۰^۱ = e
\end{aligned}$$

روش دوم. کافی است U، تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ را به دست آوریم. می‌خواهیم تابع حقیقی $U = U(x,y,z)$ را به قسمی به دست آوریم که $\nabla U = \mathbf{F}$. برای این کار باید داشته باشیم $\frac{\partial U}{\partial z} = R = xe^z$ ، $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = ۲xy$ و $\frac{\partial U}{\partial x} = P = e^z + y^۲$. از رابطه‌ی سوم با انتگرال‌گیری نسبت به x نتیجه می‌شود $U(x,y,z) = \int (e^z + y^۲)\ dx = xe^z + xy^۲ + h(y,z)$ به قسمی که $h(y,z)$ نسبت به متغیر y, z ثابتی است که باید تعیین شود. از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = ۲xy$ نتیجه می‌شود $۲xy = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} + ۲xy$. پس $\frac{\partial h}{\partial y} = ۰$ و در نتیجه $h(y,z) = g(z)$ به قسمی که $g(z)$ نسبت به متغیر z ثابتی است که باید تعیین شود. از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial z} = R = xe^z$ نتیجه می‌شود $xe^z = \frac{\partial U}{\partial y} = xe^z + g'(z)$. پس $g'(z) = ۰$. بنابر این می‌توان $g(z) = ۰$ و در نتیجه $h(y,z) = ۰$ در نظر گرفت. به این ترتیب برای $U(x,y,z) = xe^z + xy^۲$ داریم $\nabla U = \mathbf{F}$. به این ترتیب

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(۱, ۰, ۱) - U(۰, ۱, ۱) = e$$

روش دیگر برای محاسبه‌ی U به صورت زیر است:

$$U(x,y,z) = \int_۰^x P(t, ۰, ۰)\ dt + \int_۰^y Q(x, t, ۰)\ dt + \int_۰^z R(x, y, t)\ dt$$

در این مثال $P(t,\circ,\circ)=\circ$ ، $Q(x,t,\circ)=۲xt$ و $R(x,y,t)=xe^t$. بنابر این

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_\circ^x P(t,\circ,\circ)\ dt + \int_\circ^y Q(x,t,\circ)\ dt + \int_\circ^z R(x,y,t)\ dt \\ &= \int_\circ^x\ dt + \int_\circ^y ۲xt\ dt + \int_\circ^z xe^t\ dt \\ &= t|_\circ^x + xt^۲|_\circ^y + xe^t|_\circ^z = x + xy^۲ + xe^z - x = xy^۲ + xe^z \end{aligned}$$

۵–۳ قضیه‌ی گرین در صفحه

قضیه‌ی گرین در صفحه رابطه‌ی عمیق بین انتگرال خط یک میدان روی خمی ساده و بسته در صفحه با انتگرال دوگانه‌ی تابعی وابسته به میدان روی ناحیه‌ی محدود به این خم را مطرح می‌کند. این قضیه را می‌توان به عنوان حالت خاصی از قضیه‌های واگرایی گوس و استوکس در فضا که در بخش‌های بعد مشاهده خواهیم کرد در نظر گرفت.

ابتدا حالت خاصی از این قضیه را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم C یک خم بسته و ساده در صفحه باشد که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت طی شود و ناحیه‌ی ساده‌ای چون D را محصور می‌کند. با توجه به فرض ساده بودن ناحیه‌ی D، بازه‌ای چون $[a,b]$ و توابع پیوسته‌ی $g_۱, g_۲ : [a,b] \to \mathbb{R}$ وجود دارند که

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ \mid a \le x \le b \quad g_۱(x) \le y \le g_۲(x)\}$$

همچنین فرض کنیم توابع حقیقی دو متغیره‌ی P و Q بر ناحیه‌ی بازی حاوی D مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند. بنابر قضیه‌ی فوبینی برای تابع پیوسته‌ی $\frac{\partial P}{\partial y}$،

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\ dxdy &= \int_a^b \int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \big(P(x,g_۲(x)) - P(x,g_۱(x))\big) \\ &= -\int_b^a P(x,g_۲(x))\, dx - \int_a^b P(x,g_۱(x))\, dx \\ &= \int_C P\, dx \end{aligned}$$

به همین ترتیب، برای ناحیه‌ی ساده‌ی D بازه‌ای مانند $[c,d]$ و توابع پیوسته‌ی $h_۱, h_۲ : [c,d] \to \mathbb{R}$ وجود دارند که

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ \mid c \le y \le d\ ,\ h_۱(y) \le x \le h_۲(y)\}$$

شبیه به آنچه مشاهده کردیم، مجددا با استفاده از قضیه‌ی فوبینی برای تابع پیوسته‌ی $\frac{\partial Q}{\partial x}$ خواهیم داشت

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_C Q\,dy$$

به این ترتیب، با جمع دو رابطه‌ی فوق،

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x})\,dxdy$$

اکنون با استفاده از این حالت خاص قضیه‌ی گرین به بررسی حالت کلی‌تر این قضیه می‌پردازیم. فرض کنیم ناحیه‌ی D محصور توسط خم بسته و ساده‌ی C به صورت اجتماعی متناهی از نواحی ساده‌ی $D_۱$، $\cdots$، D_n باشد با این خاصیت که برای هر دو زیرناحیه‌ی D_i و D_j، مجموعه‌ی $D_i \cap D_j$ حداکثر یک منحنی پیوسته باشد. بدون کم شدن از کلیت مساله، فرض کنیم $D = D_۱ \cup D_۲$ به قسمی که $D_۱$ و $D_۲$ نواحی ساده با مرزهای $C_۱$ و $C_۲$، طی شده در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشند و $C' := D_۱ \cap D_۲$ یک خم پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم توابع P و Q بر مجموعه‌ای باز در برگیرنده‌ی D مشتقات جزئی پیوسته داسته باشند. قرار می‌دهیم $C'_۱ := C_۱ - C'$ و $C'_۲ := C_۲ - C'$. بنابر حالت قبل،

$$\begin{aligned}
\int_{C_۱} P\,dx + Q\,dy &= \iint_{D_۱} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy \\
\int_{C_۲} P\,dx + Q\,dy &= \iint_{D_۲} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy
\end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$\int_{C_۱} P\,dx + Q\,dy = \int_{C'_۱} P\,dx + Q\,dy + \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$
$$\int_{C_۲} P\,dx + Q\,dy = \int_{C'_۲} P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy$$

که در اینجا منظور از $-C'$ همان خم C' ولی پیموده شده در خلاف جهت C' است. با جمع طرفین دو رابطه‌ی اخیر و توجه به این نکته که $\int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = -\int_{C'} P\,dx + Q\,dy$، خواهیم داشت

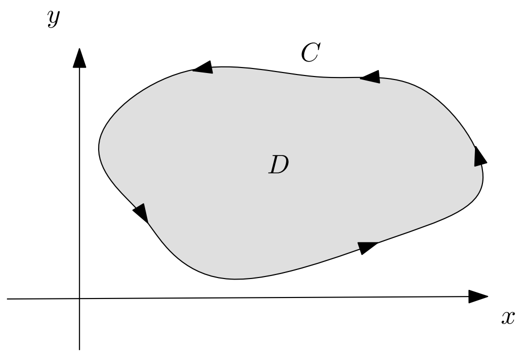
$$\begin{aligned}
\int_C P\,dx + Q\,dy &= \int_{C'_۱} P\,dx + Q\,dy + \int_{C'_۲} P\,dx + Q\,dy \\
&= \int_{C_۱} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_۲} P\,dx + Q\,dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{D_1} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy + \iint_{D_2} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy \\
&= \iint_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy
\end{aligned}
$$

به این ترتیب، حالت کلی‌تری از قضیه‌ی گرین به صورت زیر به دست می‌آید.

قضیه ۵–۳–۱ (**گرین**) فرض کنیم C یک خم بسته و ساده در صفحه و D ناحیه‌ی محصور توسط این خم باشد. همچنین فرض کنیم P و Q دو تابع دو متغیره حقیقی بر ناحیه‌ی بازی از صفحه در برگیرنده‌ی ناحیه‌ی D تعریف شده و دارای مشتقات جزئی پیوسته بر این ناحیه باشند. اگر C در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) پیموده شود آنگاه

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$$



شکل ۵—۵ ناحیه‌ی مربوط به قضیه‌ی گرین.

مثال ۵–۳–۲ برای میدان $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{1+x^2} - 2y^2)\,\mathbf{i} + (y^2 + xy)\,\mathbf{j}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید (شکل ۵—۶).

الف) خم C منحنی بسته‌ی $ABCDA$ است که AB کمان دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2$ از نقطه‌ی $A = (1,1)$ به $B = (\sqrt{2}, 0)$، BC قسمتی از محور x بین نقطه‌ی B و $C = (\sqrt{8}, 0)$، CD کمان دایره‌ی $x^2 + y^2 = 8$ از نقطه‌ی C به $D = (2,2)$ و بالاخره DA بخشی از خط $x = y$ بین نقطه‌ی D و A است.

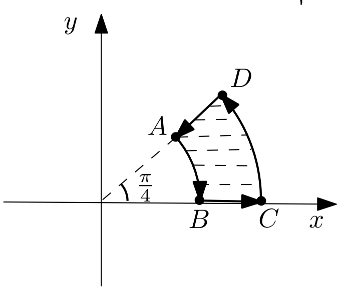
ب) خم C منحنی $ABCD$ از قسمت الف است.

توابع حقیقی $P(x,y) = \frac{x}{۱ + x^۲} - ۲y^۲$ و $Q(x,y) = y^۲ + xy$ روی دامنه‌ی D شامل C و درون آن مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابراین روی خم بسته و ساده‌ی C در جهت مثبت و برای میدان برداری $\mathbf{F}$ شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است. از سوی دیگر

$$D = \{(r,\theta)\ :\ \sqrt{۲} \le r \le \sqrt{۸}, ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۴}\}\ ,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = y\ \ ,\ \ \frac{\partial P}{\partial y} = -۴y$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy &= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA \\
&= \iint_D ۵y\ dA \\
&= \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \int_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۸}} ۵(r \sin\theta) r\ dr\ d\theta \\
&= ۵(\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \sin\theta\ d\theta)(\int_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۸}} r^۲\ dr) \\
&= (-۵\cos\theta|_۰^{\frac{\pi}{۴}})\ (\frac{۱}{۳} r^۳|_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۸}}) = \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۳}(۲ - \sqrt{۲})
\end{aligned}$$



شکل ۵–٦ خم C در مثال ۵–۳–۲.

ب) با در نظر گرفتن پاره‌خط DA از خط $x = y$ برای خم $C'' = C + AD$ شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است و بنابر الف $\int_{C''} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۳}(۲ - \sqrt{۲})$. پس

$$\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy + \int_{DA} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۳}(۲ - \sqrt{۲})$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy &= \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۳}(۲ - \sqrt{۲}) - \int_{DA} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy \\
&= \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۳}(۲ - \sqrt{۲}) + \int_{AD} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy
\end{aligned}$$

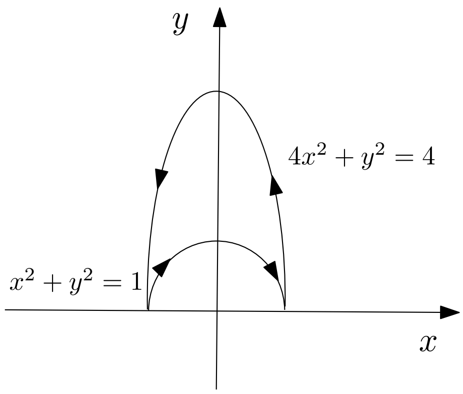
از سوی دیگر

$$\begin{aligned}\int_{AD} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy &= \int_{۱}^{۲} [(\frac{t}{۱+t^{۲}} - ۲t^{۲}) + (t^{۲}+t^{۲})]\,dt \\ &= [\ln(۱+t^{۲})]_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۵}{۲}\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۳}(۲-\sqrt{۲}) + \frac{۱}{۲}\ln\frac{۵}{۲}$$

مثال ۵–۳–۳ خم C خمی بسته شامل نیمه‌ی بالای محور x از بیضی $۴x^{۲}+y^{۲}=۴$ بین نقاط $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$ و نیم‌دایره‌ی بالای محور x از دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ بین نقاط $(-۱,۰)$ و $(۱,۰)$ است (شکل ۵–۷). برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=(-y+xy^{۲}+\arctan x^{۲})\,\mathbf{i}+(yx^{۲}+۵x-e^{y^{۲}})\,\mathbf{j}$، انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.



شکل ۵–۷ خم C در مثال ۵–۳–۳.

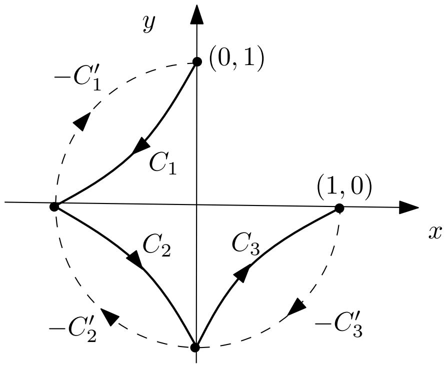
توابع حقیقی $P(x,y)=-y+xy^{۲}+\arctan x^{۲}$ و $Q(x,y)=yx^{۲}+۵x-e^{y^{۲}}$ روی دامنه‌ی D شامل C و درون آن مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این روی خم بسته و ساده‌ی C در جهت مثبت و برای تابع $\mathbf{F}$ شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است و

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = ۲xy+۵ \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -۱+۲xy$$

$$\begin{aligned}\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy &= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dA = ٦\iint_D dA \\ &= ٦(\frac{۱}{۲}\pi(۲) - \frac{۱}{۲}\pi) = ۳\pi\end{aligned}$$

مثال ۵-۳-۴ خم C نمودار رابطه‌ی $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$ در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم صفحه‌ی مختصاتی از $(0,1)$ به $(1,0)$ پیموده شده است (شکل ۵-۸). برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$، مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

می‌توان خم C را به صورت $C=C_1+C_2+C_3$ نوشت که C_1 قطعه‌ای از خم C در ناحیه‌ی دوم ، C_2 قطعه‌ای از خم C در ناحیه‌ی سوم و C_3 قطعه‌ای از خم C در ناحیه‌ی چهارم صفحه‌ی مختصاتی است. فرض کنیم C' نمودار دایره‌ی به معادله‌ی $x^2+y^2=1$ در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم صفحه‌ی مختصاتی بین نقاط $(0,1)$ و $(1,0)$ باشد. در این صورت می‌توان خم C' را نیز به صورت $C'=C'_1+C'_2+C'_3$ نوشت که C'_1 قطعه‌ای از دایره‌ی C' در ناحیه‌ی دوم ، C'_2 قطعه‌ای از دایره‌ی C' در ناحیه‌ی سوم و C'_3 قطعه‌ای از دایره‌ی C' در ناحیه‌ی چهارم صفحه‌ی مختصاتی باشد.



شکل ۵-۸ شکل مربوط به مثال ۵-۳-۴.

به ازای $i=1,2,3$ توابع حقیقی $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ و $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ روی هر دامنه‌ی D_i شامل $C_i+C'_i$ و درون آن که مبدأ را نداشته باشد مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این روی خم $C_i+C'_i$ در جهت مثبت و برای تابع F شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است. از سوی دیگر

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

بنابر این شرایط قضیه‌ی گرین برای خم $-C_i+C'_i$ روی D_i برقرار است و داریم

$$\int_{-C_i+C'_i} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \quad = \quad \iint_{D_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=0$$

پس برای $i = ۱, ۲, ۳$

$$\int_{C_i} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \int_{C'_i} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi} (\frac{-\sin t}{\cos^۲ t + \sin^۲ t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^۲ t + \sin^۲ t}(\cos t))dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi} dt = ۳\frac{\pi}{۲}\end{aligned}$$

محاسبه‌ی مساحت به کمک قضیه‌ی گرین

شرایط قضیه‌ی گرین برای D ناحیه‌ای در صفحه‌ی xy، متشکل از یک خم بسته‌ی قطعه قطعه هموار C و درون آن به قسمی که C در جهت مثبت پیموده شده است و به ازای توابع $P(x,y) = -y$ و $Q(x,y) = x$ برقرار است. بنابر این A مساحت ناحیه‌ی D را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned}A = \int\int_D dA &= \frac{۱}{۲}\int\int_D (۱ + ۱)\ dA \\ &= \frac{۱}{۲}\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dA \\ &= \frac{۱}{۲}\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy \\ &= \frac{۱}{۲}\int_C -y\ dx + x\ dy\end{aligned}$$

به همین ترتیب به ازای توابع $P(x,y) = ۰$ و $Q(x,y) = x$ می‌توان نوشت $A = \int_C x\ dy$.

و به ازای توابع $P(x,y) = -y$ و $Q(x,y) = ۰$ می‌توان نوشت $A = \int_C -y\ dx$.

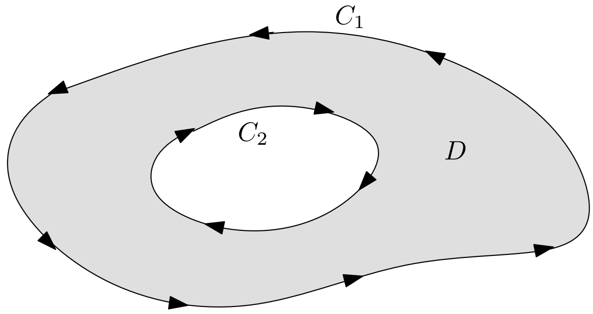
قضیه‌ی گرین برای نواحی همبند دوگانه

فرض کنیم $C_۱$ و $C_۲$ خم‌های بسته‌ی قطعه قطعه هموار باشند که $C_۲$ در درون $C_۱$ قرار گرفته است. ناحیه‌ی D را ناحیه‌ای در صفحه‌ی xy، متشکل از $C_۱$ و $C_۲$ و بین آنها در نظر می‌گیریم. این نوع ناحیه را **همبند دوگانه** می‌نامیم (شکل ٦—۵). جهت مثبت خم‌های $C_۱$ و $C_۲$ را به این ترتیب تعریف می‌کنیم که هرگاه ناظری روی C_i $(i = ۱, ۲)$

در آن جهت حرکت کند D را در سمت چپ خود ببیند. به این ترتیب جهت مثبت $C_۱$ خلاف حرکت عقربه‌های ساعت و جهت مثبت $C_۲$ جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

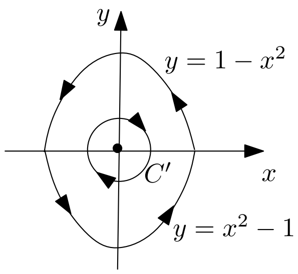
قضیه ۵-۳-۵ فرض کنیم D ناحیه‌ای همبند دوگانه در صفحه‌ی xy با مرزهای $C_۱$ و $C_۲$ باشد به قسمی که $C_۱$ و $C_۲$ در جهت مثبت پیموده شده اند (شکل ۵-۹). در این صورت اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ روی دامنه‌ی بازی شامل D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد آنگاه

$$\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \int_{C_۱} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy + \int_{C_۲} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$



شکل ۵-۹ یک ناحیه‌ی همبند دوگانه و شکل مربوط به مثال ۵-۳-۶.

مثال ۵-۳-۶ خم C خمی بسته شامل قطعاتی از سهمی‌های $y = x^۲ - ۱$ و $y = ۱ - x^۲$ است که این دو از هم جدا می‌کنند (شکل ۶-۵). اگر C در جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) پیموده شود ، برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = \frac{x-y}{x^۲+y^۲}\ \mathbf{i} + \frac{y+x}{x^۲+y^۲}\ \mathbf{j}$ ، انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.



شکل ۵-۱۰ شکل مربوط به مثال ۵-۳-۶.

فرض کنیم C' دایره $x^۲ + y^۲ = r^۲$ به شعاع r باشد به قسمی که C' درون C قرار بگیرد (برای مثال $r = \frac{۱}{۴}$). جهت C' را جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیریم. توابع حقیقی

$P(x,y)=\dfrac{y-x}{x^{۲}+y^{۲}}$ و $Q(x,y)=\dfrac{y+x}{x^{۲}+y^{۲}}$ روی ناحیه‌ای همبند دوگانه D در صفحه‌ی xy با مرزهای C و C' مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این روی خم‌های بسته و ساده‌ی C و C' و برای تابع F شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است. از سوی دیگر

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^{۲}-x^{۲}-۲xy}{x^{۲}+y^{۲}}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

بنابر این

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{C'} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\int_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\circ$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{-C'}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_\circ^{۲\pi}[\frac{r\sin t-r\cos t}{r^{۲}\cos^{۲}t+r^{۲}\sin^{۲}t}(-r\sin t)+\frac{r\cos t+r\sin t}{r^{۲}\cos^{۲}t+r^{۲}\sin^{۲}t}(r\cos t)]\ dt\\ &= \int_\circ^{۲\pi}\ dt=۲\pi\end{aligned}$$

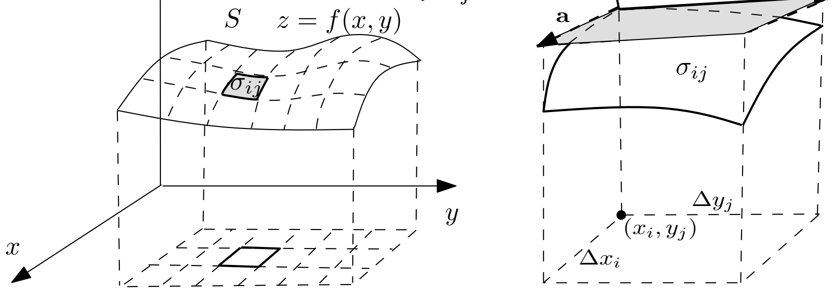
۴-۵ مساحت و انتگرال رویه

در این بخش به معرفی نوع دیگری از انتگرال، موسوم به انتگرال رویه می‌پردازیم. این مفهوم به نوعی تعمیم انتگرال خطی هم هست. همان‌گونه که گفتیم ایده‌ی اولیه‌ی انتگرال خطی برای محاسبه‌ی طول کمانی از یک خم و کار یک میدان نیرو در طول یک خم مطرح شده است. به همین ترتیب ایده‌ی اولیه‌ی انتگرال رویه برای محاسبه‌ی مساحت بخشی از یک رویه در یک ناحیه و شار یک میدان نیرو گذرنده از یک سطح بوده است.

در ادامه‌ی بحث ابتدا به نحوه‌ی محاسبه‌ی مساحت بخشی از یک رویه می‌پردازیم. همانند دیگر انتگرال‌هایی که تاکنون مطرح کرده‌ایم، در اینجا نیز به کمک افرازی مناسب روی ناحیه‌ی مورد نظر یک مجموع ریمان برای تقریب مساحت رویه به دست می‌آوریم. فرض کنیم رویه‌ی S نمودار تابع $z=f(x,y)$ و تصویر قائم S بر صفحه xoy ناحیه‌ی نرمال D باشد (یعنی D اجتماعی از نواحی ساده‌ی عمودی و افقی است). همچنین فرض کنیم f روی D مشتقات جزئی پیوسته دارد و D در مستطیل $[a,b]\times[c,d]$ محدود شده است. برای افراز $a=x_\circ<\ldots<x_n=b$ از $[a,b]$ و افراز $c=y_\circ<\ldots<y_m=d$ از $[c,d]$، مجموعه‌ای از زیر نواحی $\delta_{ij}=[x_{i-۱},x_i]\times[y_{j-۱},y_j]$ برای ناحیه‌ی D به دست می‌آید. فرض کنیم مستطیل Δ_{ij} با طول Δx_i و عرض Δy_j زیر ناحیه‌ی δ_{ij} از $[a,b]\times[c,d]$ باشد که اشتراک آن با D تهی نیست. روی این نواحی نیز مجموعه‌هایی از

S به دست می‌آید (شکل ۵—۱۱). اگر **عنصر(اِلمان) سطح** روی Δ_{ij} برابر σ_{ij} باشد، مساحت بخشی از S که روی D قرار دارد عبارت است از:

$$\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij}$$



شکل ۵—۱۱ مساحت رویه.

اکنون به محاسبه‌ی تقریبی برای σ_{ij} می‌پردازیم. فرض کنیم متوازی‌الاضلاع π_{ij} قسمتی از صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در نقطه‌ی $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ باشد که روی ناحیه‌ی Δ_{ij} واقع شده است (شکل ۵—۱۱). در این صورت مساحت π_{ij} تقریبی برای σ_{ij} است.

اگر $\mathbf{a} = a_{۱}\ \mathbf{i} + a_{۲}\ \mathbf{j} + a_{۳}\ \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_{۱}\ \mathbf{i} + b_{۲}\ \mathbf{j} + b_{۳}\ \mathbf{k}$ مشخص کننده‌ی طول و عرض π_{ij} باشند در بخش اول دیدیم که مساحت π_{ij} برابر $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ است.

تصویر قائم متوازی‌الاضلاع π_{ij} بر صفحه‌ی xoy مستطیلی با طول Δx_i و عرض Δy_j است. بنابر این $(a_{۱}, a_{۲}) = \Delta x_i\ \mathbf{i}$ و $(b_{۱}, b_{۲}) = \Delta y_j\ \mathbf{j}$. در نتیجه $\mathbf{a} = \Delta x_i\ \mathbf{i} + a_{۳}\ \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \Delta y_j\ \mathbf{j} + b_{۳}\ \mathbf{k}$. از سوی دیگر بردار $\nabla = -f_x\ \mathbf{i} - f_y\ \mathbf{j} + \mathbf{k}$، بردار گرادیان تابع $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ برداری عمود بر π_{ij} است. بنابر این $\mathbf{a} \cdot \nabla = ۰$ و $\mathbf{b} \cdot \nabla = ۰$. پس

$$۰ = \mathbf{a} \cdot \nabla = (\Delta x_i \mathbf{i} + a_{۳}\mathbf{k}) \cdot (-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\Delta x_i\ f_x + a_{۳}$$

$$۰ = \mathbf{b} \times \nabla = (\Delta y_j \mathbf{j} + b_{۳}\mathbf{k}) \cdot (-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\Delta y_j\ f_y + b_{۳}$$

در نتیجه $b_{۳} = \Delta y_j\ f_y$ و $a_{۳} = \Delta x_i\ f_x$. پس

$$\mathbf{a} = \Delta x_i\ \mathbf{i} + \Delta x_i\ f_x\ \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{b} = \Delta y_j\ \mathbf{j} + \Delta y_j\ f_y\ \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_i & ۰ & \Delta x_i\ f_x \\ ۰ & \Delta y_j & \Delta y_j\ f_y \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{۱ + f_x^{۲} + f_y^{۲}}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

$$\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \approx \sum_i \sum_j \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sum_i \sum_j \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

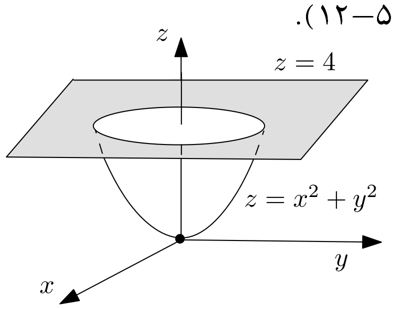
به این ترتیب برای $\mu = \mathrm{Max}_{i,j}\{\Delta x_i\ ,\ \Delta y_j\}$ داریم

$$\sigma = \lim_{\mu \to ۰} \sum_i \sum_j \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ \Delta x_i\ \Delta y_j = \int\!\!\int_D \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ dA$$

مقدار $\lim_{\mu \to ۰} \sum_i \sum_j \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$ را در صورت وجود با $\int\!\!\int_S d\sigma$ نمایش می‌دهیم. بنابر آنچه گفته شد، مساحت رویه‌ی S روی ناحیه‌ی D عبارت است از

$$\int\!\!\int_S d\sigma = \int\!\!\int_D \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ dA$$

مثال ۵–۴–۱ مطلوب است مساحت بخشی از سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ واقع در زیر صفحه‌ی $z = ۴$ (شکل ۵–۱۲).



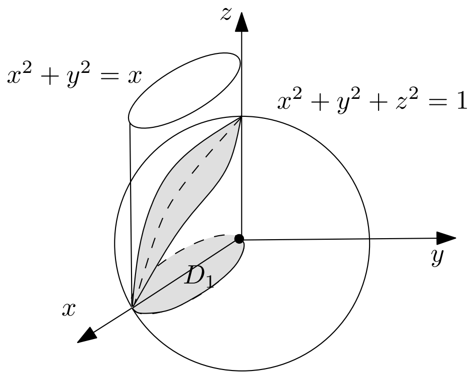
شکل ۵–۱۲ مساحت بخشی از سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ واقع در زیر صفحه‌ی $z = ۴$.

می‌خواهیم مساحت رویه‌ی S به معادله‌ی $z = f(x,y) = x^۲ + y^۲$ را روی ناحیه‌ی $D := \{(x,y) : x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ به دست آوریم.

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int\!\!\int_D \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ dA \\
&= \int\!\!\int_D \sqrt{۱ + ۴x^۲ + ۴y^۲}\ dA \\
&= \int_۰^{۲\pi} \int_۰^۲ r\sqrt{۱ + ۴r^۲}\ dr\ d\theta \\
&= (\frac{۱}{۱۲} \int_۰^{۲\pi} d\theta)(۱ + ۴r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۲) = \frac{\pi}{۶}(۱۷\sqrt{۱۷} - ۱)
\end{aligned}$$

مثال ۵-۴-۲ مطلوب است مساحت قسمتی از کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ که به وسیله‌ی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = x$ در بالای صفحه‌ی xoy محدود می‌شود (شکل ۵–۱۳). باید قسمتی از رویه‌ی S به معادله‌ی $z = f(x,y) = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$ را در نظر بگیریم که روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = x$ قرار دارد. معادله‌ی دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = x$ در مختصات قطبی عبارت است از $r^۲ = r\cos\theta$ یعنی $r = \cos\theta$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از $\{(r,\theta) : ۰ \le r \le \cos\theta, -\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}\}$. به این ترتیب به ازای $D_۱ := \{(r,\theta) : ۰ \le r \le \cos\theta, ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}\}$

$$\begin{aligned}
\sigma &= \iint_D \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\, dA \\
&= ۲\iint_{D_۱} \sqrt{۱ + \frac{x^۲}{۱ - x^۲ - y^۲} + \frac{y^۲}{۱ - x^۲ - y^۲}}\, dA \\
&= ۲\iint_{D_۱} \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}}\, dA = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{۱ - r^۲}}\, dr\, d\theta \\
&= ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} [-(۱ - r^۲)^{\frac{۱}{۲}}]_۰^{\cos\theta}\, d\theta = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (۱ - \cos\theta)\, d\theta = \pi - ۲
\end{aligned}$$



شکل ۵–۱۳ قسمتی از کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ که به وسیله‌ی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = x$ در بالای صفحه‌ی xoy محدود می‌شود.

انتگرال رویه برای توابع حقیقی (اسکالر)

پیش از ارائه‌ی مفهوم شار یک میدان نیرو گذرنده از یک سطح مفهوم کلی‌تر انتگرال رویه را برای توابع حقیقی مطرح می‌کنیم. فرض کنیم رویه‌ی S نمودار تابع $z = f(x,y)$ روی ناحیه‌ی نرمال D در صفحه باشد. همچنین فرض کنیم $g : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $w = g(x,y,z)$ روی S پیوسته و S در یک مکعب مستطیل $[a,b] \times [c,d] \times [m,n]$ محدود شده است. همچنین فرض کنیم f روی D مشتقات جزئی پیوسته دارد و D در

مستطیل $[a,b]\times[c,d]$ محدود شده است. انتگرال سطح تابع اسکالر g روی سطح S که با نماد $\int\int_S g(x,y,z)\ d\sigma$ نمایش داده می‌شود، در صورت وجود، عبارت است از

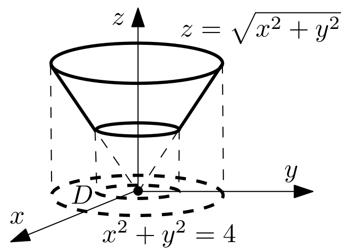
$$\int\int_S g(x,y,z)\ d\sigma := \int\int_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\ dA$$

مثال ۵–۴–۳ مطلوب است انتگرال سطح تابع $g(x,y,z)=x^2+z^2$ روی نیم کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$، $(z\geq 0)$.

رویه‌ی S نیم کره‌ی به معادله‌ی $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ است که روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد. معادله‌ی دایره‌ی $x^2+y^2=1$ در مختصات قطبی عبارت است از $r=1$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از $\{(r,\theta): 0\leq r\leq 1\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}
\int\int_S g(x,y,z)d\sigma &= \int\int_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dA \\
&= \int\int_D (1-y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dA \\
&= \int\int_D \frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r(1-r^2\sin^2\theta)}{\sqrt{1-r^2}}\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}[-\sin^2\theta(\frac{1}{3}r^2\sqrt{1-r^2}-\frac{2}{3}\sqrt{1-r^2})-\sqrt{1-r^2}]_0^1\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}(-\frac{2}{3}\sin^2\theta+1)\ d\theta = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

مثال ۵–۴–۴ مطلوب است انتگرال سطح تابع $g(x,y,z)=e^{\frac{x^2+y^2}{z}}$ روی بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$ (شکل ۵–۱۴).



شکل ۵–۱۴ بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$.

رویه‌ی S مخروط ناقص به معادله‌ی $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ است که روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد. ناحیه‌ی D در مختصات

قطبی عبارت است از $\{(r,\theta) : ۱ \leq r \leq ۲ \ , \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}
\int\int_S g(x,y,z)\ d\sigma &= \int\int_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ dA \\
&= \int\int_D e^{\frac{x^۲+y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}}}\sqrt{۱ + \frac{x^۲}{x^۲+y^۲} + \frac{y^۲}{x^۲+y^۲}}\ dA \\
&= \sqrt{۲}\int\int_D e^{\sqrt{x^۲+y^۲}}\ dA = \sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi}\int_۱^۲ re^r\ dr\ d\theta \\
&= \sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi}[re^r - e^r]_۱^۲\ d\theta = ۲\pi\sqrt{۲}e^۲
\end{aligned}$$

ویژگی‌های انتگرال سطح توابع حقیقی

در مورد انتگرال رویه‌ها از دو ویژگی اساسی زیر در بسیاری از موارد استفاده می‌کنیم.

۱. اگر توابع اسکالر g و h روی رویه‌ی S نمودار تابع $z = f(x,y)$ انتگرال سطح داشته باشند (انتگرال پذیر). آنگاه $g + \lambda h$ نیز روی S انتگرال‌پذیر است و

$$\int\int_S (g + \lambda h)\ d\sigma = \int\int_S g\ d\sigma + \lambda\int\int_S h\ d\sigma$$

۲. اگر تابع اسکالر g روی رویه‌های $S_۱$ و $S_۲$ با مرز مشترک C که C خمی پیوسته است انتگرال پذیر باشد آنگاه g روی $S := S_۱ \cup S_۲$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\int\int_S g\ d\sigma = \int\int_{S_۱} g\ d\sigma + \int\int_{S_۲} g\ d\sigma$$

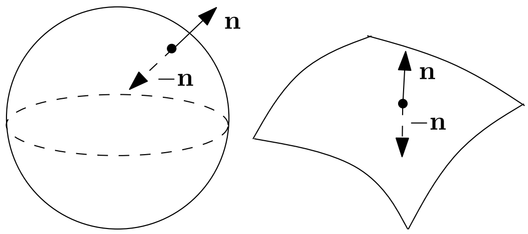
بردار یکه‌ی نرمال رویه و رویه‌های جهت‌پذیر

فرض کنیم رویه‌ی S نمودار تابع $z = f(x,y)$ روی ناحیه‌ی نرمال D در صفحه باشد. در این صورت تابع برداری

$$\mathbf{n}(x,y) = \frac{-f_x(x,y)\mathbf{i} - f_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{۱ + (f_x(x,y))^۲ + (f_y(x,y))^۲}}$$

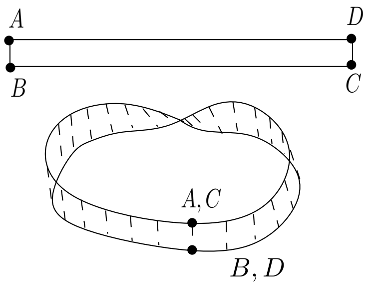
اصطلاحاً **بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای** رویه‌ی S در نقطه‌ی $(x,y,f(x,y))$ نامیده می‌شود. به همین ترتیب تابع برداری $-\mathbf{n}(x,y)$، **بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین** رویه‌ی S در نقطه‌ی $(x,y,f(x,y))$ است (شکل ۵–۱۵). اگر $\mathbf{n}$ پیوسته باشد رویه‌ی S **هموار** نامیده می‌شود. رویه‌ی هموار S **دو طرفه** است هرگاه روی هیچ خم پیوسته‌ای در S، بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای $\mathbf{n}$ به طور پیوسته به بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین $-\mathbf{n}$

تبدیل نشود (شکل ۵—۱۵). سطوح درجه دو مانند کره، بیضی‌گون، سهمی‌گون، زین‌اسبی و... رویه‌های دو طرفه هستند.



شکل ۵—۱۵ بردار نرمال رویه‌ی جهت‌پذیر.

یک مثال معروف برای رویه‌ی یک طرفه **نوار موبیوس** است. برای تجسم نوار موبیوس کافی است لبه‌ی AD از نوار مستطیلی $ABCD\square$ را در $\mathbb{R}^3$ طوری به لبه‌ی BC بچسبانیم که A بر C و B بر D منطبق شوند (شکل ۵—۱۶).



شکل ۵—۱۶ نوار موبیوس (رویه‌ی جهت‌ناپذیر).

برای رویه‌های دو طرفه به طور طبیعی می‌توان دو طرف (جهت) در نظر گرفت.

یک جهت، که آن را جهت مثبت می‌گیریم، جهتی است که بردار $\mathbf{n}$، یکه‌ی نرمال رو به بالای S مشخص می‌کند. جهت دیگر که آن را جهت منفی می‌گیریم، جهتی است که بردار $\mathbf{n}-$، یکه‌ی نرمال رو به پایین S مشخص می‌کند.

مثلاً در کره‌ی S جهتی که بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای S مشخص می‌کند رو به خارج کره است پس جهت مثبت کره سطح خارجی کره است. به این ترتیب اگر کره را همراه با بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای آن مشخص کنیم آن را با جهت مثبت در نظر گرفته‌ایم.

به همین ترتیب جهتی که بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین کره مشخص می‌کند رو به داخل کره است پس جهت منفی کره سطح داخلی کره است. به این ترتیب اگر کره را

همراه با بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین (داخل) آن مشخص کنیم آن را با جهت منفی در نظر گرفته‌ایم.

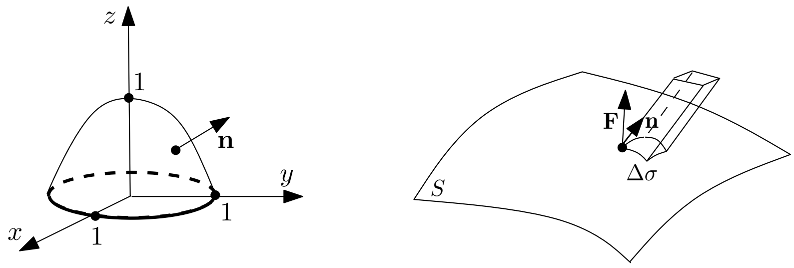
به طور شهودی یک رویه‌ی S، محدود در یک مکعب مستطیل، **بسته** است هرگاه فضای $\mathbb{R}^{۳}$ را به سه ناحیه‌ی درون S، روی S و بیرون S افراز کند. کره و بیضی‌گون مثال‌های ساده از رویه‌های بسته هستند.

۵–۵ شار (فلوی) یک میدان برداری

فرض کنیم $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ یک میدان برداری پیوسته باشد که بر رویه‌ی هموار S با بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای $\mathbf{n}$ تعریف شده است. منظور از **شار** میدان $\mathbf{F}$ که از سطح S می‌گذرد انتگرال سطح زیر است:

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

مفهوم شار یک میدان برداری یکی از مفاهیم اساسی در بسیاری از رشته‌های فنی و مهندسی به حساب می‌آید. برای مثال تغییر شار یک میدان مغناطیسی در قاب سیم‌پیچ منجر به تولید برق متناوب می‌شود. به عنوان مثال دیگر، فرض کنیم یک سیال با چگالی ρ و سرعت $\mathbf{v}$ از سطح S عبور می‌کند. برای میدان $\mathbf{F} = \rho\ \mathbf{v}$ عنصر شار $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ \Delta\sigma$ مشخص کننده‌ی حجم مایع گذرنده از عنصر سطح $\Delta\sigma$ در واحد زمان است. به عبارت دیگر $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ \Delta\sigma$ اِلمان حجم مایع گذرنده از سطح S است (شکل ۵–۱۷).



شکل ۵–۱۷ اِلمان حجم مایع گذرنده از S (المان شار نیروی $\mathbf{F} = \rho\ \mathbf{v}$) و نمودار سهمی‌گون $z = ۱ - x^{۲} - y^{۲}$ بالای صفحه‌ی xoy.

جمع این اِلمانها در حد، برابر $\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ و مشخص کننده‌ی حجم مایع گذرنده از کل سطح S در واحد زمان است.

اگر S نمودار تابع $z = f(x,y)$ روی ناحیه‌ی نرمال D در صفحه‌ی xoy باشد آنگاه:

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{۱ + f_x^{۲} + f_y^{۲}}}$$

و در نتیجه به ازای $\mathbf{N}=-f_x(x,y)\mathbf{i}-f_y(x,y)\mathbf{j}+\mathbf{k}$ داریم:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\Big(\frac{-f_x\mathbf{i}-f_y\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{۱+f_x^۲+f_y^۲}}\Big)\sqrt{۱+f_x^۲+f_y^۲}\,dA\\ &= \iint_D \mathbf{F}\cdot(-f_x\mathbf{i}-f_y\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dA=\iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA\end{aligned}$$

مثال ۵–۵–۱ شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\ \mathbf{i}+y^۲\ \mathbf{j}+\ (۱-z)\ \mathbf{k}$ را از رویه‌ی S، نمودار سهمی‌گون $z=۱-x^۲-y^۲$ واقع در بالای صفحه‌ی xoy محاسبه کنید. بردار $\mathbf{n}$ را یکه‌ی نرمال رو به بالای S در نظر بگیرید (شکل ۵–۱۷).

از معادله‌ی $z=۱-x^۲-y^۲$، $z\geq ۰$ و جهت $\mathbf{n}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{N}=-z_x\ \mathbf{i}-z_y\ \mathbf{j}+\mathbf{k}=۲x\ \mathbf{i}+۲y\ \mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=۲x^۲y+۲y^۳+(۱-z)=۲x^۲y+۲y^۳+(x^۲+y^۲)=(۲y+۱)(x^۲+y^۲)$$

$$D=\{(x,y)\ :\ x^۲+y^۲\leq ۱\}=\{(r,\theta)\ :\ ۰\leq r\leq ۱\ ,\ ۰\leq\theta\leq ۲\pi\}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\Big(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}\Big)\|\mathbf{N}\|\,dA=\iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA\\ &= \iint_D (۲y+۱)(x^۲+y^۲)\,dA\\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ (۲r\sin\theta+۱)(r^۲)r\ dr\ d\theta=\frac{\pi}{۲}\end{aligned}$$

مثال ۵–۵–۲ شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z)=۲xy^۲\mathbf{i}+x^۲y\ \mathbf{j}+\ xyz\ \mathbf{k}$ گذرنده از قطعه صفحه‌ی S به معادله‌ی $x+۲y+z=۱$ واقع در یک هشتم اول فضا را محاسبه کنید. بردار $\mathbf{n}$ را یکه‌ی نرمال رو به بالای S، یعنی جهتی که مبدأ را ندارد در نظر بگیرید.

از معادله‌ی $z=۱-x-۲y$ ، $z\geq ۰$ و با توجه به جهت $\mathbf{n}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{N}=-z_x\ \mathbf{i}-z_y\ \mathbf{j}+\mathbf{k}=\ \mathbf{i}+۲\ \mathbf{j}+\mathbf{k}$$

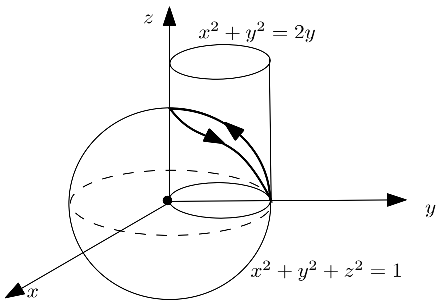
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=x^۲+y^۲+xyz=۲xy^۲+x^۲y+xy(۱-x-۲y)=xy$$

$$D=\{(x,y)\ :\ ۰\leq x\leq ۱\ ,۰\leq y\leq \frac{۱}{۲}(۱-x)\}$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_D \mathbf{F}\cdot\Big(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}\Big)\|\mathbf{N}\|\,dA=\iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_D xy\ dA = \int_{\circ}^{۱} \int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}(۱-x)} xy\ dy\ dx \\
&= \int_{\circ}^{۱} x[\frac{y^۲}{۲}]_{\circ}^{\frac{۱}{۲}(۱-x)})\ dx = \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۱} x(۱-x)^۲\ dx = \frac{۱}{۲۴}
\end{aligned}
$$

مثال ۵–۵–۳ فرض کنید S قسمتی از کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴z$ است که به وسیله‌ی استوانه‌ی $x^۲+y^۲ = ۲y$ در بالای صفحه‌ی xoy محدود می‌شود. شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z) = ۲x\ \mathbf{k}$ گذرنده از رویه‌ی S را محاسبه کنید. بردار $\mathbf{n}$ را یکه‌ی نرمال رو به بالای S (جهتی که مبدأ را ندارد) در نظر بگیرید (شکل ۵–۱۸).



شکل ۵–۱۸ شکل مربوط به مثال ۵–۵–۳.

از معادله‌ی $z = ۲ + \sqrt{۴-(x^۲+y^۲)}$ و با توجه به جهت $\mathbf{n}$ نتیجه می‌شود:

$\mathbf{N} = -z_x\ \mathbf{i} - z_y\ \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = ۲x$

ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^۲+y^۲ = ۲y$ است و معادله‌ی دایره‌ی $x^۲+y^۲ = ۲y$ در مختصات قطبی عبارت است از $r^۲ = ۲r\sin\theta$ یعنی $r = ۲\sin\theta$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از $D = \{(r,\theta)\ :\ \circ \le r \le ۲\sin\theta, \circ \le \theta \le \pi\}$.

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}\cdot(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA \\
&= \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dA = \iint_D ۲x\ dA \\
&= \int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{۲\sin\theta} (۲r\cos\theta)r\ d\mathbf{r}\ d\theta \\
&= \int_{\circ}^{\pi} \cos\theta[\frac{۲r^۳}{۳}\ ]_{\circ}^{۲\sin\theta}\ d\theta \\
&= \frac{۱۶}{۳}\int_{\circ}^{\pi} \sin^۳\theta\ \cos\theta\ d\theta = \frac{۴}{۳}[\sin^۴\theta\ ]_{\circ}^{\pi} = \circ
\end{aligned}
$$

چند عملگر برداری مهم

در این بخش به معرفی چند عملگر مهم آنالیز برداری می‌پردازیم که در بیان قضایای واگرایی و استوکس مطرح می‌شوند. می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی V متشکل از توابع حقیقی ۳ متغیره و مجموعه‌ی W متشکل از توابع برداری ۳ متغیره روی میدان $\mathbb{R}$ فضاهای برداری با بعد نامتناهی هستند. در این مجموعه‌ها توابع را بردار در نظر می‌گیریم، جمع برداری همان جمع توابع و ضرب اسکالری ضرب یک عدد در یک تابع است. روی این فضاهای برداری عملگرهای گرادیان ، دیورژانس ، کرل و لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شوند.

۱) عملگر ∇ (دل)

برای یک تابع حقیقی ۳ متغیره‌ی f که مشتقات جزئی دارد تابع برداری ∇f (گرادیان f) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla f := \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

به طور صوری می‌توان نوشت:

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

می‌توان ∇f را تصویر f به وسیله‌ی عملگر ∇ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\nabla : V \to W \quad ; \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

۲) عملگر div (دیورژانس)

فرض کنیم تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ دارای مشتقات جزئی باشد. در این صورت **دیورژانس (واگرائی)** F که با $\mathrm{div}\ \mathbf{F}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از تابع حقیقی

$$\mathrm{div}\ \mathbf{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

به طور صوری قرار می دهیم

$$\mathrm{div}\mathbf{F} := \nabla \cdot F$$

می‌توان div را یک عملگر به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\mathrm{div} : W \to V \quad ; \quad \mathbf{F} \mapsto \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

۳) عملگر curl (کرل)

برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ که روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ توابع P ، Q و R دارای مشتقات جزئی باشند **کرل (پیچش)** F که با $\mathrm{curl}\ \mathbf{F}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از تابع برداری

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} := (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\ \mathbf{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\ \mathbf{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ \mathbf{k}$$

به طور صوری می‌توان نوشت:

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} := \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

در واقع می‌توان curl را یک عملگر به صورت زیر در نظر گرفت

$$\mathrm{curl} : W \to W\ ;\ F \mapsto \nabla\times\mathbf{F} = \mathrm{curl}\ F = (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\ \mathbf{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\ \mathbf{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\ \mathbf{k}$$

مثال ۵-۵-۴ توابع $\mathbf{F}(x,y,z) = x^۲\mathbf{i}+e^{xz}\mathbf{j}+۲xz\ \mathbf{k}$ و $f(x,y,z) = xy^۲+\ln(x+z)$ را در نظر می‌گیریم. مطلوب است ∇f ، $\mathrm{curl}\ \mathbf{F}$ و $\mathrm{div}\ \mathbf{F}$.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = (y^۲ + \frac{۱}{x+z})\ \mathbf{i} + ۲xy\ \mathbf{j} + \frac{۱}{x+z}\ \mathbf{k}$$

برای $P = x^۲$ ، $Q = e^{xz}$ و $R = ۲xz$ داریم

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^۲ & e^{xz} & ۲xz \end{vmatrix} = -xe^z\mathbf{i} - ۲z\mathbf{j} + ze^x\ \mathbf{k}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۲x + ۰ + ۲x = ۴x$$

اثبات قضیه‌ی زیر را که برخی از روابط مهم بین این عملگر را نشان می‌دهد به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

قضیه ۵-۵-۵ فرض کنیم f و g توابع حقیقی ۳ متغیره باشند که مشتقات جزئی آنها روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ وجود دارند و برای توابع برداری $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ همه‌ی مولفه‌ها دارای مشتقات جزئی باشند. در این صورت

۱) $\text{curl}(\nabla f) = 0$.

۲) $\text{div}(\text{curl } \mathbf{F}) = 0$.

۳) برای $\lambda \in \mathbb{R}$، $\nabla(f + \lambda g) = \nabla f + \lambda \nabla g$، $\text{curl}(\mathbf{F} + \lambda\mathbf{G}) = \text{curl } \mathbf{F} + \lambda \text{curl } \mathbf{G}$ و $\text{div}(\mathbf{F} + \lambda\mathbf{G}) = \text{div } \mathbf{F} + \lambda \text{div } \mathbf{G}$

۴) $\text{div } (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{curl } \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{curl } \mathbf{G}$.

۵) $\text{div } (f\mathbf{F}) = f \text{ div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$.

٦) $\text{curl } (f\mathbf{F}) = f \text{ curl } \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.

۵-٦ قضیه‌ی واگرایی گاوس (قضیه‌ی دیورژانس)

در این بخش به یکی از قضایای مهم آنالیز برداری موسوم به قضیه‌ی واگرایی گاوس می‌پردازیم. ابتدا حالت خاص این قضیه را در صفحه بیان می‌کنیم که شکل دیگری از قضیه‌ی گرین است. فرض کنیم مرز ناحیه‌ی D یک خم بسته و قطعه به قطعه هموار C به طول L باشد. همچنین فرض کنیم خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ باشد که با پارامتر طول قوس روی $[0, L]$ بیان شده است. علاوه بر این فرض می‌کنیم توابع P و Q مولفه‌های میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\ \mathbf{i} + Q(x,y)\ \mathbf{j}$ روی D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. در بخش قبل دیدیم که $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$. به این ترتیب

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = (x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (P(x,y)\ \mathbf{i} + Q(x,y)\ \mathbf{j}) \cdot (y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}) = -Q(x,y)x'(s) + P(x,y)y'(s)$$

بنابر این طبق قضیه‌ی گرین داریم

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_C (-Q)\ dx\ + P\ dy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA = \iint_D \text{div } \mathbf{F}\ dA
\end{aligned}$$

اکنون قضیه‌ی واگرایی گاوس را در فضا به عنوان تعمیم حالت قبل مطرح می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم T ناحیه‌ای $x-$ ساده، $y-$ ساده و $z-$ ساده باشد. برای این ناحیه‌ی $x-$ ساده، ناحیه‌ی $D_{yz} \subset \mathbb{R}^2$ از صفحه‌ی yoz و توابع $h_1, h_2 : D_{yz} \to \mathbb{R}$ وجود دارند که

$$T = \{(x,y,z) \int \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in D_{yz} \ , \ h_1(y,z) \le x \le h_2(y,z)\}$$

با استفاده از قضیه‌ی فوبینی برای تابع پیوسته‌ی $\frac{\partial P}{\partial x}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz &= \iint_{D_{yz}} \Big(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\Big)\, dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} \big(P(h_2(y,z),y,z) - P(h_1(y,z),y,z)\big)\, dydz\end{aligned}$$

از سوی دیگر، رویه‌ی S را می‌توانیم به صورت اجتماع رویه‌های S_1، نمودار تابع $h_1 : D_{yz} \to \mathbb{R}$، S_2، نمودار تابع $h_2 : D_{yz} \to \mathbb{R}$ و $S_3 := S - (S_1 \cup S_2)$ بیان کنیم. در این صورت قائم یکه بر رویه‌ی S_1 در جهت خارج S از رابطه‌ی

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_1}{\partial z})^2}}(-i + \frac{\partial h_1}{\partial y} j + \frac{\partial h_1}{\partial z} k)$$

و قائم یکه بر S_2 در جهت خارج S از رابطه‌ی

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_2}{\partial z})^2}}(i - \frac{\partial h_2}{\partial y} j - \frac{\partial h_2}{\partial z} k)$$

به دست می‌آیند. اگر $S_3 \neq \emptyset$ آنگاه قائم یکه بر قطعات هموار تشکیل دهنده‌ی رویه‌ی S_3 بر بردار $\mathbf{i}$ عمود خواهند بود. به این ترتیب، برای میدان $\mathbf{F}_1 := P\mathbf{i}$،

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{S_1} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_3} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \\ &= \iint_{S_1} \frac{-P}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_1}{\partial z})^2}}\, d\sigma + \iint_{S_2} \frac{P}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_2}{\partial z})^2}}\, d\sigma \\ &= -\iint_{D_{yz}} P(h_1(y,z),y,z)\, dydz + \iint_{D_{yz}} P(h_2(y,z),y,z)\, dydz\end{aligned}$$

پس

$$\iint_S (P\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz \qquad (۵)$$

به همین ترتیب، با در نظر گرفتن میدان $\mathbf{F}_۲ := Q\mathbf{j}$ بر ناحیه‌ی D به عنوان یک ناحیه‌ی $y-$ ساده و میدان $\mathbf{F}_۳ := R\mathbf{k}$ بر D به عنوان یک ناحیه‌ی $z-$ ساده، روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\iint_S (Q\mathbf{j})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz \qquad (۱)$$

$$\iint_S (R\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz \qquad (۲)$$

با جمع طرفین روابط (۰)، (۱) و (۲)، خواهیم داشت

$$\iint_S (P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV = \iiint_T \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV$$

این رابطه که به قضیه‌ی واگرائی گاوس معروف است، برای نواحی کلی‌تر، با تقسیم ناحیه به اجتماعی از نواحی از نوع فوق و با استفاده از خواص انتگرال رویه و با همان ایده‌ای که برای قضیه‌ی گرین مشاهده کردیم به دست می‌آید. این رابطه در قضیه‌ی زیر بیان شده است.

قضیه ۵-۶-۱ (**واگرائی گاوس**) فرض کنیم S رویه‌ای بسته، جهت‌پذیر و قطعه به قطعه هموار در برگیرنده ناحیه‌ی T و $\mathbf{n}$ قائم یکه بر S همه جا رو به سمت بیرون S باشد. اگر مولفه‌های میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ بر مجموعه‌ای باز در برگیرنده‌ی D مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV$$

مثال ۵-۶-۲ اگر T ناحیه‌ی خارج استوانه‌ی $x^۲+y^۲ = ۱$ و داخل کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴$ و S رویه‌ی محصور کننده‌ی T باشد، برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+yz)\,\mathbf{i}+(y+xz)\,\mathbf{j}+(z+xy)\,\mathbf{k}$ به ازای $\mathbf{n}$، بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای S مطلوب است $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$.

برای $P = x+yz$ ، $Q = y+xz$ و $R = z+xy$ ، $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = ۳$.

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z)\ :\ ۱\le x^۲+y^۲\le ۴\ ,\ -\sqrt{۴-(x^۲+y^۲)}\le z\le\sqrt{۴-(x^۲+y^۲)}\} \\ &= \{(r,\theta,z)\ :\ ۱\le r\le ۲\ ,\ ۰\le\theta\le ۲\pi\ ,\ -\sqrt{۴-r^۲}\le z\le\sqrt{۴-r^۲}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = ۳\iiint_T dV \\
&= ۳\int_۰^{۲\pi}\int_۱^۲\int_{-\sqrt{۴-r^۲}}^{\sqrt{۴-r^۲}} r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= ۳\int_۰^{۲\pi}\int_۱^۲ ۲r\sqrt{۴-r^۲}\, dr\theta \\
&= ۲\left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left[-(۴-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_۱^۲ \\
&= ۱۲\pi\sqrt{۳}
\end{aligned}$$

مثال ۵-٦-۳ فرض کنیم S بخشی از سطح بیضی‌گون $۴x^۲+۴y^۲+z^۲=۵$ باشد که در ناحیه‌ی $۱\leq z$ قرار دارد، $\mathbf{n}$ قائم یکه‌ی رو به بالای سطح S و $\mathbf{F}(x,y,z)=۲xyz\,\mathbf{i}+(z-y^۲z)\,\mathbf{j}+z^۲\,\mathbf{k}$. مطلوب است $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$.

فرض کنیم رویه‌ی S' بخشی از صفحه‌ی $z=۱$ محدود به بیضی‌گون $۴x^۲+۴y^۲+z^۲=۵$ و $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$ یکه‌ی نرمال پایینی آن باشد. در این صورت $S\cup S'$ یک رویه‌ی بسته و قطعه قطعه هموار است که $\mathbf{n}$ همه جا رو به خارج رویه است. پس به ازای $P=۲xyz$ ، $Q=z-y^۲z$ و $R=z^۲$ که مشتقات جزئی پیوسته دارند شرایط قضیه‌ی واگرایی برای ناحیه‌ی T شامل $S\cup S'$ و درون آن برقرار است. از سوی دیگر

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=۲z$$

$$\begin{aligned}
T &= \{(x,y,z) : ۰\leq x^۲+y^۲\leq ۱\,,\ ۱\leq z\leq\sqrt{۵-۴(x^۲+y^۲)} \\
&= \{(r,\theta,z) : ۰\leq r\leq ۱\,,\ ۰\leq\theta\leq ۲\pi\,,\ ۱\leq z\leq\sqrt{۵-۴r^۲}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S\cup S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_T ۲z\, dV \\
&= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\int_۱^{\sqrt{۵-۴r^۲}} ۲zr\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ r\sqrt{۴-۴r^۲}\, dr\, d\theta \\
&= \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left[-\frac{۱}{۱٦}(۴-۴r^۲)^۲\right]_۰^۱ = ۲\pi
\end{aligned}$$

همچنین برای S' که بخشی از صفحه‌ی $z = ۱$ است،

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{S'} (-z^{۲})\, d\sigma = -\iint_{S'} d\sigma = -\pi$$

زیرا $\iint_{S'} d\sigma$ مساحت دایره‌ی S' است. به این ترتیب

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{S' \cup S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = ۳\pi$$

مثال ۵–۶–۴ شار رو به بیرون نیروی

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(y^{۲} + z^{۲})\, \mathbf{i} + y(x^{۲} + z^{۲})\, \mathbf{j} + z(x^{۲} + y^{۲})\, \mathbf{k}$$

را که از کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = k^{۲}$ می‌گذرد به دست آورید.

کره‌ی S به معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = k^{۲}$ یک رویه‌ی بسته و هموار است که $\mathbf{n}$، بردار نرمال یکه‌ی آن همه جا رو به خارج رویه است. پس به ازای $P = x(y^{۲} + z^{۲})$ ، $Q = y(x^{۲} + z^{۲})$ و $R = z(x^{۲} + y^{۲})$ که مشتقات جزئی پیوسته دارند شرایط قضیه‌ی واگرایی برای ناحیه‌ی T شامل S و درون آن برقرار است. از سوی دیگر

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (y^{۲} + z^{۲}) + (x^{۲} + z^{۲}) + (x^{۲} + y^{۲}) = ۲(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$$

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y, z) \;:\; ۰ \le x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \le k^{۲}\} \\ &= \{(\rho, \theta, \varphi) \;:\; ۰ \le \rho \le k \,,\; ۰ \le \theta \le ۲\pi \,,\; ۰ \le \varphi \le \pi\} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \iiint_{T} \text{div } \mathbf{F}\, dV = \iiint_{T} ۲(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})\, dV \\ &= ۲ \int_{۰}^{\pi} \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{k} (\rho^{۲})(\rho^{۲} \sin\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\ &= ۲\left(\int_{۰}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right) \left(\int_{۰}^{۲\pi} d\theta\right) \left(\int_{۰}^{k} \rho^{۴}\, d\rho\right) = \frac{۸\pi k^{۵}}{۵} \end{aligned}$$

مثال ۵–۶–۵ شار میدان $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ گذرنده از رویه‌ی بسته‌ی S را محاسبه کنید به قسمی که S اجتماع قسمتی از استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۲$ است که به وسیله‌ی صفحات $z = \pm ۱$ محدود می‌شود همراه با قسمتی از صفحات $z = \pm ۱$ محدود به این استوانه. بردار $\mathbf{n}$ را همه جا یکه‌ی نرمال رو به خارج S (یعنی ناحیه‌ای که مبدأ را ندارد) در نظر بگیرید.

رویه‌ی S یک رویه‌ی بسته و قطعه‌ای هموار است که $\mathbf{n}$ همه جا رو به خارج رویه است. پس برای $P = x$ ، $Q = y$ و $R = z$ که مشتقات جزئی پیوسته دارند شرایط قضیه‌ی واگرایی برای ناحیه‌ی T شامل S و درون آن برقرار است. از سوی دیگر داریم:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$
$$T = \{(x, y, z) \ : \ ۰ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۲ \ , -۱ \leq z \leq ۱\}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iiint_T \text{div } \mathbf{F} \, dV \\ &= ۳ \iiint_T \, dV = ٦\pi \end{aligned}$$

آخرین قضیه‌ای که در این بخش مورد توجه قرار می‌دهیم قضیه‌ی استوکس است. فرض کنیم S رویه‌ای قطعه به قطعه هموار و جهت‌پذیر و C خم مرزی آن باشد. قضیه‌ی استوکس بیانگر این است که برای یک میدان برداری $\mathbf{F}$، تعریف شده در یک همسایگی رویه‌ی S و خم C، کار حاصل از این میدان روی خم بسته‌ی C برابر شار حاصل از میدان $\text{curl}\mathbf{F}$ است که از رویه‌ی S می‌گذرد. در اینجا جهت حرکت روی خم C و جهت قائم یکه بر قطعات هموار تشکیل دهنده‌ی S سازگار و بر مبنای قانون دست راست تعیین می‌گردند.

برای مشاهده‌ی طرحی از اثبات این ویژگی، فرض کنیم S قسمتی از رویه‌ای به معادله‌ی $z = f(x, y)$ با شرط $(x, y) \in D$ باشد که در آن D ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه‌ی xoy و f تابعی مشتق‌پذیر بر D است. همچنین فرض کنیم قائم یکه بر S در جهت مثبت محور z باشد. به این ترتیب، در هر نقطه‌ی دلخواه $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y)) \in S$ داریم

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^۲(x, y) + f_y^۲(x, y) + ۱}}$$

با توجه به این که برای دو میدان مشتق‌پذیر $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ داریم $\text{curl}(\mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲) = \text{curl}\mathbf{F}_۱ + \text{curl}\mathbf{F}_۲$، قضیه‌ی استوکس را برای سه میدان برداری $\mathbf{F}_۱ = P\mathbf{i}$، $\mathbf{F}_۲ = Q\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_۳ = R\mathbf{k}$ به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

برای میدان $\mathbf{F}_۱ = P\mathbf{i}$،

$$\text{curl}\mathbf{F}_۱ = \nabla \times (P\mathbf{i}) = det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{k}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{curl}\mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma &= -\iint_S \big(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\big)\frac{۱}{\sqrt{f_x^۲(x,y) + f_y^۲(x,y) + ۱}}\, d\sigma \\ &= \iint_D \big(\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,f(x,y))\big)\, dxdy \end{aligned}$$

فرض کنیم $C_۱$ خم مرزی ناحیه‌ی D توسط معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ با $t \in [a,b]$ بیان شده باشد. در این صورت خم C، مرز رویه‌ی S، دارای معادلات پارامتری $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = f(x(t), y(t))$ برای $t \in [a,b]$، خواهد بود. بنابر این

$$\int_C \mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{dr} = \int_a^b P\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big)x'(t)\, dt = \int_{C_۱} P\big(x,y,f(x,y)\big)dx$$

با استفاده از قضیه‌ی گرین، عبارت اخیر را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم.

$$\begin{aligned} \int_{C_۱} P\big(x,y,f(x,y)\big)dx &= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\Big(P\big(x,y,f(x,y)\big)\Big)dxdy \\ &= -\iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,f(x,y))\Big)\, dxdy \end{aligned}$$

پس

$$\iint_S (\text{curl}\mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \int_C \mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{dr}$$

برای میدان $\mathbf{F}_۲ = Q\mathbf{j}$، به شکل مشابه،

$$\iint_S (\text{curl}\mathbf{F}_۲ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_D \big(\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,f(x,y))\big)\, dxdy$$

همچنین

$$\int_C \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{dr} = \int_a^b Q\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) y'(t)\, dt = \int_{C_1} Q\big(x, y, f(x,y)\big)\, dy$$

مقدار انتگرال اخیر نیز با استفاده از قضیه‌ی گرین برابر خواهد بود با

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\Big(Q\big(x, y, f(x,y)\big)\Big)\, dxdy = \iint_D \big(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\big)\, dxdy$$

به این ترتیب تساوی مورد نظر برای میدان $\mathbf{F}_2$ نیز اثبات می‌شود. سرانجام برای میدان $\mathbf{F}_3 = R\mathbf{k}$ خواهیم داشت

$$\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_D \big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\big)\, dxdy$$

و

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{dr} &= \int_a^b R\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) z'(t)\, dt \\
&= \int_a^b R\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) \big(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)\big)\, dt \\
&= \int_{C_1} R\big(x, y, f(x,y)\big) \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + R\big(x, y, f(x,y)\big) \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \\
&= \iint_D \big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - R\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big) dxdy
\end{aligned}$$

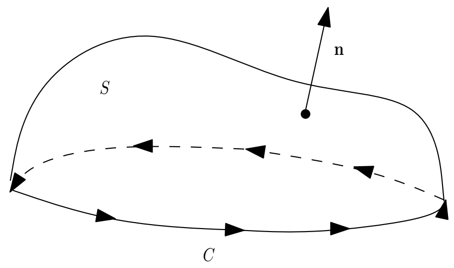
تساوی آخر با استفاده از قضیه‌ی گرین به دست آمده است. حال اگر برای تابع مشتق‌پذیر f داشته باشیم $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ آنگاه عبارت آخر به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\iint_D \big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\big)\, dxdy$$

که بنابر روابط فوق برابر همان $\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n})\, d\sigma$ است و در نتیجه این خاصیت برای میدان $\mathbf{F}_3$ نیز برقرار خواهد بود. به این ترتیب، قضیه‌ی استوکس برای میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ثابت می‌شود. همین استدلال برای رویه‌ی S به معادله‌ی $y = f(x,z)$، $(x,z) \in D$، و یا رویه به معادله‌ی $x = f(y,z)$، $(y,z) \in D$ نیز قابل بیان است. با کمی تغییر در استدلال، حالت کلی‌تر این قضیه با تقسیم رویه‌ی S به قطعات کوچکتر که در یکی از خاصیت‌های فوق صدق کنند و بدون شرط اضافی برای تابع f قابل اثبات است. بنابر آنچه گفته شد قضیه استوکس به شکل زیر مطرح می‌شود.

قضیه ۵–۶–۶ (**استوکس**) فرض کنیم S رویه‌ای قطعه قطعه هموار در $\mathbb{R}^۳$ باشد که مرز آن خم قطعه قطعه هموار و بسته‌ی C است. همچنین فرض کنیم همه‌ی مولفه‌های تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ روی S دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. در این صورت اگر C در جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ ، بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای S پیموده شود (شکل ۵–۱۹)، (یعنی اگر ناظری در آن جهت روی C حرکت کند S را سمت چپ خود ببیند) آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$



شکل ۵–۱۹ شار گذرنده‌ی F از S برابر کار F روی مرز S است.

مثال ۵–۶–۷ قضیه‌ی استوکس را برای $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + x^۳y^۲\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$ و S نیمه‌ی بالایی بیضی‌گون $۴x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ تحقیق کنید.

نیمه‌ی بالایی بیضی‌گون S به معادله‌ی $۴x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ یک رویه‌ی هموار و مرز S بیضی C به معادله‌ی $۴x^۲ + y^۲ = ۴$ است. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج رویه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P = ۱$ ، $Q = x^۳y^۲$ و $R = z$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. همچنین رویه‌ی S نمودار تابع $z = \sqrt{۴ - y^۲ - ۴x^۲}$ روی ناحیه‌ی $D = \{(x,y)\ :\ ۰ \le ۴x^۲ + y^۲ \le ۴\}$ است. پس $D = \{(x,y)\ :\ -۱ \le x \le ۱\ ,\ -۲\sqrt{۱ - x^۲} \le y \le ۲\sqrt{۱ - x^۲}\}$. خم C را می‌توان به صورت $x = \cos t$ و $y = ۲\sin t$ روی $[۰, ۲\pi]$ پارامتریزه کرد. از سوی دیگر

$$\operatorname{curl}\ \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۱ & x^۳y^۲ & z \end{vmatrix} = ۳x^۲y^۲\ \mathbf{k}\ \ ,\ \ \mathbf{N} = -z_x\ \mathbf{i} - z_y\ \mathbf{j} + \ \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \iint_D \operatorname{curl}\ \mathbf{F}\cdot(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA \\ &= \iint_D \operatorname{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dA = \iint_D ۳x^۲y^۳\ dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{1}\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 3x^2y^2\ dy\ dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^2[y^3]_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ &= 16\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ dx \\ &= 32\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin^2 t\ dt = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r} &= \int_C P\ dx\ + Q\ dy + R\ dz \\ &= \int_C dx\ + x^3y^2\ dy + z\ dz \\ &= \int_0^{2\pi}(-\sin t + 8\cos^4 t\sin^2 t)\ dt \\ &= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin^2 t\ dt = \pi \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

مثال ۵–٦–۸ خم C از تلاقی نیم‌کره‌ی بالایی کره‌ی $x^2+y^2+z^2 = 4z$ و استوانه‌ی $x^2+y^2 = 2y$ حاصل شده است. مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r}$ برای $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + (3y+x^2)\ \mathbf{j} + 4z\ \mathbf{k}$.

نیمه‌ی بالایی کره‌ی S به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2 = 4z$ یک رویه‌ی هموار است که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C می‌باشد. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج رویه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P = 2x$ ، $Q = 3y+x^2$ و $R = 4z$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این شرایط قضیه‌ی استوکس برای S و مرز آن C برقرار است. رویه‌ی S نمودار تابع $z = 2+\sqrt{4-x^2-y^2}$ است روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^2+y^2 = 2y$. معادله‌ی دایره‌ی $x^2+y^2 = 2y$ در مختصات قطبی عبارت است از $r^2 = 2r\sin\theta$ یعنی $r = 2\sin\theta$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از:

$$D = \{(r,\theta)\ :\ 0\le r\le 2\sin\theta, 0\le\theta\le\pi\}$$

از سوی دیگر

$$\text{curl }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۲x & ۳y + x^۲ & ۴z \end{vmatrix} = ۲x\ \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{N} = -z_x\ \mathbf{i} - z_y\ \mathbf{j} + \ \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r} &= \iint_S \text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = \iint_D \text{curl }\mathbf{F}\cdot(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA \\ &= \iint_D \text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dA = \iint_D ۲x\ dA \\ &= \int_۰^\pi \int_۰^{۲\sin\theta} ۲r\cos\theta r\ dr\ d\theta \\ &= \int_۰^\pi [\frac{۲}{۳}r^۳]_۰^{۲\sin\theta}\cos\theta\ d\theta \\ &= \frac{۱۶}{۳}\int_۰^\pi \cos t\sin^۳ t\ dt = \frac{۴}{۳}[\sin^۴ t]_۰^\pi = ۰ \end{aligned}$$

مثال ۵–۶–۹ خم C از تلاقی صفحه‌ی $۲x + ۲y + z = ۶$ و صفحه‌های xoy، xoz و zoy حاصل شده است. برای $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^۲\mathbf{i} + z\ \mathbf{j} + x\ \mathbf{k}$ مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

صفحه‌ی $۲x + ۲y + z = ۶$ یک رویه‌ی هموار است که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C است. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج صفحه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P = -y^۲$ ، $Q = z$ و $R = x$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این شرایط قضیه‌ی استوکس برای S و مرز آن C برقرار است. صفحه‌ی S نمودار تابع $z = ۶ - ۲x - ۲y$ است روی ناحیه‌ی D محدود به مثلث $۲x + ۲y = ۶$ ، یعنی $D = \{(x,y)\ :\ ۰ \le x \le ۳\ ,\ ۰ \le y \le ۳ - x\}$.

از سوی دیگر

$$\text{curl }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^۲ & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲y\,\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{N} = -z_x\,\mathbf{i}-z_y\,\mathbf{j}+\mathbf{k} = ۲\,\mathbf{i}+۲\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = \iint_D \text{curl }\mathbf{F}\cdot(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA \\ &= \iint_D \text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dA = \iint_D (۲y - ۴)\ dA \\ &= \int_۰^۳ \int_۰^{۳-y} (۲y - ۴)\ dy\ dx = \int_۰^۳ (-۲y^۲ + ۱۰y - ۱۲)\ dy = -۹ \end{aligned}$$

مثال ۵-۶-۱۰ خم C از تلاقی صفحه‌ی $x+y+z=1$ و سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ حاصل شده است. برای $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}-z\,\mathbf{k}$ مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

بخشی از صفحه‌ی $x+y+z=1$ که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C می‌باشد یک رویه‌ی هموار است. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج صفحه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P=-y$ ، $Q=x$ و $R=-z$ مشتقات جزئی پیوسته دارند.

بنابر این شرایط قضیه‌ی استوکس برای S و مرز آن C برقرار است. بخشی از صفحه‌ی $x+y+z=1$ که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C می‌باشد نمودار تابع $z=1-x-y$ است.

برای به دست آوردن ناحیه‌ی D ، از معادلات $x+y+z=1$ و $z=x^2+y^2$ داریم $1-x-y=x^2+y^2$ یعنی $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$.

پس ناحیه‌ی D عبارت است از درون و روی دایره‌ی $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$.

از سوی دیگر

$$\text{curl }\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y&x&-z\end{vmatrix}=2\,\mathbf{k}\quad,\quad \mathbf{N}=-z_x\,\mathbf{i}-z_y\,\mathbf{j}+\,\mathbf{k}=\mathbf{i}+\,\mathbf{j}+\,\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S \text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA\\ &= 2\iint_D dA=2(\frac{3}{2}\pi)=3\pi\end{aligned}$$

قضیه‌ی استوکس به عنوان تعمیم دیگری از قضیه‌ی گرین

فرض کنیم C یک خم مسطح، بسته و قطعه قطعه هموار باشد. رویه‌ی S را بخشی از صفحه‌ی محدود به C و ناحیه‌ی D را درون C در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم توابع P و Q مولفه‌های میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\,\mathbf{i}+Q(x,y)\,\mathbf{j}=P(x,y)\,\mathbf{i}+Q(x,y)\,\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ روی D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. در این صورت:

$$\text{curl }\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&0\end{vmatrix}=-\frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathbf{i}+\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathbf{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,\mathbf{k}$$

و طبق قضیه‌ی گرین داریم

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\ dA\\ &= \int\int_S \text{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{n}=\mathbf{k}$. به عبارت دیگر می‌توان قضیه‌ی استوکس را تعمیم دیگری برای قضیه‌ی گرین در فضای $\mathbb{R}^۳$ در نظر گرفت.

تعریف معادل و تعبیر فیزیکی دیورژانس

فرض کنیم T_ρ کره‌ی به شعاع ρ و مرکز $P=(x,y,z)$ ، S_ρ سطح این کره و $\mathbf{n}$ بردار یکه‌ی نرمال رو به خارج S_ρ باشد. همچنین فرض کنیم همه‌ی مولفه‌های تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\ \mathbf{i}+Q(x,y,z)\ \mathbf{j}+R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ روی S_ρ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. شعاع این کره عبارت است از $V(T_\rho)=\frac{۴}{۳}\pi\rho^۳$. بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین در مورد انتگرال‌های سه‌گانه، برای تابع پیوسته‌ی $\text{div}\ \mathbf{F}$ یک $(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\in T_\rho$ وجود دارد به قسمی که

$$\begin{aligned}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \int\int\int_{T_\rho}\text{div}\ \mathbf{F}\ dV\\ &= \text{div}\ \mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\int\int\int_{T_\rho}\ dV\\ &= \text{div}\ \mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)V(T_\rho)\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\text{div}\ \mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)=\frac{۱}{V(T_\rho)}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

باحدگیری از دو طرف تساوی فوق داریم

$$\text{div}\ \mathbf{F}(x,y,z)=\lim_{\rho\to ۰}\text{div}\ \mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)=\lim_{\rho\to ۰}\frac{۱}{V(T_\rho)}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

که به تعریف دیگری برای $\text{div}\ F$ به صورت زیر منجر می‌شود.

$$\text{div}\ \mathbf{F}(x,y,z)=\lim_{\rho\to ۰}\frac{۱}{V(T_\rho)}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

با این رابطه به درک عمیق‌تری از مفهوم $\text{div}\ \mathbf{F}$ دست می‌یابیم.

اگر $\mathbf{F}$ شار سرعت یک سیال باشد ، در حالتی که $\text{div } \mathbf{F} = 0$، شار وارد شده به هر گوی بسته با شار خارج شده از آن برابر است. به عبارت دیگر سیال **تراکم ناپذیر** است.

در حالتی که $\text{div } \mathbf{F}(P) > 0$، شار وارد شده به گویی حاوی P از شار خارج شده از آن کمتر است. به عبارت دیگر سیال در P **چشمه (منبع)** دارد. در این حالت سیال در P به سمت خارج واگرایی مثبت دارد.

و سر انجام در حالتی که $\text{div } \mathbf{F}(P) < 0$، شار وارد شده به گویی حاوی P از شار خارج شده از آن بیشتر است. به عبارت دیگر سیال در P **چاله** دارد. در این حالت سیال در P به سمت خارج واگرایی منفی دارد ، یعنی به سمت داخل همگرایی دارد.

تعریف معادل و تعبیر فیزیکی کرل

حال فرض کنیم S_ρ قرص به شعاع ρ و مرکز $P = (x, y, z)$ ، C_ρ دایره‌ی مرزی این قرص با جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ ، بردار یکه‌ی نرمال S_ρ باشد. همچنین فرض کنیم همه‌ی مولفه‌های تابع برداری $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\ \mathbf{i} + Q(x, y, z)\ \mathbf{j} + R(x, y, z)\ \mathbf{k}$ روی S_ρ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. مساحت قرص S_ρ عبارت است از $A(S_\rho) = 4\pi\rho^2$. بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین در مورد انتگرال‌های دوگانه، برای تابع پیوسته‌ی $\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ یک $(x_\rho, y_\rho, z_\rho) \in S_\rho$ وجود دارد به قسمی که

$$\begin{aligned}
\int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_\rho} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma \\
&= (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho) \iint_{S_\rho} d\sigma \\
&= (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho)\ A(S_\rho)
\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho) = \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

باحدگیری از دو طرف تساوی فوق داریم

$$(\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x, y, z) = \lim_{\rho \to 0} (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

که به تعریف دیگری برای $\text{curl } \mathbf{F}$ به صورت زیر منجر می‌شود.

$$(\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x, y, z) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

با این رابطه نیز به درک عمیق‌تری از مفهوم $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ دست می‌یابیم.

اگر $\mathbf{F}$ شار سرعت یک سیال باشد، در حالتی که $\mathbf{F}$ هیچ مولفه‌ای هم راستا با بردار مماس بر C_ρ نداشته باشد $\int_{C_\rho}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ و در نتیجه $\operatorname{curl}\mathbf{F}=\mathbf{0}$. در این حالت از $\int_{C_\rho}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ (معادل آن $\operatorname{curl}\mathbf{F}=\mathbf{0}$) نتیجه می‌شود که سیال حول محور $\mathbf{n}$ روی C_ρ پیچش ندارد.

در حالتی که $\mathbf{F}$ مولفه‌ای هم‌جهت با بردار مماس بر C_ρ داشته باشد، $\int_{C_\rho}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}>0$ و در نتیجه $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}>0$. در این حالت از $\int_{C_\rho}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}>0$ (معادل آن $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}>0$) نتیجه می‌شود که سیال حول محور $\mathbf{n}$ روی C_ρ و در جهت آن پیچش دارد.

در حالت سوم که $\mathbf{F}$ مولفه‌ای در خلاف جهت بردار مماس بر C_ρ داشته باشد، $\int_{C_\rho}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}<0$ و در نتیجه $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}<0$. در این حالت از $\int_{C_\rho}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}<0$ (معادل آن $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}<0$) نتیجه می‌شود که سیال حول محور $\mathbf{n}$ روی C_ρ و در خلاف جهت آن پیچش دارد.

۵–۷ عملگرهای برداری دردستگاه‌های مختصاتی غیر دکارتی

پیش از این مشاهده کردیم که هر سه بردار مستقل خطی در فضای $\mathbb{R}^3$ تشکیل یک پایه برای این فضا می‌دهند. یعنی هر بردار دلخواه در این فضا را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی این سه بردار بیان کنیم. در دستگاه مختصات دکارتی سه بردار یکه و متعامد $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ پایه‌ی استاندارد فضای $\mathbb{R}^3$ است. دراین بخش ابتدا به معرفی سه بردار یکه و متعامد مناسب برای دستگاه مختصات کروی می‌پردازیم.

بردار موضع نقطه‌ای مانند (x,y,z) در دستگاه دکارتی بر حسب متغیرهای ρ، ϕ و θ به شکل زیر قابل بیان است.

$$r(\rho,\phi,\theta)=x(\rho,\phi,\theta)i+y(\rho,\phi,\theta)j+z(\rho,\phi,\theta)k$$

اگر دو مولفه‌ی ϕ و θ را ثابت نگه داریم آنگاه تابع برداری $\mathbf{r}$ بر حست متغیر ρ خمی را در فضا مشخص می‌کند. بردار مماس یکه بر این خم در هر نقطه را با نماد $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب، با ثابت نگه داشتن متغیرهای ρ و θ و تغییر ϕ، بردار $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ را بردار مماس یکه بر خم حاصل در هر نقطه از آن تعریف می‌کنیم. بردار $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ به نحو مشابه تعریف

می‌شود. به این ترتیب، با توجه به روابط

$$x(\rho,\phi,\theta)=\rho\sin\phi\cos\theta \quad , \quad y(\rho,\phi,\theta)=\rho\sin\phi\sin\theta \quad , \quad z(\rho,\phi,\theta)=\rho\cos\phi$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_\rho &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}}{\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\|}=\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j}+\cos\phi\,\mathbf{k}\\
\hat{\mathbf{e}}_\phi &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\|}=\cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i}+\cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j}-\sin\phi\,\mathbf{k}\\
\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\|}=-\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

که با استفاده از نماد ماتریسی معادل است با

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{e}}_\rho\\ \hat{\mathbf{e}}_\phi\\ \hat{\mathbf{e}}_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

با توجه به معادلات فوق مشاهده می‌شود که سه بردار $\hat{\mathbf{e}}_\rho$، $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ دو به دو بر هم عمود هستند و در نتیجه در هر نقطه‌ی (ρ,ϕ,θ) از فضا، این سه بردار تشکیل یک دستگاه متعامد یکه در آن نقطه می‌دهند. بنابر این، هر بردار در فضا را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی از این سه بردار بیان کنیم.

در این بخش به محاسبه‌ی ∇f، $\mathrm{div}\mathbf{F}$ و $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ در سیستم مختصات کروی می‌پردازیم. توجه می کنیم که اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ در ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ تعریف باشد آنگاه در سیستم مختصات کروی این میدان به صورت

$$\mathbf{F}=F_\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho+F_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi+F_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

نمایش داده می‌شود که در آن F_ρ، F_ϕ و F_θ مولفه‌های میدان در امتداد بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\rho$، $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ و در حالت کلی، توابعی بر حسب متغیرهای کروی هستند.

در ادامه، فرض می‌کنیم f تابع اسکالری است که در ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ تعریف شده باشد. بردار گرادیان این تابع را در سیستم مختصات کروی به دست می‌آوریم. در

سیستم مختصات دکارتی داریم:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

فرض کنیم g مقدار تابع f را در هر نقطه در سیستم مختصات کروی نشان دهد. به عبارت دیگر،

$$g(\rho,\phi,\theta) = f\big(x(\rho,\phi,\theta), y(\rho,\phi,\theta), z(\rho,\phi,\theta)\big)$$

برای این که گرادیان g را در سیستم مختصات کروی به دست آوریم ابتدا سه بردار $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ را در هر نقطه بر حسب بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\rho$، $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ بیان می‌کنیم. در دستگاه (۳)، اگر ماتریس ضرایب را با A نمایش دهیم آنگاه $\det(A) = ۱$ و از آنجا

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\phi & -\sin\phi & ۰ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \sin\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \cos\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \mathbf{j} &= \sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \mathbf{k} &= \cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\rho - \sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned}$$

از طرف دیگر، با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که در سیستم مختصات کروی،

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \sin\phi\cos\theta & , \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\phi\sin\theta & , \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial z} = \cos\phi \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{۱}{\rho}\cos\phi\cos\theta & , \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{۱}{\rho}\cos\phi\sin\theta & , \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = -\dfrac{۱}{\rho}\sin\phi \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho\sin\phi} & , \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho\sin\phi} & , \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = ۰ \end{array}$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ و ساده کردن این عبارت‌ها، بردار ∇f، یا در واقع ∇g، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial \rho}\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \phi}\,\hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{۱}{\rho \sin\phi}\frac{\partial g}{\partial \theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

گرادیان یک تابع مشتق‌پذیر در سیستم مختصات کروی را می‌توانیم به روشی دیگر و با استفاده از رابطه‌ی $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$، که در آن $\mathbf{u}$ برداری یکه است، نیز به دست آوریم. توجه می‌کنیم که رابطه‌ی فوق را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم.

$$D_{\mathbf{u}}f = \Big((\nabla f)_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + (\nabla f)_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + (\nabla f)_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta\Big) \cdot \mathbf{u}$$

اکنون اگر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ را به ترتیب بردارهای پایه‌ی سیستم مختصات کروی انتخاب کنیم آنگاه مولفه‌های بردار ∇f در این سیستم مختصات به دست می‌آیند. به این ترتیب،

$$\nabla f = (D_{\hat{\mathbf{e}}_\rho} f)\hat{\mathbf{e}}_\rho + (D_{\hat{\mathbf{e}}_\phi} f)\hat{\mathbf{e}}_\phi + (D_{\hat{\mathbf{e}}_\theta} f)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

انجام جزئیات این روش را به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

عملگر بعدی که بررسی می‌کنیم عملگر واگرایی است. فرض کنیم میدان برداری $\mathbf{F}$ به صورت $\mathbf{F} = F_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + F_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + F_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$ داده شده باشدکه مولفه‌های آن مشتقات جزئی پیوسته دارند. برای محاسبه‌ی واگرایی میدان $\mathbf{F}$ در $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^۳$ از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \to ۰} \frac{۱}{\Delta V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

که در آن S رویه‌ای بسته و کراندار و نقطه‌ی $\mathbf{x}$ درون آن واقع است. در اینجا ΔV حجم ناحیه‌ی محصور توسط این رویه است. فرض کنیم مختصات کروی نقطه‌ی $\mathbf{x}$ برابر $(\rho_۰, \phi_۰, \theta_۰)$ و D ناحیه‌ی شامل نقاط (ρ, ϕ, θ) باشد که $\rho \in [\rho_۰ - \frac{\Delta\rho}{۲}, \rho_۰ + \frac{\Delta\rho}{۲}]$، $\phi \in [\phi_۰ - \frac{\Delta\phi}{۲}, \phi_۰ + \frac{\Delta\phi}{۲}]$ و $\theta \in [\theta_۰ - \frac{\Delta\theta}{۲}, \theta_۰ + \frac{\Delta\theta}{۲}]$. در این صورت، حجم این ناحیه برابر است با

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \int_{\theta_۰ - \frac{\Delta\theta}{۲}}^{\theta_۰ + \frac{\Delta\theta}{۲}} \int_{\phi_۰ - \frac{\Delta\phi}{۲}}^{\phi_۰ + \frac{\Delta\phi}{۲}} \int_{\rho_۰ - \frac{\Delta\rho}{۲}}^{\rho_۰ + \frac{\Delta\rho}{۲}} \rho^۲ \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{۱}{۳}\big((\rho_۰ + \frac{\Delta\rho}{۲})^۳ - (\rho_۰ - \frac{\Delta\rho}{۲})^۳\big)\big(\cos(\phi_۰ - \frac{\Delta\phi}{۲}) - \cos(\phi_۰ + \frac{\Delta\phi}{۲})\big)\Delta\theta
\end{aligned}$$

اگر S رویه‌ی کل پوشاننده ناحیه‌ی D باشد آنگاه این رویه قابل تقسیم به ۶ رویه‌ی $S_۱$ و $S_۲$، به ترتیب نظیر $\rho = \rho_\circ + \frac{\Delta\rho}{۲}$ و $\rho = \rho_\circ - \frac{\Delta\rho}{۲}$، رویه‌های $S_۳$ و $S_۴$، متناظر $\phi = \phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲}$ و $\phi = \phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲}$ و رویه‌های $S_۵$ و $S_۶$ متناظر $\theta = \theta_\circ + \frac{\Delta\theta}{۲}$ و $\theta = \theta_\circ - \frac{\Delta\theta}{۲}$ است. برای مقادیر کوچک $\Delta\rho$، $\Delta\phi$ و $\Delta\theta$، بردارهای نرمال رویه‌های $S_۱$ و $S_۲$، به ترتیب $\hat{\mathbf{e}}_\rho(\mathbf{x})$ و $-\hat{\mathbf{e}}_\rho(\mathbf{x})$، بردارهای نرمال رویه‌های $S_۳$ و $S_۴$ برابر $\hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x})$ و $-\hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x})$ و برای دو رویه‌ی $S_۵$ و $S_۶$ بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})$ و $-\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})$، و مقدار ΔV نیز تقریبا برابر $\rho_\circ^۲ \sin\phi_\circ \Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta$ خواهد بود. برای میدان برداری $\mathbf{F} = F_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + F_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + F_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$ و بردارهای $\Delta\mathbf{h} = (\Delta\rho, \Delta\phi, \Delta\theta)$ و $\mathbf{0} = (\circ, \circ, \circ)$ داریم

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{۱}{\Delta V} \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma \approx \\
&\lim_{\Delta\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{۱}{\rho_\circ^۲ \sin\phi_\circ \Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta}\Big[\Big(F_\rho\big(\rho_\circ+\frac{\Delta\rho}{۲},\phi_\circ,\theta_\circ\big)\Delta\sigma_۱ - F_\rho\big(\rho_\circ-\frac{\Delta\rho}{۲},\phi_\circ,\theta_\circ\big)\Delta\sigma_۲\Big) \\
&\quad + \Big(F_\phi\big(\rho_\circ,\phi_\circ+\frac{\Delta\phi}{۲},\theta_\circ\big)\Delta\sigma_۳ - F_\phi\big(\rho_\circ,\phi_\circ-\frac{\Delta\phi}{۲},\theta_\circ\big)\Delta\sigma_۴\Big) \\
&\quad + \Big(F_\theta\big(\rho_\circ,\phi_\circ,\theta_\circ+\frac{\Delta\theta}{۲}\big)\Delta\sigma_۵ - F_\theta\big(\rho_\circ,\phi_\circ,\theta_\circ-\frac{\Delta\theta}{۲}\big)\Delta\sigma_۶\Big)\Big]
\end{aligned}$$

که در آن $\Delta\sigma_i$ مساحت رویه‌ی S_i است. به این ترتیب، با استفاده از تقریب‌های

$$\begin{aligned}
&\Delta\sigma_۱ \approx (\rho_\circ + \frac{\Delta\rho}{۲})^۲ \sin\phi_\circ \Delta\phi\Delta\theta \quad , \quad \Delta\sigma_۲ \approx (\rho_\circ - \frac{\Delta\rho}{۲})^۲ \sin\phi_\circ \Delta\phi\Delta\theta \\
&\Delta\sigma_۳ \approx \rho_\circ \sin(\phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲})\Delta\rho\Delta\theta \quad , \quad \Delta\sigma_۴ \approx \rho_\circ \sin(\phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲})\Delta\rho\Delta\theta \\
&\Delta\sigma_۵ \approx \rho_\circ \Delta\rho\Delta\phi \quad , \quad \Delta\sigma_۶ \approx \rho_\circ \Delta\rho\Delta\phi
\end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{۱}{\rho_\circ}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^۲ F_\rho)(\mathbf{x}) + \frac{۱}{\rho_\circ \sin\phi_\circ}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi F_\phi)(\mathbf{x}) + \frac{۱}{\rho_\circ \sin\phi_\circ}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}(\mathbf{x})$$

آخرین عملگری که بررسی می‌کنیم عملگر curl است. فرض کنیم مولفه‌های میدان $\mathbf{F} = F_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + F_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + F_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. در این صورت، با استفاده از قضیه‌ی استوکس برای رویه‌ی کراندار S با خم مرزی C،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

که در آن $\mathbf{n}$ قائم یکه بر رویه‌ی S است. برای نقطه‌ی $\mathbf{x}$ در فضا به مختصات کروی $(\rho_\circ, \phi_\circ, \theta_\circ)$، فرض کنیم S رویه‌ی زیر باشد.

$$S = \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho = \rho_\circ \ , \ \phi \in [\phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲}, \phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲}] \ , \ \theta \in [\theta_\circ - \frac{\Delta\theta}{۲}, \theta_\circ + \frac{\Delta\theta}{۲}]\}$$

در این صورت، برای مقادیر کوچک $\Delta\phi$ و $\Delta\theta$، بردار قائم یکه در نقاط مختلف S تقریبا برابر $\hat{\mathbf{e}}_\rho(\mathbf{x})$ است. در نتیجه

$$\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \approx (\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x})\Delta\sigma$$

که در آن $(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x})$ مولفه‌ی میدان $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ در امتداد بردار $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ و $\Delta\sigma$ مساحت رویه‌ی S است. مساحت این رویه قابل تقریب با مساحت مستطیلی به اضلاع $\rho_\circ \sin\phi_\circ \Delta\theta$ و $\rho_\circ \Delta\phi$ و بنابر این تقریبا برابر $\rho_\circ^۲ \sin\phi_\circ \Delta\phi\Delta\theta$ است. به این ترتیب

$$(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x}) = \lim_{(\Delta\phi,\Delta\theta)\to(\circ,\circ)} \frac{۱}{\rho_\circ^۲ \sin\phi_\circ \Delta\phi\Delta\theta} \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (۴)$$

که در آن C خم مرزی رویه‌ی S است. با توجه به این که این خم اجتماع چهار خم به صورت زیر است،

$$\begin{aligned}
C_۱ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ \ , \ \phi \in [\phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲}, \phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲}] \ , \ \theta = \theta_\circ - \frac{\Delta\theta}{۲}\} \\
C_۲ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ \ , \ \phi \in [\phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲}, \phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲}] \ , \ \theta = \theta_\circ + \frac{\Delta\theta}{۲}\} \\
C_۳ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ \ , \ \phi = \phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲} \ , \ \theta \in [\theta_\circ - \frac{\Delta\theta}{۲}, \theta_\circ + \frac{\Delta\theta}{۲}]\} \\
C_۴ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ \ , \ \phi = \phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲} \ , \ \theta \in [\theta_\circ - \frac{\Delta\theta}{۲}, \theta_\circ + \frac{\Delta\theta}{۲}]\}
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \approx & \Big(\mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ,\theta_\circ - \frac{\Delta\theta}{۲})\cdot\Delta\mathbf{r}_۱ + \mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ,\theta_\circ + \frac{\Delta\theta}{۲})\cdot\Delta\mathbf{r}_۲\Big) \\
& + \Big(\mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲},\theta_\circ)\cdot\Delta\mathbf{r}_۳ + \mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲},\theta_\circ)\cdot\Delta\mathbf{r}_۴\Big) \quad (۵)
\end{aligned}$$

که در آن $\Delta\mathbf{r}_i$ بردار جابجایی در امتداد خم C_i است. از روابط (۴) و (۵) و تقریب‌های

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{r}_۱ \approx \rho_\circ\Delta\phi\ \hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x}p) &,\quad& \Delta\mathbf{r}_۲ \approx -\rho_\circ\Delta\phi\ \hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x}) \\
&\Delta\mathbf{r}_۳ \approx \rho_\circ \sin(\phi_\circ + \frac{\Delta\phi}{۲})\Delta\theta\ \hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x}) &,\quad& \Delta\mathbf{r}_۴ \approx -\rho_\circ \sin(\phi_\circ - \frac{\Delta\phi}{۲})\Delta\theta\ \hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

داریم

$$(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x}) = \frac{۱}{\rho_\circ \sin\phi_\circ}\Big(\frac{\partial}{\partial\phi}\big(\sin(\phi)F_\theta\big)(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}(\mathbf{x})\Big)$$

با روشی مشابه، می‌توانیم مولفه‌های میدان $\mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ در امتداد بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x})$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})$ را به صورت زیر به دست آوریم.

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\rho_\circ \sin\phi_\circ}\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\rho_\circ}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\theta)(\mathbf{x})\\ (\mathrm{curl}\mathbf{F})_\theta(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\rho_\circ}\Big(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\phi)(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}(\mathbf{x})\Big)\end{aligned}$$

به شکل مشابه بردار موضع نقطه‌ای مانند (x,y,z) در دستگاه دکارتی را می‌توان بر حسب متغیرهای r، θ و z به صورت $r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بیان کرد. در این صورت بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{e}}_r$، $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ و $\hat{\mathbf{e}}_z$ همانند دستگاه مختصات کروی قابل تعریف هستند. فرمول‌های زیر برای عملگرهای ∇، div و curl برای توابعی که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{F}_r) + \frac{\partial\mathbf{F}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\mathbf{F}_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{F}_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\mathbf{F}_\theta}{\partial z}\Big)\hat{\mathbf{e}}_r + \Big(\frac{\partial\mathbf{F}_r}{\partial z} - \frac{\partial\mathbf{F}_z}{\partial r}\Big)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{F}_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{F}_r}{\partial\theta}\Big)\hat{\mathbf{e}}_z$$

در پایان این فصل، به عنوان مثال، کاربرد آنالیز برداری برای حل دو مساله‌ی فیزیک کلاسیک بیان شده است.

۱) نشان می‌دهیم میدان نیروی جاذبه‌ی جسمی به جرم M یک میدان گرادیان است.
بنابر قانون نیوتن، برای $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r = ||\mathbf{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$، میدان نیروی جاذبه‌ی جسمی به جرم M به ازای یک عدد ثابت $G_\circ$ عبارت است از:

$$\mathbf{G} = -\frac{G_\circ M}{r^3}\mathbf{r}$$

از سوی دیگر $\mathbf{G} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ یک میدان گرادیان است اگر و تنها اگر $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ و $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$، $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ که معادل است با $\mathrm{curl}\mathbf{G} = \mathbf{0}$. محاسبه‌ی مستقیم $\mathrm{curl}\mathbf{G}$ کمی دشوار است.

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{G_\circ Mx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{G_\circ My}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{G_\circ Mz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{vmatrix}$$

اما اگر از ویژگی‌های عملگر کرل استفاده کنیم زودتر به نتیجه می‌رسیم. یادآوری می‌کنیم که برای تابع اسکالر f و تابع برداری $\mathbf{F}$، همواره داریم $\mathrm{curl}\ (f\mathbf{F}) = f\ \mathrm{curl}\ \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$. به ویژه برای $f = \frac{۱}{r^۳}$ و $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ می‌توان نوشت:

$$\mathrm{curl}\ (\mathbf{G}) = -G_\circ M\ \mathrm{curl}\ (f\mathbf{F}) = -G_\circ M\big[\big(\frac{۱}{r^۳}\ \mathrm{curl}\ \mathbf{r}\big) + \big(\nabla(\frac{۱}{r^۳}) \times \mathbf{r}\big)\big]$$

از سوی دیگر

$$\nabla(\frac{۱}{r^۳}) = \big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{۱}{r^۳})\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{۱}{r^۳})\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}(\frac{۱}{r^۳})\big) = (\frac{-۳x}{r^۵}, \frac{-۳y}{r^۵}, \frac{-۳z}{r^۵}) = -\frac{۳}{r^۵}\ \mathbf{r}$$

بنابر این $\nabla(\frac{۱}{r^۳}) \times \mathbf{r} = -\frac{۳}{r^۵}\ (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. با توجه به این که

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

نتیجه می‌شود $\mathrm{curl}\mathbf{G} = \mathbf{0}$.

۲) فرض کنیم T ناحیه‌ای بسته و کرانداری از $\mathbb{R}^۳$ باشد که مبدأ را در بر دارد. به علاوه سطح خارجی T یک رویه‌ی قطعه به قطعه هموار S است که شامل مبدأ نیست. نشان می‌دهیم برای میدان برداری $\mathbf{G} = \frac{۱}{r^۳}\mathbf{r}$ که $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r = ||\mathbf{r}|| = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ همواره $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma = ۰$.

بنابر قضیه‌ی دیورژانس $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma = \int\int\int_T \nabla \cdot \mathbf{F}\ dV$. با توجه به

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}) \\ &= \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}}{x^۲ + y^۲ + z^۲} + \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} - \frac{y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}}{x^۲ + y^۲ + z^۲} + \\ &\quad \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} - \frac{z^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}}{x^۲ + y^۲ + z^۲} = \frac{x^۲ + y^۲ + z^۲ - x^۲ - y^۲ - z^۲}{(x^۲ + y^۲ + z^۲)\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} = ۰ \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma = \int\int\int_T \nabla \cdot \mathbf{F}\ dV = ۰$.

نتیجه‌ی فیزیکی: بنا بر قوانین فیزیک کلاسیک، میدان برداری حاصل از یک بار الکتریکی Q عبارت است از $\mathbf{F} = \frac{Q}{۴\pi}\ \frac{\mathbf{r}}{r^۳}$. بر اساس مثال فوق اگر یک سطح بسته حاوی این بار نباشد آنگاه شار گذرنده از این سطح برابر صفر است.

تمرین‌های فصل پنجم

۱) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_۱} \frac{ds}{x-y}$ ب) $\int_{C_۲} \frac{y}{\sqrt{x}} ds$

که $C_۱$ پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $P = (۰, -۳)$، $Q = (۶, ۰)$ و معادلات پارامتری $C_۲$ عبارتند از $x = ۳t^۲$ و $y = ۲t^۳$ به ازای $۱ \leq t \leq ۲$.

۲) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_۱} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^۲ + y^۲}$

ب) $\int_{C_۲} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$

ج) $\int_{C_۳} \frac{xdy - ydx}{x^۲ + xy + y^۲}$

که $C_۱$ دارای معادلات پارامتری $x = ۲\cos t$، $y = ۲\sin t$ به ازای $۰ \leq t \leq \pi$، $C_۲$ مربعی با رئوس $(۱, ۰)$، $(۰, ۱)$، $(-۱, ۰)$، $(۰, -۱)$ (در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و $C_۳$ دایره‌ای به معادلات پارامتری $x = a\cos t$، $y = a\sin t$ $(a > ۰)$ به ازای $۰ \leq t \leq ۲\pi$ است.

۳) C خم بسته‌ی همواری است که نسبت به مبدا متقارن است. ثابت کنید

$$\int_C (yx^۳ + e^y)dx + (xy^۳ + xe^y - ۲y)dy = ۰$$

۴) به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال

$$\int_C (-x^۲y)dx + (xy^۲)dy$$

را حساب کنید که در آن C مرز ناحیه‌ی محصور به دوایر $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ است.

۵) فرض کنید $f(x,y) = \frac{۱}{|x| + |y|}$ و C مربعی با رئوس $A = (۱, ۰)$، $B = (۰, ۱)$، $C = (-۱, ۰)$ و $D = (۰, -۱)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C f(x,y)dx + f(x,y)dy$.

٦) الف) با استفاده از قضیه‌ی گرین نشان دهید هرگاه توابع دو متغیره‌ی P و Q روی حوزه‌ی همبند ساده‌ی D دارای مشتقات نسبی پیوسته باشند و در هر نقطه‌ی $D \in (x,y)$ داشته باشیم $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ آن‌گاه $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است.

ب) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C \frac{x-y}{x^۲+y^۲}dx + \frac{x+y}{x^۲+y^۲}dy$ که C یک خم هموار بسته حول مبدأ مختصات است.

ج) انتگرال قسمت (ب) را در حالتی محاسبه کنید که C یک منحنی هموار ساده‌ی بسته باشد ولی مبدأ مختصات در داخل C نباشد.

۷) اگر γ کمان OA از خم به معادله‌ی $y = xe^{x-۱}$ باشد، به طوری که $A = (۱,۱)$ و $O = (۰,۰)$، مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی‌الخط

$$\int_\gamma (۳x^۲y + y^۳)dx + (x^۳ + ۳xy^۲)dy$$

۸) مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال خط $\int_C |y|dx + |x|dy$ که C منحنی متشکل از کمان AB، قسمتی از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ واقع بر نقطه‌ی $A = (۰,۲)$ و $B = (-۱,۱)$ و BC قسمتی از خط $x + ٦y = ۵$ واقع بر نقطه‌ی $B = (-۱,۱)$ و $C = (۲, \frac{۱}{۲})$ است.

۹) در هر یک از حالات زیر تحقیق کنید آیا میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است؟ در صورت مثبت بودن جواب یک تابع دو متغیره‌ی f همراه با دامنه‌اش چنان تعیین کنید که در آن دامنه بردار گرادیان تابع f برابر $\mathbf{F}$ باشد.

الف) $\mathbf{F} = (y - \frac{\sin^۲ y}{x^۲})\mathbf{i} + (x + \frac{\sin ۲y}{x})\mathbf{j}$

ب) $\mathbf{F} = (۲x\cos^۲ y)\mathbf{i} + (۲y - x^۲ \sin ۲y)\mathbf{j}$

۱۰) اگر تابع دو متغیره‌ی u چنان وجود داشته باشد که $du = Pdx + Qdy$ (P و Q توابعی دو متغیره هستند) آن‌گاه فرم دیفرانسیلی $Pdx + Qdy$ را یک فرم دیفرانسیلی کامل می‌نامیم. نشان دهید که $Pdx + Qdy$ یک فرم دیفرانسیلی کامل است اگر و تنها اگر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان باشد.

۱۱) به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال‌های خطی زیر را روی خم‌های داده شده در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت محاسبه کنید.

الف)

$$\int_C \sqrt{x^۲+y^۲}dx + [xy^۲ + y\ln(x+\sqrt{x^۲+y^۲})]dy$$

که در آن C مربعی است با رئوس $(۱,۰)$، $(۴,۰)$، $(۴,۵)$ و $(۱,۵)$.

ب)

$$\int_C \frac{xy^۲}{۱+x^۲}dx + y\ln(۱+x^۲)dy$$

که در آن C دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲y=۰$ است.

۱۲) به کمک انتگرال خطی، مساحت نواحی زیر را به دست آورید.

الف) D محدود است به خم بسته‌ی C با معادلات پارامتری $x = a\cos^۳ t$، $y = a\sin^۳ t$، که در آن $a > ۰$ و $۰ \leq t \leq ۲\pi$.

ب) D محدود است به خم بسته‌ی C (کاردیوئید) با معادلات پارامتری $x = ۲a\cos t - a\cos ۲t$، $y = ۲a\sin t - a\sin ۲t$، که در آن $a > ۰$ و $۰ \leq t \leq ۲\pi$.

۱۳) تحقیق کنید که تساوی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = ۱$$

در مورد نگاشت‌های $x = e^u\cos v$، $y = e^u \sin v$ و وارون آن‌ها برقرار است.

۱۴) مساحت رویه‌ی S را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) S قسمتی از کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ بریده می‌شود $(a>۰)$.

ب) S قسمتی از استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ است که در کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ قرار دارد $(a>۰)$.

ج) S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است که بین صفحه‌ی $z=۰$ و استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ قرار دارد.

۱۵) انتگرال‌های رویه‌ی زیر را حساب کنید.

الف) $\iint_S xyz\,d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحه‌ی $x+y+z=۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

ب) $\iint_S y\,d\sigma$ که در آن S قسمتی از سهمی‌گون $y=۲-x^۲-z^۲$ به ازای $y\geq ۰$ است.

ج) $\int\int_S (x^۲y^۲+x^۲z^۲+y^۲z^۲)d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲x$ بریده می‌شود.

۱٦) انتگرال‌های سطح (رویه‌ای) زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S نیم کره‌ی $z=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ است.

ب) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=\mathbf{i}-y^۲\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و S قسمتی از رویه‌ی $z=xy$ است که در بالای مربع $D=\{(x,y):۰\le y\le ۲\ ,\ ۰\le x\le ۳\}$ قرار دارد.

ج) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ و صفحات $z=۰$ و $z=۳$ است.

۱۷) به کمک قضیه واگرایی گوس انتگرال رویه‌ای $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) $\mathbf{F}=۴x\mathbf{i}-۲y\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و S کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

ب) $\mathbf{F}=۳x\mathbf{i}-y^۲\mathbf{j}+z^۲\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲$ و صفحات $z=۰$ و $z=۱$ است.

ج) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S هر رویه‌ی بسته‌ی دارای شرایط قضیه‌ی واگرایی است.

۱۸) به کمک قضیه‌ی استوکس انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot dr$ را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-y\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که در صفحه‌ی $z=x$ از برخورد صفحات $x=۰$، $x=۱$، $y=۰$ و $y=۲$ به وجود می آید.

ب) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x^۲\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که از برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ با صفحه‌ی $x+y+z=۲$ پدید می آید.

ج) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و C مثلثی است که رئوس آن به ترتیب عبارتند از $(۰,۰,۳)$، $(۱,۰,۳)$ و $(۲,۱,۳)$.

د) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و C منحنی حاصل از برخورد صفحه‌ی $z=x$ با کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است (جهت حرکت روی C از طرف مثبت محور z بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود).

۱۹) برای یک تابع حقیقی ۳ متغیره‌ی f، تابع حقیقی $\nabla^۲ f$ (لاپلاسین f) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^۲ f := \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$$

یا به طور صوری

$$\nabla^۲ := \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲} = \nabla \cdot \nabla$$

به عبارت دیگر می‌توان $\nabla^۲ f$ را تصویر f به وسیله‌ی عملگر $\nabla^۲$ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\nabla^۲ : V \to V \quad ; \quad f \mapsto \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$$

نشان دهید $\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^۲ \mathbf{F}$.

۲۰) فرض کنید f تابعی سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. نشان دهید

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = \|\nabla f\|^۲ + f \nabla^۲ f$$

۲۱) فرض کنید $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ یک میدان برداری روی ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد و توابع P، Q و R بر این ناحیه مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشند.

الف) مطلوب است $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

ب) نشان دهید $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^۲ \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ ، که در آن $\nabla^۲ \mathbf{F} := (\nabla^۲ P)\mathbf{i} + (\nabla^۲ Q)\mathrm{j} + (\nabla^۲ R)$.

۲۲) فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداری مشتق‌پذیر باشند. نشان دهید

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

۲۳) فرض کنید f و g دو تابع سه متغیره با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده سطح S باشند به قسمی که خم مرزی آن C و $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بر سطح S هستند. نشان دهید

(الف) $\displaystyle\int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$

(ب) $\displaystyle\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = ۰$

۲۴) برای بردار یکه‌ی $\mathbf{n}$، نماد $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ نماد دیگری برای مشتق سویی تابع f در راستای $\mathbf{n}$ است (به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = D_{\mathbf{n}} f$ و اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$). فرض کنید T ناحیه‌ای بسته و کراندار از فضای $\mathbb{R}^۳$ و S سطح محصور کننده‌ی آن باشد. به علاوه فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بیرونی سطح S است. اگر f و g دو تابع با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده حجم T و سطح S باشند، نشان دهید

(الف) $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_T \nabla^۲ f\, dV$

(ب) $\displaystyle\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

(ج) $\displaystyle\iint_S (f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}})\, d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g - g\nabla^۲ f)\, dV$