

۱۷۶	معادلات خطی همگن از مرتبه دلخواه n ، با ضرایب ثابت
۱۸۹	معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دوم
۲۰۸	روش عمومی برای حل معادلات خطی غیرهمگن
۲۱۶	حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به وسیله روش ایراتورها
۲۲۴	ایراتورهای معکوس
۲۴۱	روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در حالات خاص

فصل چهارم:

حل معادلات با استفاده از سریها

۲۷۳	سری
۲۹۰	حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی
۳۰۶	معادله لژاندر، چند جمله ایهای لژاندر
۳۳۰	روش توسعه یافته سری توانی، روش فروبونیوس
۳۵۱	تابع گاما
۳۵۷	معادله بسل، تابع بسل نوع اول
۳۶۷	تابع بسل نوع دوم

فصل پنجم:

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

۳۸۵	ارزوش حذفی
۳۸۸	روش ایراتورها

فصل ششم:

تبدیل لاپلاس

۳۹۸	تبدیل لاپلاس
۴۱۰	تبدیل لاپلاس مشتق
۴۱۶	تبدیل لاپلاس انتگرال
۴۲۲	قضایای انتقال
۴۳۸	مشتق گیری از تبدیل لاپلاس
۴۴۴	انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس

فهرست مطالب

فصل اول:

معادلات دیفرانسیل معمولی

۱	تعاریف و کلیات
۳	تشکیل معادله دیفرانسیل
۱۲	مسیرهای قائم

فصل دوم:

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱۷	معادلات تفکیک پذیر
۲۵	معادلات همگن
۴۲	معادلات دیفرانسیل کامل
۵۰	فاکتورهای انتگرال گیری
۷۸	معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول
۱۰۶	معادلات مرتبه اول که نسبت به مشتق حل نشده اند
۱۴۲	روش تکرار بیگارد
۱۴۵	قضایای مربوط به وجود و یکتایی

فصل سوم:

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم و بالاتر

۱۵۹	معادلات خطی مرتبه دوم
۱۶۴	معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

درست نامه

درست	غلط	سطر	صفحه
$\int y y'$	$\int y'$	۱۱	۱۳
$Q(x, y) dy = 0$	$Q(x, y) = 0$	۱۵	۶۸
$-\left(\frac{y-C}{x}\right)^r +$	$-\left(\frac{y-C}{x} +$	۳	۱۱۴
$= x(1-x^r p^r) \frac{dp}{dx}$	$= x(1-x^r p) \frac{dp}{dx}$	۸	۱۳۰
$y'' - 2y' - 15y = 0$	$y'' + 2y' - 15y = 0$	۹	۱۶۸
$t^r - 2t - 15 = 0$	$t^r + 2t - 15 = 0$	۱۲	۱۶۸
$t^r - t - 6 = 0$	$t^r - t - 6y = 0$	۱۹	۱۶۸
$t_r = 2 - i$	$t_r = 2 - i$	۱۷	۱۸۳
$A = -\frac{1}{10}$	$A = \frac{1}{10}$	۱۸	۱۹۷
$y'(0) = 1$	$y'(0) = 0$	۲۶	۲۰۶
$y'(0) = 0$	$y'(0) = 2$	۱	۲۰۷
x^{-1}	x^1	۲۳	۲۱۰
$(D-1)(D-2)y = \sin e^{-x}(2)$		۲۲	۲۲۲
$p \pm iq$	$p \pm ip$	۷	۲۵۵
$(x, -R, x, +R)$	$(x, -R, x, -R)$	۱۳	۲۸۵
$-\frac{x^v}{v}$	$-\frac{x^v}{v}$	۷	۳۰۲
(2)	(2)	۷	۳۰۷
r_v	2^n	۱۵	۳۰۸
$C_m x^{m+r+2}$	$C_m x^{m+r+2}$	۴	۳۳۱
$r_r = -v$	$r_r = v$	۱۶	۳۵۹
$z = \sqrt{r}x$	$z = \sqrt{r}x$	۱۶	۳۸۳
$t \int_0^t e^{rt} \frac{1 - \cos t}{t} dt$	$t \int_0^t \frac{1 - \cos t}{t} dt$	۱۰	۴۵۰
$y = \frac{1}{r} c x^r + \frac{y}{c}$	$c^r x^r - cy + 1 = 0$	۹	۴۸۸
$= p^r - c\sqrt{p}$	$= p^r - \frac{c}{\sqrt{p}}$	۱۰	۴۸۹
$(y-x)^0$	$(y-x)^2$	۶	۴۹۱
$y = -\frac{1}{4x^r}$		۱۰	۴۹۳
$(-\pi^r +$	$(-\frac{\pi^r}{r} +$	۲	۴۹۶
$c_r \frac{\sin x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	۱۴	۵۰۰

۴۵۰ کابولوشن
۴۶۰ تبدیل لایلاش متناوب
۴۶۷ دستگاه معادلات دیفرانسیل
۴۷۵ جداول ضمیمه
۴۷۷ جواب مسائل
۵۲۹ فهرست راهنما
۵۳۴ منابع

فصل اول

معادلات دیفرانسیل معمولی

۱-۱ تعاریف و کلیات

تعریف ۱.۱.۱. هر رابطه‌ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند: اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله دیفرانسیل را معمولی نامیده و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل نسبی یا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامند.

مثال ۱.۱.۱

- (۱) $y' = 3$
- (۲) $y'' + 3(y')^2 + \cos x = 4$
- (۳) $x^2 y''' (y'')^4 + e^{4x} \sin y' = y^3 + x(y')^6$
- (۴) $(y'')^3 + x(y')^4 + y \sin y' = 7x^2 + 1$
- (۵) $(y'')^3 + 6(y')^4 + 2x = 3$
- (۶) $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}$

ردیف	تعداد	عنوان	شرح
۱	۱	۱	۱
۲	۵	۲	۳
۳	۲	۳	۴
۴	۵	۴	۵
۵	۲	۵	۶
۶	۳	۶	۷
۷	۴	۷	۸
۸	۱	۸	۹
۹	۲	۹	۱۰
۱۰	۳	۱۰	۱۱
۱۱	۴	۱۱	۱۲
۱۲	۵	۱۲	۱۳
۱۳	۶	۱۳	۱۴
۱۴	۷	۱۴	۱۵
۱۵	۸	۱۵	۱۶
۱۶	۹	۱۶	۱۷
۱۷	۱۰	۱۷	۱۸
۱۸	۱۱	۱۸	۱۹
۱۹	۱۲	۱۹	۲۰
۲۰	۱۳	۲۰	۲۱
۲۱	۱۴	۲۱	۲۲
۲۲	۱۵	۲۲	۲۳
۲۳	۱۶	۲۳	۲۴
۲۴	۱۷	۲۴	۲۵
۲۵	۱۸	۲۵	۲۶
۲۶	۱۹	۲۶	۲۷
۲۷	۲۰	۲۷	۲۸
۲۸	۲۱	۲۸	۲۹
۲۹	۲۲	۲۹	۳۰
۳۰	۲۳	۳۰	۳۱
۳۱	۲۴	۳۱	۳۲
۳۲	۲۵	۳۲	۳۳
۳۳	۲۶	۳۳	۳۴
۳۴	۲۷	۳۴	۳۵
۳۵	۲۸	۳۵	۳۶
۳۶	۲۹	۳۶	۳۷
۳۷	۳۰	۳۷	۳۸
۳۸	۳۱	۳۸	۳۹
۳۹	۳۲	۳۹	۴۰
۴۰	۳۳	۴۰	۴۱
۴۱	۳۴	۴۱	۴۲
۴۲	۳۵	۴۲	۴۳
۴۳	۳۶	۴۳	۴۴
۴۴	۳۷	۴۴	۴۵
۴۵	۳۸	۴۵	۴۶
۴۶	۳۹	۴۶	۴۷
۴۷	۴۰	۴۷	۴۸
۴۸	۴۱	۴۸	۴۹
۴۹	۴۲	۴۹	۵۰
۵۰	۴۳	۵۰	۵۱
۵۱	۴۴	۵۱	۵۲
۵۲	۴۵	۵۲	۵۳
۵۳	۴۶	۵۳	۵۴
۵۴	۴۷	۵۴	۵۵
۵۵	۴۸	۵۵	۵۶
۵۶	۴۹	۵۶	۵۷
۵۷	۵۰	۵۷	۵۸
۵۸	۵۱	۵۸	۵۹
۵۹	۵۲	۵۹	۶۰
۶۰	۵۳	۶۰	۶۱
۶۱	۵۴	۶۱	۶۲
۶۲	۵۵	۶۲	۶۳
۶۳	۵۶	۶۳	۶۴
۶۴	۵۷	۶۴	۶۵
۶۵	۵۸	۶۵	۶۶
۶۶	۵۹	۶۶	۶۷
۶۷	۶۰	۶۷	۶۸
۶۸	۶۱	۶۸	۶۹
۶۹	۶۲	۶۹	۷۰
۷۰	۶۳	۷۰	۷۱
۷۱	۶۴	۷۱	۷۲
۷۲	۶۵	۷۲	۷۳
۷۳	۶۶	۷۳	۷۴
۷۴	۶۷	۷۴	۷۵
۷۵	۶۸	۷۵	۷۶
۷۶	۶۹	۷۶	۷۷
۷۷	۷۰	۷۷	۷۸
۷۸	۷۱	۷۸	۷۹
۷۹	۷۲	۷۹	۸۰
۸۰	۷۳	۸۰	۸۱
۸۱	۷۴	۸۱	۸۲
۸۲	۷۵	۸۲	۸۳
۸۳	۷۶	۸۳	۸۴
۸۴	۷۷	۸۴	۸۵
۸۵	۷۸	۸۵	۸۶
۸۶	۷۹	۸۶	۸۷
۸۷	۸۰	۸۷	۸۸
۸۸	۸۱	۸۸	۸۹
۸۹	۸۲	۸۹	۹۰
۹۰	۸۳	۹۰	۹۱
۹۱	۸۴	۹۱	۹۲
۹۲	۸۵	۹۲	۹۳
۹۳	۸۶	۹۳	۹۴
۹۴	۸۷	۹۴	۹۵
۹۵	۸۸	۹۵	۹۶
۹۶	۸۹	۹۶	۹۷
۹۷	۹۰	۹۷	۹۸
۹۸	۹۱	۹۸	۹۹
۹۹	۹۲	۹۹	۱۰۰

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 4x^2 t \quad (7)$$

شماره (۱) الی (۵)، معمولی و شماره (۶) و (۷) نسی هستند. در این کتاب درباره حل معادلات دیفرانسیل معمولی که به اختصار آن را معادله دیفرانسیل می‌گویم، بحث خواهد شد. در رابطه با اهمیت فراگیری این علم، خاطرنشان می‌سازیم که هر پدیده فیزیکی وقتی با علم ریاضی بیان شود، نتیجه، یک معادله دیفرانسیل می‌باشد.

مثال ۲.۰۱. معادله حرکت یک جسم

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

مثال ۳.۰۱. می‌دانیم که میزان تجزیه یک ماده رادیو اکتیویته متناسب با جرم موجود می‌باشد. اگر جرم جسم را y فرض کنیم آنگاه جرم، تابع زمان خواهد بود. وقتی خواهیم قانون تجربی فوق را با علامت ریاضی بیان کنیم، داریم

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

و چون جرم کاهش می‌یابد، می‌توان ضریب تناسب را $-k$ اختیار نمود.

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

در این کتاب در مورد چگونگی تشکیل معادلات بحث نخواهیم کرد و فقط طریق حل ارائه خواهد شد. و برای این منظور باید معادلات را دسته‌بندی نموده و راه حل هر دسته را ارائه دهیم؛ و این کار بوسیله تعاریف زیر تحقق می‌یابد:

تعریف ۲.۰۱. بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را، مرتبه معادله دیفرانسیل می‌گویم.

مثال ۴.۰۱. در مثال ۱.۰۱. معادله (۱) از مرتبه اول، معادله (۲) از مرتبه دوم، معادله (۳) از مرتبه سوم، معادله (۴) از مرتبه دوم و معادله (۵) از مرتبه دوم می‌-

باشند.

تعریف ۳.۰۱. اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان نسبت به مشتقات موجود در معادله به فرم چند جمله‌ای نوشت، آنگاه توان بالاترین مشتق موجود در معادله را درجه معادله دیفرانسیل می‌گویم.

مثال ۵.۰۱. در مثال ۱.۰۱. معادله (۱) از درجه اول، معادله (۲) از درجه اول، معادله (۳) بدون درجه، معادله (۴) بدون درجه و معادله (۵) از درجه سوم می‌باشند. با استفاده از تعاریف بالا معادلات را دسته‌بندی می‌کنیم:

الف) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

ب) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

پ) معادلات دیفرانسیل از مرتبه دلخواه n

در فصل دوم درباره حل معادلات مرتبه اول بحث خواهد شد. در فصل سوم، حل معادلات مرتبه دوم و مرتبه دلخواه n و در فصل چهارم حل معادلات مرتبه دوم با ضرایب متغیر - با استفاده از روش سریهای توانی و سری توسعه یافته سری توانی - به بحث گذارده خواهد شد. و در فصل پنجم مختصری درباره حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل و در فصل ششم روش تبدیل لاپلاس بیان خواهد گردید.

۲.۰۱. تشکیل معادله دیفرانسیل

دسته منحنی $y = F(x, c)$ را بررسی می‌کنیم. (c مقدار ثابت). به ازای مقادیر مختلفی که c اختیار می‌کند، منحنی‌های بیشمار رسم خواهد شد.

مثال ۶.۰۱. دسته منحنی

$$y = x^2 + c$$

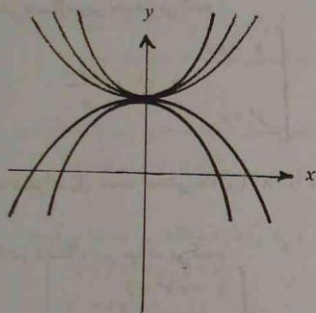
را رسم کنید.

معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال ۰.۸.۱. دسته منحنی

$$y = cx^2 + 2$$

را رسم کنید.



شکل ۳.۱

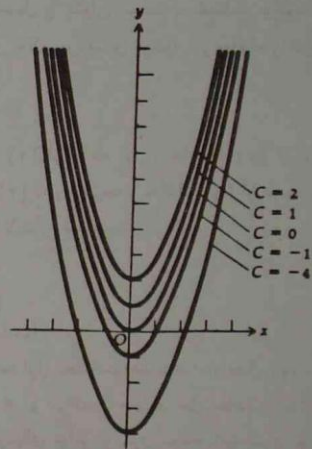
می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که پارامتر ثابت c را نداشته و $y = F(x, c)$ جواب آن معادله باشد. این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خواهد بود. برای این منظور باید پارامتر c را در دستگاه زیر حذف کرد:

$$\begin{cases} y = F(x, c) \\ y' = F'_x(x, c) \end{cases}$$

مثال ۰.۹.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۰.۶.۱ را پیدا کنید.

حل. پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = x^2 + c \\ y' = 2x \end{cases}$$

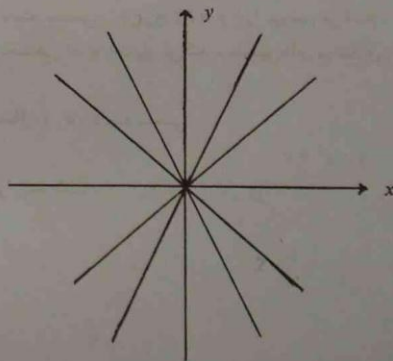


شکل ۱.۱

مثال ۰.۷.۱. دسته منحنی

$$y = cx$$

را رسم کنید.



شکل ۲.۱

چون معادله دوم دستگاه به c بستگی ندارد پس جواب مطلوب $y' = 2x$ خواهد بود.

مثال ۱۰.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۷.۱ را پیدا کنید.

حل. پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = cx \\ y' = c \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

مثال ۱۱.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۸.۱ را پیدا کنید.

حل. پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = cx^2 + 2 \\ y' = 2cx \end{cases}$$

از معادله دوم دستگاه داریم،

$$c = \frac{y'}{2x}$$

در معادله اول دستگاه بجای c مقدار می‌گذاریم:

$$y = \frac{y'}{2x} x^2 + 2$$

$$= \frac{1}{2} y' x + 2.$$

اگر دسته منحنی همیشه از یک پارامتر بستگی داشته باشد، مانند:

$$y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

برای تشکیل معادله دیفرانسیل آن باید n پارامتر را بین $n+1$ معادله، در دستگاه زیر

حذف کرد،

$$\begin{cases} y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y' = F'_x(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y'' = F''_{xx}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ \vdots \\ y^{(n)} = F^{(n)}_{x^n}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases}$$

که نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خواهد بود.

مثال ۱۲.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را پیدا کنید.

$$y = 2x^2 + c_1 x + c_2$$

حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = 2x^2 + c_1 x + c_2 \\ y' = 4x + c_1 \\ y'' = 4 \end{cases}$$

$y'' = 4$ ، جواب مطلوب است.

مثال ۱۳.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را پیدا کنید.

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x$$

حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 x e^x \\ y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \\ y'' = c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x \end{cases}$$

از معادلات دوم و سوم دستگاه داریم،

$$y'' - 2y' = -c_1 e^x - c_2 x e^x \quad (1)$$

طرف راست عبارت (۱) برابر $-y$ می‌باشد، و جواب مطلوب

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

تعریف ۴۰۱. هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب معادله دیفرانسیل نامیده می شود.

مثال ۱۴۰۱. تابع

$$(1) \quad y = 2e^{-4x}$$

یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(2) \quad y' + 4y = 0$$

می باشد زیرا از y مشتق می گیریم داریم،

$$(3) \quad y' = -8e^{-4x}$$

(1) و (3) را در (2) جای گذاری می کنیم، اتحاد برقرار است

$$-8e^{-4x} + 8e^{-4x} = 0.$$

مثال ۱۵۰۱. تابع

$$y = 3 \cos 2x + \sin 2x$$

یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(1) \quad y'' + 4y = 0$$

می باشد زیرا مشتق اول و دوم y را می گیریم

داریم.

$$y' = -6 \sin 2x + 2 \cos 2x \quad \text{و} \quad y'' = -12 \cos 2x - 4 \sin 2x$$

با جای گذاری y' و y'' در (1)، اتحاد برقرار است

$$-12 \cos 2x - 4 \sin 2x + 12 \cos 2x + 4 \sin 2x = 0.$$

مثال ۱۶۰۱. هر یک از توابع

$$y = -\cos x - 5 \quad \text{و} \quad y = -\cos x + 2 \quad \text{و} \quad y = -\cos x$$

یک جواب معادله دیفرانسیل $y' = \sin x$ می باشد، و می دانیم بطور کلی

$$y = -\cos x + c$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد. (c ثابت دلخواه)

مثال ۱۷۰۱. هر یک از توابع

$$y = x e^x + e^x, \quad y = x e^x - 2 e^x, \quad y = x e^x + \frac{5}{2} e^x$$

یک جواب معادله دیفرانسیل زیر می باشد.

$$y' - y = e^x$$

و بطور کلی

$$y = x e^x + c e^x$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد. (c ثابت دلخواه)

با توجه به دو مثال بالا خواهیم دید که معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد؛ حتی بی نهایت جواب، که همگی تحت یک فرمول که شامل یک ثابت دلخواه است بیان می شوند. چنین جوابی را جواب عمومی می نامیم.

توجه ۱. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی شامل n ، ثابت دلخواه خواهد بود.

اگر در مثال ۱۶۰۱. بخواهیم جواب را طوری تعیین کنیم که منحنی جواب از نقطه (۱ و ۰) عبور کند، در جواب عمومی $y = 1, x = 0$ قرار می دهیم

$$1 = -\cos 0 + c \Rightarrow c = 2$$

در جواب عمومی $c = 2$ قرار می دهیم

$$y = -\cos x + 2$$

به این جواب، جواب خصوصی گویند.

جواب خصوصی به این ترتیب بدست می آید که جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار می دهیم و پارامتر ثابت را تعیین می کنیم.

توجه ۲. جواب خصوصی، جوابی است بدون پارامتر و همیشه از جواب عمومی بدست می آید. برای روشن شدن مطلب، مساله میزان تجزیه ماده رادیواکتیو به مراحل می کنیم.

مثال ۱۸۰۱. فرض کنید ماده رادیواکتیو به ای داریم و می خواهیم بدانیم جرم آن بعد

معادلات دیفرانسیل معمولی

تعریف ۵.۱. جواب غیرعادی* معادله دیفرانسیل، جوابی است که منحنی نمایش آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی مماس باشد.

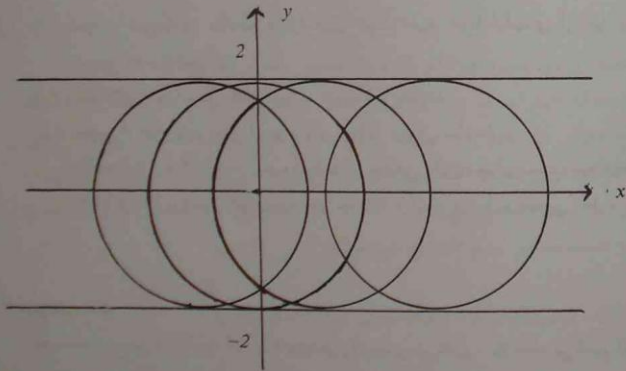
مثال ۱۹.۱. معادله دیفرانسیل

$$y^2(1+y'^2) = 4$$

دارای جواب عمومی

$$(x-c)^2 + y^2 = 4$$

است که نشان دهنده دسته دایره‌ی هستند که مرکز آنها نقاط $(c, 0)$ می‌باشد.



شکل ۵.۱

دو خط $y=2$ و $y=-2$ نیز در معادله صدق می‌کند که $y = \pm 2$ جوابهای غیرعادی این معادله می‌باشند.

درباره راه پیدا کردن جوابهای غیرعادی بعداً صحبت خواهد شد.

* Singular Solution

معادلات دیفرانسیل معمولی

از t ساعت چقدر می‌شود. می‌دانیم که میزان متلاشی شدن متناسب با جرم موجود است. پس اگر فرض کنیم جرم y باشد،

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

$$\frac{dy}{y} = -k dt$$

$$\ln y = -kt + \ln c$$

$$\ln \frac{y}{c} = -kt$$

$$\frac{y}{c} = e^{-kt}$$

$$y = ce^{-kt}$$

جواب عمومی

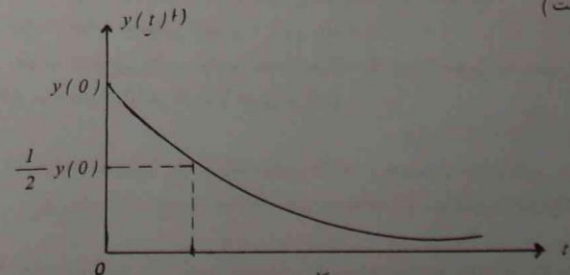
و اگر فرض کنیم در $t=0$ ، گرم $y=7$ (شرایط اولیه) داریم

$$7 = ce^0 \Rightarrow c = 7$$

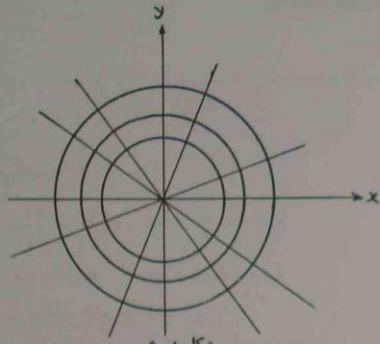
و جواب خصوصی

$$y = 7e^{-kt}$$

می‌باشد و اگر بخواهیم بدانیم بعد از چه مدتی جرم نصف می‌شود، باید در جواب خصوصی بجای y مقدار $\frac{y}{2}$ را قرار دهیم و t را تعیین کنیم. (k ضریب تناسب معلوم است)



شکل ۴.۱



شکل ۶.۱

مثال ۲۰.۱. معادله دیفرانسیل

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

دارای جواب عمومی

$$y = cx + \frac{1}{c}$$

می باشد و جواب غیرعادی معادله

$$y^2 = 4x$$

است.

تذکره. (آ) جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل تحت هیچ شرط اولیه‌ای از جواب عمومی بدست نمی‌آید.

(ب) معادلات دیفرانسیل خطی جواب غیرعادی ندارند.

(پ) بعضی از معادلات ممکن است دارای جواب عمومی نباشند.

مانند $y'^2 + 3 = 0$ که در مجموعه اعداد حقیقی دارای جواب نیست و معادله

$$|y'| + |y| = 0$$

تنها دارای یک جواب $y \equiv 0$ است و جواب عمومی ندارد.

۳.۱ مسیرهای قائم

دو دسته منحنی $x^2 + y^2 = c$ و $y = mx$ را بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که هر منحنی از یک دسته، بر کلیه منحنی‌های دسته دیگر عمود می‌باشد. هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته منحنی برقرار باشد، یک دسته را مسیرهای قائم دسته‌های دیگر می‌نامیم.

روش بدست آوردن مسیرهای قائم یک دسته منحنی به شرح زیر می‌باشد:

ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می‌کنیم، سپس در این معادله بجای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست آید. (زیرا در هر نقطه روی مسیر اصلی، ضریب زاویه منحنی مسیر قائم، عکس و قرینه، ضریب زاویه مسیر اصلی می‌باشد). آنگاه معادله دیفرانسیل مسیر قائم را حل می‌کنیم. دسته منحنی مسیر قائم بدست می‌آید.

مثال ۲۱.۱. مسیرهای قائم، دسته منحنی زیر را بدست آورید.

$$x^2 + y^2 = c$$

حل. ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل می‌دهیم،

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c \\ 2x + 2y y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم؛ معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست می‌آید.

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + \ln m \Rightarrow y = mx$$

و $y = mx$ دسته منحنی، مسیره‌های قائم می‌باشد.

چون هنوز طریق حل معادلات دیفرانسیل بیان نشده است مسائل مربوط به مسیره‌های قائم را در قسمت تمرینهای دوره‌ای فصل دوم می‌آوریم.

مجموعه مسائل فصل ۱

مرتبه معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید و تحقیق کنید تابع داده شده یک

جواب می‌باشد.

$$y = c e^{-5x}, \quad y' + 5y = 0 \quad .1$$

$$y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x), \quad y'' + 4y' + 5y = 0 \quad .2 \checkmark$$

$$y = c e^{2x} + \frac{3}{2}, \quad y' - 2y + 3 = 0 \quad .3 \checkmark$$

$$y = c \ln x, \quad y' x \ln x - y = 0 \quad .4$$

$$x^2 - xy + y^2 = c^2, \quad (x - 2y)y' = 2x - y \quad .5$$

$$y = x + c e^y, \quad (x - y + 1)y' = 1 \quad .6 \checkmark$$

$$y = \ln(xy), \quad (xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 6 \quad .7 \checkmark$$

$$y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad xy' - x \sin x = y \quad .8 \checkmark$$

$$y = x \left(\int \frac{e^x}{x} dx + c \right), \quad y' = \frac{y}{x} + e^x \quad .9 \checkmark$$

$$y = e^{x^2} \left[\int e^{-x^2} dx + c \right], \quad y' - 2xy = 1 \quad .10 \checkmark$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های زیر را تشکیل دهید.

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} \quad .11 \checkmark$$

$$y^2 + \frac{1}{x} = 2 + c e^{-y^2/2} \quad .12 \checkmark$$

$$x^3 = c(x^2 - y^2) \quad .13 \checkmark$$

$$\ln \frac{x}{y} = 1 + cy \quad .14 \checkmark$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 \quad .15 \checkmark$$

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

صورت کلی این معادلات، به فرم $F(x, y, y') = 0$ می باشد. در این فصل طریق حل این معادله را وقتی که $y' = f(x, y)$ ، $x = f(y, y')$ ، $y = f(x, y')$ باشد، ارائه می دهیم. در چند بخش اول این فصل به تفصیل در مورد حل معادله $\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$ بحث خواهد شد.

۱.۲ معادلات تفکیک پذیر (متغیرهای از هم جدا)

اگر داشته باشیم $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ که در آن f_1 تابعی تنها از x و f_2 تابعی تنها از y باشد در این صورت داریم

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$$

یا

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

و با بفرم کلی

$$(1) \quad q(x) dx + g(y) dy = 0$$

با انتگرال گیری از (۱) جواب عمومی بدست می آید.

$$\ln |2+y| = -\ln |\cos x| + \ln c, \quad c > 0$$

$$= \ln \frac{c}{|\cos x|}$$

$$y+2 = c \operatorname{Sec} x$$

مثال ۳.۰۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{x(1+y)}{y(x+2)}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را به فرم زیر می نویسیم

$$y(x+2)dy = x(1+y)dx$$

و طرفین را بر $(1+y)(x+2)$ تقسیم می کنیم، داریم

$$\frac{y}{1+y} dy = \frac{x}{x+2} dx$$

سپس با انتگرال گیری از طرفین معادله بالا داریم

$$y - \ln |1+y| = x - 2 \ln |x+2| + c.$$

مثال ۴.۰۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

را حل کنید.

حل. معادله را به فرم زیر می نویسیم

$$xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$$

طرفین را بر $x(1+x^2)(1+y^2)$ تقسیم می کنیم، داریم

$$\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

تذکره ۱: برای حل معادلات مرتبه اول به فرم $y' = f(x, y)$ ابتدا مخرجها را از بین می بریم و سپس معادله را به فرم زیر می نویسیم

$$(2) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

اگر (۲) به فرم

$$(3) \quad f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0$$

باشد، طرفین (۳) را در $1/f_2(y)f_3(x)$ ضرب می کنیم تا به فرم (۱) درآید.

مثال ۱.۰۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = e^{x+y}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را در dx ضرب کرده،

$$dy = e^{x+y} dx$$

و طرفین را در e^{-y} ضرب می کنیم

$$e^{-y} dy = e^x dx$$

سپس از طرفین انتگرال می گیریم

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$$

$$-e^{-y} = e^x + c.$$

مثال ۲.۰۲. معادله دیفرانسیل

$$y' \cot x = 2+y$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را در dx ضرب کرده،

$$\cot x dy = (2+y) dx$$

$$\frac{dy}{2+y} = \tan x dx$$

سپس از طرفین انتگرال می گیریم

پس از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+x^2}$$

$$1 \equiv A(1+x^2) + Bx^2 + Dx \quad (2)$$

در (۲) به‌ازای $x=0$ داریم

$$1 = A$$

و به‌ازای $x=1$ داریم

$$1 = 2 + B + D \quad (3)$$

و به‌ازای $x=-1$ داریم

$$1 = 2 + B - D \quad (4)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم:

$$D = 0, B = -1$$

با توجه به‌مقادیر A, B و D ، (۱) بدفرم زیر درمی‌آید

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln c$$

$$1+y^2 = \frac{cx^2}{1+x^2}$$

مثال ۵.۲. طبق قانون نیوتن، درجه سرد شدن یک جسم در هوا متناسب با تفاضل دمای جسم، U و دمای هوا، U_0 می‌باشد. اگر دمای هوا 20°C و دمای اولیه جسم 45°C باشد، و در مدت ۱۰ دقیقه دمای جسم به 40°C برسد، پس از چه مدت دمای جسم به 30°C می‌رسد؟

معادلات دیفرانسیل معمولی

حل. ابتدا این قانون را با علائم ریاضی بیان می‌کنیم.

$$\frac{du}{dt} = -k(u - u_0), \quad k > 0$$

این معادله از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد.

$$\frac{du}{u - u_0} = -k dt$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\ln(u - u_0) = -kt + \ln c, \quad c > 0$$

$$u = u_0 + c e^{-kt} \quad (1)$$

(ملاحظه می‌کنیم که $t \rightarrow \infty$ آنگاه $u \rightarrow u_0$)با توجه به شرایط اولیه، مقدار c را تعیین می‌کنیم،

$$45 = 20 + c e^0 \Rightarrow c = 25^0$$

مقدار $c = 25^0$ را در (۱) می‌گذاریم تا جواب خصوصی معادله بدست آید.

$$u = 20 + 25 e^{-kt}$$

چون در $t = 10$ ، $u = 40^0$ است، پس

$$40 = 20 + 25 e^{-10k} \Rightarrow k = 0.022$$

$$u = 20 + 25 e^{-0.022t}$$

$$30 = 20 + 25 e^{-0.022t}$$

$$\frac{10}{25} = e^{-0.022t} \Rightarrow \ln \frac{10}{25} = -0.022t$$

$$\ln \frac{10}{25} = -0.022t \Rightarrow t = \frac{1}{0.022} \ln \frac{25}{10}$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال ۶.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \tan(x+y) - 1$$

را حل کنید.

حل. $U = x + y \Rightarrow y' = U' - 1$

$$U' - 1 = \tan(U) - 1 \Rightarrow \cot U dU = dx$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln |\sin u| = x + c_1 \Rightarrow \sin u = c e^x$$

$$y + x = \sin^{-1} c e^x$$

مثال ۷.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = 1 + \frac{1}{x-y}$$

را حل کنید.

حل. $u = x - y \Rightarrow y' = 1 - u'$

$$1 - u' = 1 + \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u} \Rightarrow u du = -dx$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا

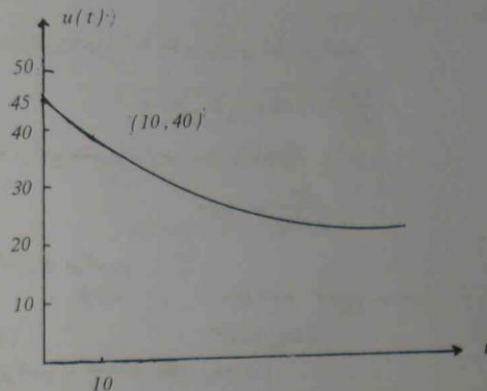
$$\frac{1}{2} u^2 = -x + c$$

$$(x-y)^2 = -2x + c$$

مجموعه مسائل ۱.۲.

$$y x^2 dy - 2x^2 dy = y^3 dx$$

۱



شکل ۱.۲

تذکر ۲: معادلاتی به فرم

$$(۴) \quad y' = f(ax + by + c)$$

را می توان با استفاده از تغییر متغیر زیر تبدیل به فرم متغیرهای از هم جدا نمود

$$(۵) \quad U = ax + by + c$$

زیرا، با مشتگیری نسبت x از طرفین (۲) داریم

$$(۶) \quad U' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{1}{b}(U' - a)$$

با جای گذاری (۵) و (۶) در (۴) داریم

$$\frac{1}{b}(U' - a) = f(U) \Rightarrow U' = bf(U) + a = h(U)$$

$$\frac{du}{h(u)} = dx$$

۵

$$y' = \frac{4xy}{x^2 + 1} \quad \cdot ۲۷$$

$$t(y-1)dt + y(t+1)dy = 0 \quad \cdot ۲۸$$

$$x^2 yy' - e^y = 0 \quad \cdot ۲$$

$$y dx - x \ln x dy = 0, \quad x > 1 \quad \cdot ۵$$

$$\sqrt{1+y^2} dx - y(1+x^2) dy = 0 \quad \cdot ۶$$

$$\sin x dx - 2y dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \cdot ۷$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{(1+r)^2}{1-s}, \quad r(0) = 1 \quad \cdot ۸$$

$$y' = \frac{1+y^2}{xy}, \quad y(2) = 3 \quad \cdot ۹$$

$$\tan t \frac{dy}{dt} - y \sec^2 t = 0 \quad \cdot ۱۰$$

$$y' \ln x - \frac{y}{x} = 0, \quad x > 0 \quad \cdot ۱۱$$

$$xy' = (1-x^2) \cot y \quad \cdot ۱۲$$

$$y' \sin x = y \ln y \quad \cdot ۱۳$$

$$xy' + (1+y^2) \tan^{-1} y = 0 \quad \cdot ۱۴$$

$$e^{y^2} (x^2 + 2x + 1) = -(xy + y)y' \quad \cdot ۱۵$$

$$y' = x + 1 + xy^2 + y^2 \quad \cdot ۱۶$$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

$$xy^2(xy' + y) = 4, \quad xy = t \quad \cdot ۱۷$$

$$(Lnx + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0, \quad \frac{y^3}{x} = t \quad \cdot ۱۸$$

$$(xy + 2xy \ln^2 y + y \ln y) dx + (2x^2 \ln y + x) dy = 0, \quad x \ln y = t \quad \cdot ۱۹$$

$$y' = 2x + y \quad \cdot ۲۰$$

$$y' = \cos(x - y) \quad \cdot ۲۱$$

$$y' = -2(2x + 3y)^2 \quad \cdot ۲۲$$

۲.۲ معادلات همگن

تعریف ۱.۰۲. تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه n گوئیم، اگر

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

مثال ۸.۰۲. نشان دهید تابع زیر، همگن از درجه ۳ می باشد

$$f(x, y) = x^3 + 5xy^2 + 3y^3$$

حل. به جای x ، λx و به جای y ، λy می گذاریم، داریم

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^3 x^3 + 5\lambda x \lambda^2 y^2 + 3\lambda^3 y^3 = \lambda^3 (x^3 + 5xy^2 + 3y^3) \\ &= \lambda^3 f(x, y). \end{aligned}$$

مثال ۹.۰۲. نشان دهید تابع زیر همگن از درجه ۱ می باشد

$$f(x, y) = x \sin \frac{y}{x}$$

حل. به جای x ، λx و به جای y ، λy می گذاریم، داریم

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \sin \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda x \sin \frac{y}{x} = \lambda f(x, y).$$

مثال ۱۰.۰۲. توابع $x + \sqrt{xy}$ ، $\tan^{x/y}$ ، $x^2 + xy$ و $x e^{x/y}$ به ترتیب همگن از درجه

۱، ۲، ۱ و ۱ می باشند و توابع

$$x e^x, x^2 + y, xy + 3, (x^2 + y^2) \cos y$$

همگن نیستند.

تعریف ۲۰۲. هر معادله دیفرانسیل به فرم $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ را که در آن $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ هر دو همگن از درجه n باشند، یک معادله دیفرانسیل همگن نامیده می شود. برای حل این نوع معادلات، از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم.

$$y = vx, \quad dy = v dx + x dv$$

با این تغییر متغیر، معادله همگن، تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می شود.

مثال ۱۱۰۲. معادله دیفرانسیل

$$2xy dy + (x^2 - y^2) dx = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله همگن می باشد.

$$y = vx, \quad dy = v dx + x dv$$

$$2xvx(v dx + x dv) + (x^2 - v^2x^2) dx = 0$$

طرفین معادله را بر x^2 تقسیم می کنیم.

$$(v^2 + 1) dx + 2vxdv = 0$$

معادله تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می شود.

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v}{1+v^2} dv = 0$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln x + \ln(1+v^2) = \ln c$$

$$x(1+v^2) = c$$

$$x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

$$y^2 + x^2 = cx$$

مثال ۱۲۰۲. معادله دیفرانسیل

$$x(y-x)y' = y^2$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را به فرم زیر می نویسیم.

$$y^2 dx = x(y-x)dy$$

معادله از نوع همگن می باشد.

$$v^2 x^2 dx = x(vx-x)(v dx + x dv)$$

سپس طرفین را بر x^2 تقسیم می کنیم

$$v dx = x(v-1)dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{v-1}{v} dv$$

معادله تبدیل به نوع متغیرها از هم جدا می شود. با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln x = v - \ln v + \ln c$$

$$\ln \frac{vx}{c} = v \Rightarrow vx = ce^v$$

$$y = ce^{y/x}$$

مثال ۱۳۰۲. معادله دیفرانسیل

$$(x^3 + y^3) dx + 3xy^2 dy = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله همگن است، پس

$$x^3(1+v^3) dx + 3x^3v^2(v dx + x dv) = 0$$

طرفین را بر x^3 تقسیم می کنیم

$$(1+v^3) dx + 3v^3 dx + 3xv^2 dv = 0$$

$$(1 + 4v^3) dx + 3xv^2 dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{3v^2}{1 + 4v^3} dv = 0$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\ln x + \frac{1}{4} \ln(1 + 4v^3) = \ln c_1$$

$$x^4 (1 + 4v^3) = c$$

$$x^4 + 4xy^3 = c.$$

مثال ۱۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$$

را حل کنید.

حل: معادله را به فرم زیر می‌نویسیم

$$(x + \sqrt{xy}) dy - y dx = 0$$

معادله همگن می‌باشد.

$$(x + \sqrt{x^3 v}) (v dx + x dv) - vx dx = 0$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم

$$(1 + \sqrt{v})(v dx + x dv) - v dx = 0$$

$$v\sqrt{v} dx + x(1 + \sqrt{v}) dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 + \sqrt{v}}{v\sqrt{v}} dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int v^{-3/2} dv + \int \frac{dv}{v} = c$$

$$\ln x - 2v^{-1/2} + \ln v = c$$

$$\ln vx = c + 2v^{-1/2}$$

$$\ln y = c + 2\sqrt{\frac{x}{y}}$$

مثال ۱۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$\frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x} \right) dy = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله همگن می‌باشد.

$$v \cos v dx - \left(\frac{1}{v} \sin v + \cos v \right) (v dx + x dv) = 0$$

$$- \sin v dx - x \left(\frac{1}{v} \sin v + \cos v \right) dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v} + \cot v dv = 0$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln x + \ln v + \ln |\sin v| = \ln c$$

$$xv \sin v = c$$

$$y \sin \frac{y}{x} = c.$$

مثال ۱۶.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' - \frac{y}{x} + c \sec \frac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله را به فرم زیر می‌نویسیم

$$dy + \left(-\frac{y}{x} + c \sec \frac{y}{x} \right) dx = 0$$

معادله از نوع همگن می باشد.

$$v dx + x dv + (-v + c \sec v) dx = 0$$

$$x dv + c \sec v dx = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \sec v dv = 0$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln x - \cos v = c \Rightarrow \ln x - \cos \frac{y}{x} = c$$

$$\ln 1 - \cos 0 = c \Rightarrow c = -1$$

$$\ln x = \cos \frac{y}{x} - 1.$$

مثال ۱۷.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

را حل کنید.

حل. معادله را به فرم زیر می نویسیم

$$(y+x) dy = (y-x) dx$$

معادله همگن می باشد.

$$(vx+x)(v dx + x dv) = (vx-x) dx$$

طرفین را بر x تقسیم می کنیم

$$v^2 dx + xv dv + x dv = -dx$$

$$(v^2 + 1) dx + x(v+1) dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v+1}{v^2+1} dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v^2+1} dv + \int \frac{dv}{v^2+1} = c_1$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln(v^2+1) + \tan^{-1} v = c_1$$

$$\ln x^2 (1+v^2) + 2 \tan^{-1} v = c, \quad c = 2c_1$$

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1} \frac{y}{x} = c.$$

تذکره ۱. معادلات به فرم

$$(1) \quad y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$$

همگن می باشند و با تغییر متغیر

$$(2) \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می شوند. زیرا با جای گذاری (۲) در (۱) داریم

$$v + x \frac{dv}{dx} = f\left(\frac{a+bv}{c+ev}\right)$$

$$x \frac{dv}{dx} = f\left(\frac{a+bv}{c+ev}\right) - v = F(v)$$

یا

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{dx}{x}$$

که از نوع متغیرهای از هم جدا می باشد.

نوجه. در (۱)، v' نامع. از یک کسر می باشد که صورت و مخرج آن دو خط

هستند که از مبدأ مختصات عبور می‌کنند.

تذکره ۲. معادلات به فرم

$$(۳) \quad y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$$

همگی نمی‌باشند، ولی قابل تبدیل به همگی هستند. اختلاف این معادله با (۱) در آنست که هر دو خط صورت و مخرج معادله (۳) از مبدأ نمی‌گذرند (c و d'، با هم صفر نیستند). پس کافی است که مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط انتقال دهیم؛ البته اگر دو خط موازی نباشند.

طریق حل: ابتدا $ah - be$ را حساب می‌کنیم؛ اگر مخالف صفر باشد، دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند. مختصات نقطه تلاقی را از حل دستگاه

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+hy+d=0 \end{cases}$$

پیدا می‌کنیم. فرض کنید (x_0, y_0) ، سپس تغییر متغیر

$$\begin{aligned} x &= X+x_0 \\ y &= Y+y_0 \end{aligned}$$

(۴)

می‌دهیم. معادله (۳) به فرم

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right)$$

در می‌آید که همگن است.

مثال ۱۸.۲. معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا، مقدار $ah - be$ را حساب می‌کنیم

$$ah - be = -1 - 1 \neq 0$$

یعنی دو خط موازی نیستند. از حل دستگاه زیر مختصات نقطه تلاقی دو خط را بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow x_0=1, y_0=-3$$

با جای‌گذاری

$$x = X+1, \quad dx = dX$$

و

$$y = Y-3, \quad dy = dY$$

در معادله، داریم

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

که همگن می‌باشد و قرار می‌دهیم

$$Y = vX, \quad dY = v dX + X dv$$

$$(X - Y) dY = (X + Y) dX$$

$$X(1 - v)(v dX + X dv) = X(1 + v) dX$$

طرفین را بر X تقسیم می‌کنیم.

$$(1 + v^2) dX + X(v - 1) dv = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{v-1}{1+v^2} dv = 0$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln X + \frac{1}{2} \ln(1+v^2) - \tan^{-1} v = c$$

$$\ln X + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right) - \tan^{-1} \frac{Y}{X} = c$$

$$\ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}\right) - \tan^{-1} \frac{y+3}{x-1} = c.$$

تذکره ۳. اگر دو خط موازی باشند، $(ah - be = 0)$ ، با استفاده از تغییر متغیر

$$(5) \quad u = ax + by$$

یا

$$u = ex + hy$$

معادله (۳) تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می‌شود. زیرا

$$u = ax + by$$

از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \left(\frac{du}{dx} - a \right)$$

با جای‌گذاری (۵) و (۶) در معادله (۳) داریم

$$\frac{1}{b} \left(\frac{du}{dx} - a \right) = f\left(\frac{u+c}{ku+d}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = bf\left(\frac{u+c}{ku+d}\right) + a = H(u)$$

یا

$$\frac{du}{H(u)} = dx.$$

مثال ۱۹.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{x+y}{1-x-y}$$

را حل کنید.

حل. دو خط موازی هستند.

$$u = x + y$$

$$u' = 1 + y', \quad y' = u' - 1$$

$$u' = \frac{u}{1-u} + 1$$

$$= \frac{1}{1-u}$$

یا

$$(1-u) du = dx$$

با انتگرال‌گیری از معادله بالا، داریم

$$u - \frac{1}{2}u^2 = x + c$$

$$x + y - \frac{1}{2}(x+y)^2 = x + c$$

$$y = \frac{1}{2}(x+y)^2 + c.$$

مثال ۲۰.۲. معادله دیفرانسیل

$$(x - 2 \sin y + 3) dx + (2x - 4 \sin y - 3) \cos y dy = 0$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم.

$$\sin y = z$$

از طرفین، دیفرانسیل می‌گیریم

$$\cos y dy = dz$$

در معادله جای‌گذاری می‌کنیم، داریم

$$(x - 2z + 3) dx + (2x - 4z - 3) dz = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x - 2z + 3}{2x - 4z - 3} \quad (1)$$

با استفاده از تغییر متغیر، $u = x - 2z$ داریم

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2 \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{du}{dx} \right)$$

جای $x - 2z$ و $\frac{dz}{dx}$ در (۱) مقادیر فوق را قرار می‌دهیم

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{du}{dx} \right) = -\frac{u + 3}{2u - 3}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u + 3}{2u - 3}$$

$$\frac{2u - 3}{4u + 3} du = dx$$

با انگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا، داریم

$$x = \frac{u}{2} - \frac{9}{8} \ln |4u + 3| + c$$

جای u مقدار می‌گذاریم

$$x = \frac{1}{2}(x - 2z) - \frac{9}{8} \ln |4x - 8z + 3| + c$$

جای z مقدار می‌گذاریم. در نتیجه

$$8 \sin y - 4x + 9 \ln |4x - 8 \sin y + 3| = c.$$

تذکره ۴. بعضی از معادلات دیفرانسیل، ممکن است با تغییر متغیر

به معادله همگن تبدیل شوند. $y = t^\alpha$ ، $dy = \alpha t^{\alpha-1} dt$

مثال ۲۱.۲. معادله دیفرانسیل

$$(y^4 - 3x^2) dy + xy dx = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

$$y = t^\alpha \Rightarrow dy = \alpha t^{\alpha-1} dt \quad \text{حل.}$$

را در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$(t^{4\alpha} - 3x^2)(\alpha t^{\alpha-1}) dt + xt^\alpha dx = 0$$

$$\alpha(t^{5\alpha-1} - 3x^2 t^{\alpha-1}) dt + xt^\alpha dx = 0 \quad (2)$$

برای آنکه (۲) همگن باشد، باید ضرایب dt و dx هردو همگن با درجه همگی برابر باشند. پس قرار می‌دهیم

$$5\alpha - 1 = 2 + \alpha - 1 \quad (3)$$

از حل (۳) بدست می‌آوریم

$$4\alpha = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

بمازای $\alpha = \frac{1}{2}$ ، ضریب dt ، همگن از درجه $\frac{3}{2}$ می‌باشد. حال باید ضریب dx بمازای همین مقدار α ، همگن از درجه $\frac{3}{2}$ باشد. در این مثال $1 + \alpha$ است که بمازای $\alpha = \frac{1}{2}$ ، مساوی $\frac{3}{2}$ می‌شود. بنابراین، معادله با تغییر متغیر $y = t^{1/2}$ قابل تبدیل به معادله همگن است.

در (۲) بجای α ، $\frac{1}{2}$ می‌گذاریم

$$\frac{1}{2}(t^{3/2} - 3x^2 t^{1/2}) dt + xt^{1/2} dx = 0 \quad (4)$$

طرفین (۴) را در $t^{1/2}$ ضرب می‌کنیم

$$(t^2 - 3x^2) dt + 2xt dx = 0 \quad (5)$$

معادله (۵) همگن است. قرار می‌دهیم

$$t = vx, \quad dt = v dx + x dv$$

$$x^2(v^2 - 3)(v dx + x dv) + 2x^2 v dx = 0$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$(v^2 - 3) dx + x(v^2 - 3) dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2 - 3}{v^3 - v} dv = 0$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v^2 - 3}{v(v^2 - 1)} dv = c_1 \quad (6)$$

برای محاسبه انتگرال طرف راست (۶)، ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم

$$\frac{v^2 - 3}{v(v^2 - 1)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v-1} + \frac{C}{v+1} \quad (7)$$

$$v^2 - 3 \equiv A(v-1)(v+1) + Bv(v+1) + C(v-1)v$$

بهازای $v=0$ بدست می‌آوریم

$$A = 3$$

بهازای $v=1$

$$B = -1$$

بهازای $v=-1$

$$C = -1$$

معادله‌های A و B و C را در (۷) قرار می‌دهیم، (۶) به‌فرم

$$\int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v-1} - \int \frac{dv}{v+1} = c_1$$

درمی‌آید

$$\ln |x| + 3 \ln |v| - \ln |v-1| - \ln |v+1| = \ln c$$

$$\frac{xv^3}{v^2 - 1} = c$$

$$\frac{x \frac{t^3}{x^3}}{\frac{t^2}{x^2} - 1} = c$$

$$\frac{t^3}{t^2 - x^2} = c$$

بجای t ، y^2 قرار می‌دهیم

$$\frac{y^6}{y^4 - x^2} = c.$$

مثال ۲۲.۲. معادله دیفرانسیل

$$4xy^2 dx + (3x^2y - 1) dy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

$$y = t^\alpha \Rightarrow dy = \alpha t^{\alpha-1} dt.$$

را در (۱) قرار می‌دهیم.

$$4xt^{2\alpha} dx + (3x^2t^\alpha - 1)(\alpha t^{\alpha-1}) dt = 0 \quad (2)$$

با توجه به توضیحات مثال ۲۱.۲ باید

$$1 + 2\alpha = \alpha - 1$$

$$\alpha = -2$$

بهازای $\alpha = -2$ ، ضریب dt ، همگن از درجه ۳- می‌باشد و به‌ازای همین مقدار α ،ضریب dx نیز همگن از درجه ۳- می‌شود. پس با تغییر متغیر $y = t^2$ ، معادله تبدیل

به‌نوع همگن می‌شود.

در (۲)، $\alpha = -2$ قرار می‌دهیم.

$$4xt^4 dx - 2(x^2t^6 - t^3) dt = 0$$

یا

$$4xt dx - 2(x^2 - t^2) dt = 0 \quad (3)$$

معادله (۳) همگن است. قرار می‌دهیم

$$t = vx, \quad dt = v dx + x dv$$

$$4x^2v dx - 2x^2(1 - v^2)(v dx + x dv) = 0$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$(v^3 - v) dx + x(v^2 - 3) dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2 - 3}{v^3 - v} dv = 0$$

از طرفین رابطه بالا انتگرال می‌گیریم، با توجه به (۶) مثال ۲۱.۰۲ داریم

$$\frac{t^3}{t^2 - x^2} = c$$

به جای t ، $y^{1/2}$ قرار می‌دهیم

$$\frac{y^{-3/2}}{y^{-1} - x^2} = c$$

یا

$$y(1 - x^2y)^2 = c$$

مجموعه مسائل ۲.۲

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{2x^2 + y^2}{-2xy + 3y^2} \quad \checkmark$$

$$x dy - y dx = \sqrt{xy} dx \quad \checkmark$$

$$(y^2 - 2xy) dx + (2xy - x^2) dy = 0 \quad \checkmark$$

$$xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2} \quad \checkmark$$

$$(x e^{y/x} + y) dx - x dy = 0 \quad \checkmark$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \checkmark$$

$$x(y' + e^{y/x}) = y \quad \checkmark$$

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2 \quad \checkmark$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \quad \checkmark$$

$$x dy = y \cos \text{Ln} \frac{y}{x} dx \quad \cdot 10$$

$$xy' = y + x \tan \frac{y}{x} \quad \cdot 11$$

$$y' = \frac{x - y}{x + 3y} \quad \cdot 12$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{5x - y}{2x + 2y} \quad \cdot 13 \checkmark$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + 4y + 2} \quad \cdot 14$$

$$y' = \frac{x - 3y + 3}{2x - 6y + 1} \quad \cdot 15$$

$$(x + y - 1)^2 dy = 2(y + 2)^2 dx \quad \cdot 16$$

$$y' - \tan \frac{y - 2x}{x + 1} = \frac{y + 2}{x + 1} \quad \cdot *17$$

$$y' \text{Ln} \frac{y + x}{x + 3} = \frac{y + x}{x + 3} - \text{Ln} \frac{y + x}{x + 3} \quad \cdot 18$$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر

$$y = xv, \quad y' = v + xv'$$

حل کنید.

$$xy' = y + x^2 \sec \frac{y}{x} \quad \cdot 19$$

$$(x^2 + 1)y(xy' - y) = x^3 \quad \cdot 20$$

$$xy' - y - x^2 \tan \frac{y}{x} = 0 \quad \cdot 21$$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر

$$y = t^\alpha, \quad dy = \alpha t^{\alpha-1} dt$$

حل کنید.

$$y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0 \quad (۲۲)$$

$$y(1 + \sqrt{x^2 y^4 + 1}) dx + 2x dy = 0 \quad (۲۳)$$

۳.۲ معادلات دیفرانسیل کامل

می‌دانیم دیفرانسیل یک تابع از دو متغیر مستقل x و y ، مانند $u(x, y)$ ،
بوسیله

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (۱)$$

داده می‌شود.

تعریف ۳.۲. معادله دیفرانسیل به فرم

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (۲)$$

را کامل گوئیم، اگر تابعی مانند $u(x, y)$ وجود داشته باشد. بطوری که

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \quad (۳)$$

باشد.

قضیه زیر بیان می‌کند، تحت چه شرایطی یک معادله دیفرانسیل به فرم (۲) کامل
می‌باشد:

قضیه* ۱.۲. فرض کنید P و Q و $\frac{\partial P}{\partial x}$ ، $\frac{\partial Q}{\partial y}$ در ناحیه‌ای مانند D پیوسته باشند. آنگاه

* اثبات در کتاب William E. Boyce and R. C. DiPrima, Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems, 3rd ed., P. 38 New York: Wiley 1997

شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دیفرانسیل به فرم

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

کامل باشد، آنست که

$$(۴) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

باشد.

حال فرض کنید در (۲)، P و Q طوری باشند که شرط (۴) برقرار باشد. پس نتایج
قضیه ۱.۲. معادله (۲) کامل است و در نتیجه تابعی مانند $u(x, y)$ وجود دارد به
قسمی که

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

از طرفی

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

است، پس $du = 0$ داریم

$$(۵) \quad u(x, y) = c$$

یعنی جواب عمومی معادله دیفرانسیل کامل (۲)، منحنی‌های تراز (۵) می‌باشند.
روش تحلیلی جهت بدست آوردن جواب عمومی، معادله دیفرانسیل کامل، از (۳)،
 a ، داریم

$$(۶) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x از طرفین (۶) داریم

$$(۷) \quad u = \int^* P(x, y) dx + f(y)$$

در (۷)، y بعنوان یک پارامتر محسوب شده است و $f(y)$ — عنوان مقدار ثابت
انتگرال‌گیری می‌باشد. زیرا $\frac{\partial u}{\partial x}$ یعنی مشتق تابع $u(x, y)$ نسبت به x ، وقتی که

y بعنوان ثابت در نظر گرفته شود. برای پیدا کردن $f(y)$ ، از (۳)، b ، استفاده می‌کنیم. یعنی $f(y)$ را طوری پیدا می‌کنیم که

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

باشد. برای اینکار از طرفین (۷) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\int^x P(x, y) dx] + \frac{df(y)}{dy} = Q(x, y)$$

$$\frac{df(y)}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} [\int^x P(x, y) dx]$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$(۸) \quad f(y) = \int [Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} (\int^x P(x, y) dx)] dy$$

$f(y)$ محاسبه شده را در (۷) قرار می‌دهیم و جواب عمومی $u(x, y) = c$ می‌باشد.

تذکره ۱. می‌توان بجای (۷)، نوشت

$$(۹) \quad u = \int^y Q(x, y) dy + f(x)$$

و بعد از محاسبه انتگرال فوق، نسبت به x مشتق گرفته و قرار دهیم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

مثال ۲۳.۲. معادله دیفرانسیل

$$(2xy + 3) dx + (x^2 + 8y) dy = 0$$

را حل کنید.

حل. ابتدا شرط (۴) را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

یعنی معادله دیفرانسیل کامل است.

$$u = \int P(x, y) dx + f(y)$$

$$= \int (2xy + 3) dx + f(y)$$

$$= x^2y + 3x + f(y) \quad (۱)$$

از طرفین (۱) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{df(y)}{dy} = x^2 + 8y$$

$$\frac{df(y)}{dy} = 8y$$

$$f(y) = 4y^2$$

بجای $f(y)$ در (۱) مقدار می‌گذاریم و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$x^2y + 3x + 4y^2 = c.$$

مثال ۲۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{x^3 - y}{x}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را به فرم

$$(x^3 - y) dx - x dy = 0$$

می‌نویسیم، سپس شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

پس معادله دیفرانسیل کامل است

$$u = \int Q(x, y) dy + f(x)$$

$$\begin{aligned} &= f - x \, dy + f(x) \\ &= -xy + f(x) \end{aligned} \quad (1)$$

از طرفین (۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y + \frac{df(x)}{dx} = x^3 - y$$

$$\frac{df(x)}{dx} = x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{4} x^4$$

بجای $f(x)$ در (۱) مقدار می‌گذاریم

$$c = -xy + \frac{1}{4} x^4$$

مثال ۲۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$(x^2 - x + y^2) dx - (e^y - 2xy) dy = 0$$

را حل کنید.

حل. شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

پس معادله دیفرانسیل کامل است

$$\begin{aligned} u &= \int (x^2 - x + y^2) dx + f(y) \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + y^2 x + f(y) \end{aligned} \quad (1)$$

از طرفین (۱) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx + \frac{df(y)}{dy} = -e^y + 2xy$$

$$\frac{df(y)}{dy} = -e^y$$

$$f(y) = -e^y$$

بجای $f(y)$ در (۱)، $-e^y$ قرار می‌دهیم

$$\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + y^2 x - e^y = c$$

مثال ۲۶.۲. معادله دیفرانسیل

$$\cos y \, dx + (y^2 - x \sin y) dy = 0$$

را حل کنید.

حل. شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y$$

پس معادله دیفرانسیل کامل است

$$\begin{aligned} u &= \int \cos y \, dx + f(y) \\ &= x \cos y + f(y) \end{aligned} \quad (1)$$

از طرفین (۱) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \sin y + \frac{df(y)}{dy} = y^2 - x \sin y$$

$$\frac{df(y)}{dy} = y^2$$

$$f(y) = \frac{1}{3} y^3$$

در (۱) بجای $f(y)$ مقدار می‌گذاریم

$$x \cos y + \frac{1}{3} y^3 = c$$

مثال ۲۷.۲. معادله دیفرانسیل

$$(4x^3 \sin^3 y - 2x \sin y) dx + (3x^4 \sin^2 y - x^2) \cos y dy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$\sin y = T \quad (2)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$\cos y dy = dT \quad (3)$$

(۲) و (۳) را در (۱) قرار می‌دهیم، داریم

$$(4x^3 T^3 - 2xT) dx + (3x^4 T^2 - x^2) dT = 0 \quad (4)$$

شرط کامل بودن را برای معادله دیفرانسیل (۴) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial T} = 12x^3 T^2 - 2x \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3 T^2 - 2x$$

یعنی، معادله دیفرانسیل (۴) کامل می‌باشد.

$$u = \int (4x^3 T^3 - 2xT) dx + f(T) \\ = x^4 T^3 - x^2 T + f(T) \quad (5)$$

از طرفین (۵) نسبت به T مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial T} = 3x^4 T^2 - x^2 + \frac{df(T)}{dT} = 3x^4 T^2 - x^2$$

$$\frac{df(T)}{dT} = 0$$

$$f(T) = c$$

در (۵) بجای $f(T)$ ، c می‌گذاریم

$$x^4 T^3 - x^2 T = c \quad (6)$$

در (۶) بجای T ، $\sin y$ می‌گذاریم، داریم

$$x^4 \sin^3 y - x^2 \sin y = c.$$

مجموعه مسائل ۳۰۲

نشان دهید معادلات دیفرانسیل زیر کامل هستند و جواب عمومی را بدست آورید.

$$(x^2 + y) dx + (x - 2y) dy = 0 \quad (1)$$

$$(6x^5 y^3 + 4x^3 y^5) dx + (3x^6 y^2 + 5x^4 y^4) dy = 0 \quad (2)$$

$$x(1 - y^2) dx + y(8 - x^2) dy = 0 \quad (3)$$

$$2x \sin 3y dx + 3x^2 \cos 3y dy = 0 \quad (4)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2) dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = -\frac{ye^x + e^y}{e^x + xe^y} \quad (6)$$

$$\frac{dr}{dQ} = -\frac{r(\sin Q + \cos Q)}{r + \sin Q - \cos Q} \quad (7)$$

$$(e^x \sin y - 2y \sin x) dx + (e^x \cos y + 2 \cos x) dy = 0 \quad (8)$$

$$(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x) dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2) dy = 0, \quad x > 0 \quad (10)$$

$$\left(3x^2 \tan y - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}) dy = 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0 \quad (12)$$

$$\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0 \quad (13)$$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

۱۴ ✓ $(2rQ - \tan Q) dr + r(r - \sec^2 Q) dQ = 0$ ، وقتی $Q = \frac{\pi}{4}$ ، $r = 1$

۱۵ ✓ $\cos Q dr - (r \sin Q + 1) dQ = 0$ ، وقتی $Q = 0$ ، $r = 2$

۱۶ ✓ $(2 - xy^2) dx - (x^2 y) dy = 0$ ، وقتی $y = 1$ ، $x = 2$

۱۷ ✓ $u(u^2 + v^2) du + (v^3 + u^2 v - 1) dv = 0$ ، وقتی $v = 1$ ، $u = 1$

۱۸ ✓ $e^x(y^3 + xy^3 + 1) dx + 3y^2(xe^x - 6) dy = 0$ ، وقتی $y = 1$ ، $x = 0$

۴.۰۲. فاکتورهای انتگرال گیری

اگر معادله دیفرانسیل

(۱) $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$

کامل نباشد، یعنی

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ممکن است بتوان تابع مناسبی مانند $F(x, y) \neq 0$ را پیدا کرد بطوری که طرفین (۱) را در $F(x, y)$ ضرب کنیم، معادله دیفرانسیل کامل شود. چنین تابعی را فاکتور انتگرال* می نامند.

یافتن چنین تابعی کار ساده‌ای نیست و قضیه‌ای برای پیدا کردن فاکتور انتگرال در حالت کلی نداریم. در این بخش سعی شده برای حالات خاص، نحوه پیدا کردن فاکتور انتگرال بیان شود.

قضیه** ۴.۰۲. اگر معادله دیفرانسیل (۱) کامل نباشد و $u(x, y) = c$ جواب عمومی آن باشد آنگاه یک فاکتور انتگرال برای آن یافت می شود (حتی بی نهایت از این فاکتور انتگرال‌ها)

* Integrating Factor

** Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 4d ed. p.31 New York: Wiley

اثبات. از طرفین

$$u(x, y) = c$$

دیفرانسیل می گیریم

(۲) $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$

با مقایسه (۱) و (۲)، نتیجه می گیریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{P} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{Q}$$

اگر نسبت مشترک را $F(x, y) \neq 0$ بگیریم، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = FQ, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = FP$$

با ضرب $F(x, y) \neq 0$ در طرفین (۱)، داریم

(۳) $FP dx + FQ dy = 0$

یا

(۴) $\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$

با توجه به (۲) و (۳) و (۴)، نتیجه می گیریم

(۵) $du = FP dx + FQ dy$
 $= F(P dx + Q dy)$

و این بدان معنی است، که F یک فاکتور انتگرال (۱) می باشد.

اگر طرفین (۵) را در تابعی مانند $k(u)$ ضرب کنیم، داریم

$$k(u) du = k(u) F(P dx + Q dy)$$

که یک معادله کامل است. بنابراین $k(u)F$ نیز یک فاکتور انتگرال دیگر می باشد و چون k تابعی دلخواه u می باشد، پس بی نهایت فاکتور انتگرال برای (۱) داریم

مثال ۲۸.۲. معادله دیفرانسیل

$$x dy - y dx = 0 \quad (1)$$

کامل نیست، زیرا

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

اگر طرفین (۱) را در

$$\frac{1}{x^2}$$

ضرب کنیم، داریم

$$\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0 \quad (2)$$

معادله (۲) کامل است، چون

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

پس یک فاکتور انتگرال، معادله (۱)

$$F = \frac{1}{x^2}$$

می باشد.

حال اگر طرفین (۱) را در

$$\frac{1}{y^2}$$

ضرب کنیم، داریم

$$\frac{x}{y^2} dy - \frac{1}{y} dx = 0 \quad (3)$$

معادله (۳) کامل است، زیرا

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$$

یعنی یک فاکتور انتگرال دیگر، معادله (۱)

$$F = \frac{1}{y^2}$$

می باشد.

همچنین اگر طرفین (۱) را در

$$\frac{1}{xy}$$

ضرب کنیم، داریم

$$\frac{1}{y} dy - \frac{1}{x} dx = 0 \quad (4)$$

معادله (۴) کامل است، زیرا

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

پس

$$F = \frac{1}{xy}$$

نیز یک فاکتور انتگرال برای (۱) می باشد.

توجه. در این مثال، نشان دادیم که یک معادله بیش از یک فاکتور انتگرال دارد و در ضمن فاکتور انتگرال ممکن است تابعی تنها از x و یا تابعی تنها از y باشد.

مثال ۲۹.۲. نشان دهید که

$$F = x^2 y^3$$

یک فاکتور انتگرال، معادله

$$4x dy + 3y dx = 0 \quad (1)$$

می باشد.

حل. طرفین (۱) را در F ضرب می کنیم

$$4x^3 y^3 dy + 3x^2 y^4 dx = 0 \quad (2)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x^3 y^3, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^2 y^3$$

مثال ۳۰۰۲. نشان دهید که

$$F = \frac{y+1}{x^4}$$

یک فاکتور انتگرال، برای معادله دیفرانسیل

$$3(y+1) dx - 2x dy = 0 \quad (1)$$

می باشد. و سپس آنرا حل کنید.

حل. طرفین (۱) را در F ضرب می کنیم

$$3 \frac{(y+1)^2}{x^4} dx - 2 \frac{y+1}{x^3} dy = 0 \quad (2)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6 \frac{y+1}{x^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6 \frac{y+1}{x^4}$$

پس، معادله (۲) کامل است. حال معادله (۲) را حل می کنیم *

* توضیح. هرگاه معادله دیفرانسیل

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

کامل نباشد و F یک فاکتور انتگرال این معادله باشد در این صورت می دانیم،

$$\begin{aligned} u &= \int P dx + f(y) \\ &= \int 3 \frac{(y+1)^2}{x^4} dx + f(y) \\ &= -\frac{(y+1)^2}{x^3} + f(y) \quad (3) \end{aligned}$$

برای پیدا کردن $f(y)$ ، از طرفین (۳) نسبت به y مشتق می گیریم، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2 \frac{y+1}{x^3} + \frac{df(y)}{dy} = -2 \frac{y+1}{x^3}$$

یا

$$\frac{df(y)}{dy} = 0 \quad (4)$$

با انتگرال گیری از طرفین (۴) داریم

$$f(y) = c.$$

در (۳)، بجای $f(y)$ مقدار می گذاریم

$$\frac{(y+1)^2}{x^3} = c \quad (5)$$

→ معادله*

$$FP dx + FQ dy = 0 \quad (ب)$$

کامل است. برای حل معادله (۱)، معادله دیفرانسیل (ب) را حل می کنیم.

فرض کنید جواب معادله (ب)، $u(x, y) = c$ باشد. چون معادله (ب) به فرم

$$F(P dx + Q dy) = 0 \quad (پ)$$

است و چون $u(x, y) = c$ جواب این معادله می باشد، در نتیجه در (پ) صدق

می کند. از طرفی می دانیم که F صفر نیست؛ پس باید $u(x, y) = c$ در معادله

$P dx + Q dy = 0$ صدق کند و این بدان معنی است که $u(x, y) = c$ جواب

معادله (۱) نیز می باشد.

(۵) جواب عمومی معادله (۱) می باشد.

مثال ۳۱.۲. نشان دهید که

$$F = \sec^2 xy$$

یک فاکتور انتگرال، برای معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad (\sin xy \cos xy + xy) dx + x^2 dy = 0$$

می باشد، و سپس آنرا حل کنید.

حل. طرفین (۱) را در F ضرب می کنیم. داریم

$$(2) \quad (\tan xy + xy \sec^2 xy) dx + x^2 \sec^2 xy dy = 0$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \sec^2 xy + x \sec^2 xy + 2x^2 y \sec^2 xy \tan xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sec^2 xy + 2x^2 y \sec^2 xy \tan xy$$

در نتیجه معادله (۲) کامل است. و معادله (۲) را حل می کنیم، جواب بدست آمده، جواب (۱) نیز خواهد بود.

$$u = \int x^2 \sec^2 xy dy + f(x)$$

$$= x \tan xy + f(x) \quad (3)$$

از طرفین (۳) نسبت به x مشتق می گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan xy + xy \sec^2 xy + \frac{df(x)}{dx}$$

$$= \tan xy + xy \sec^2 xy$$

یا

$$(4) \quad \frac{df(x)}{dx} = 0$$

از طرفین (۴) انتگرال می گیریم

$$f(x) = c_1$$

در (۳)، بجای $f(x)$ ، مقدار می گذاریم، داریم

$$x \tan xy = c$$

توجه: برای تعیین فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل

$$(6) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

حالات خاص زیر را بررسی می کنیم. فرض کنید (۶) دارای فاکتور انتگرال $F(x, y) \neq 0$ باشد؛ در اینصورت باید

$$(7) \quad FP dx + FQ dy = 0$$

کامل باشد، یعنی

$$\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x}$$

یا

$$(8) \quad F \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial x}$$

طرفین (۸) را بر F تقسیم می کنیم

$$(9) \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial \ln F}{\partial x} - P \frac{\partial \ln F}{\partial y}$$

اگر الف:

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x)$$

باشد در اینصورت معادله دیفرانسیل (۶) دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F(x) = e^{\int f(x) dx}$$

خواهد بود.

اثبات. فرض کنید، معادله (۶) دارای فاکتور انتگرالی به فرم تابعی $F(x)$ باشد.

$F(x)$ باشد در اینصورت (۹) به فرم زیر درمی آید

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{d \ln F}{dx}$$

یا

$$(۱۰) \quad \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{d \ln F}{dx}$$

طرف راست (۱۰) فقط تابع x می باشد پس باید طرف چپ نیز تابعی تنها از x باشد، مانند $f(x)$

$$\frac{d \ln F}{dx} = f(x)$$

با انتگرال گیری، از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln F = \int f(x) dx$$

یا

$$F = e^{\int f(x) dx}$$

مثال ۳۲.۲... معادله دیفرانسیل

$$(x + y^2) dx - 2xy dy = 0 \quad (۱)$$

را حل کنید

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$$

پس معادله دیفرانسیل کامل نیست

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

$$F = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

طرفین معادله (۱) را در $1/x^2$ ضرب می کنیم

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) dx - 2 \frac{y}{x} dy = 0 \quad (۲)$$

نشان می دهیم که معادله (۲)، کامل است

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \frac{y}{x^2}$$

و معادله دیفرانسیل (۲) را حل می کنیم

$$u = f - \frac{2y}{x} dy + f(x)$$

$$= -\frac{y^2}{x} + f(x) \quad (۳)$$

از طرفین (۳) نسبت به x مشتق می گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

یا

$$f(x) = \ln x$$

در (۳) بجای $f(x)$ ، مقدار می گذاریم

$$-\frac{y^2}{x} + \ln x = c.$$

ب: اگر

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -f(y)$$

باشد. در اینصورت معادله دیفرانسیل (۶) دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F(y) = e^{\int f(y) dy}$$

خواهد بود.

اثبات. اگر معادله دیفرانسیل (۶)، دارای فاکتور انتگرال به فرم تابعی، تنها از y ، مانند $F(y)$ باشد در اینصورت (۹) به فرم زیر درمی آید.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -P \frac{d \ln F}{dy}$$

یا

$$-\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{d \ln F}{dy}$$

طرف راست عبارت بالا، فقط تابع y می باشد. پس باید طرف چپ نیز تابعی تنها از y ، مانند $f(y)$ باشد

$$\frac{d \ln F}{dy} = f(y)$$

یا

$$\ln F = \int f(y) dy$$

$$F = e^{\int f(y) dy}$$

مثال ۳۳.۲. معادله دیفرانسیل

$$y(1+xy) dx - x dy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{2(1+xy)}{y(1+xy)} \\ = \frac{2}{y}$$

$$F = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y}$$

$$= \frac{1}{y^2}$$

طرفین معادله (۱) را در $1/y^2$ ضرب می کنیم

$$\left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0 \quad (2)$$

نشان می دهیم که معادله (۲)، کامل است

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

معادله (۲) را حل می کنیم،

$$u = \int \left(\frac{1}{y} + x \right) dx + f(y)$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{1}{2} x^2 + f(y) \quad (3)$$

از طرفین (۳) نسبت به y مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + \frac{df(y)}{dy} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{df(y)}{dy} = 0$$

یا

$$f(y) = c_1$$

در (۳)، بجای $f(y)$ ، مقدار می گذاریم.

یا

$$F(z) = e^{\int f(z) dz}$$

مقال ۳۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$(y + x^4 y^2) dx + x dy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2x^4 y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\frac{1}{yQ - xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{2x^4 y}{xy - xy - x^6 y^2} = -\frac{2}{xy}$$

$$F = e^{2 \int \frac{dx}{x}} = e^{2 \ln x}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

پس، معادله (۱) دارای فاکتور انتگرال

$$F = \frac{1}{x^2 y^2}$$

می باشد.

طرفین (۱) را در $1/x^2 y^2$ ضرب می کنیم

$$\left(\frac{1}{x^2 y} + x^2 \right) dx + \frac{1}{xy^2} dy = 0 \quad (2)$$

نشان می دهیم، معادله (۲) کامل است.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 y^2}$$

معادله دیفرانسیل (۲) را حل می کنیم.

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$$

پ: اگر

$$\frac{1}{yQ - xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(xy)$$

باشد. در این صورت معادله دیفرانسیل (۶) دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F(Z) = e^{\int f(z) dz}, \quad Z = xy$$

خواهد بود.

اثبات. اگر معادله (۶)، دارای فاکتور انتگرال به فرم، تابعی از $Z = xy$ ، مانند $F(Z)$ باشد در این صورت (۹) به فرم زیر درمی آید:

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{F'(z)}{F(z)} = y \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{F'(z)}{F(z)} = x \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (Qy - Px) \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

یا

$$\frac{1}{yQ - xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

طرف راست عبارت بالا، فقط تابع $Z = xy$ می باشد. پس باید طرف چپ، نیز تابعی تنها از xy ، باشد مانند $f(xy)$.

$$\frac{d}{dz} \ln F(z) = f(z)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا، داریم

$$\ln F(z) = \int f(z) dz$$

$$u = \int \left(\frac{1}{x^2 y} + x^2 \right) dx + f(y)$$

$$= -\frac{1}{xy} + \frac{1}{3} x^3 + f(y) \quad (3)$$

از طرفین (۳)، نسبت به y ، مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{xy^2}$$

$$\frac{df(y)}{dy} = 0$$

$$f(y) = c_1$$

در (۳)، بجای $f(y)$ مقدار می‌گذاریم.

$$-\frac{1}{xy} + \frac{x^3}{3} = c.$$

ت: اگر

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xQ - yP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x^2 + y^2)$$

باشد. در اینصورت، معادله دیفرانسیل (۶)، دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F(z) = e^{\int f(z) dz}, \quad z = x^2 + y^2$$

خواهد بود.

اثبات. اگر معادله (۶)، دارای فاکتور انتگرال به فرم تابعی از $z = x^2 + y^2$ ، مانند $F(z)$ باشد در اینصورت (۹) به فرم زیر درمی‌آید.

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{F'(z)}{F(z)} = 2x \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{F'(z)}{F(z)} = 2y \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(xQ - yP) \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

یا

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xQ - yP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

طرف راست عبارت بالا، تابعی تنها از z ، می‌باشد. پس باید طرف چپ نیز تابعی تنها از z ، مانند $f(z)$ باشد.

$$\frac{d}{dz} \ln F(z) = f(z)$$

$$\ln F(z) = \int f(z) dz$$

$$F(z) = e^{\int f(z) dz}$$

مثال ۳۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$(x - xy) dx + (y + x^2) dy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xQ - yP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{-3x}{2(x^3 + xy^2)} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$F = e^{-3/2 \int \frac{dx}{x} + 3/2 \int \frac{dy}{y}} = e^{-3/2 \ln x + 3/2 \ln y} = \frac{1}{x^{3/2} y^{3/2}}$$

$$F = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

طرفین معادله (۱) را در F ، ضرب می‌کنیم، داریم

$$\frac{x - xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = 0 \quad (2)$$

$$F(z) = e^{\int f(z) dz}$$

مثال ۳۶.۲. معادله دیفرانسیل

$$4y^2 dx - xy dy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. $\frac{\partial P}{\partial y} = 8y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -y$

$$\frac{y^2}{xP+yQ} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{y^2}{4xy^2-xy^2} (9y) = 3 \frac{y}{x}$$

با فرض $z = x/y$

$$F = e^{\int \frac{dz}{z}} = e^{\ln z} = z^3$$

یا

$$F = \left(\frac{x}{y} \right)^3$$

طرفین معادله (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$4x^3 y^1 dx - x^4 y^{-2} dy = 0 \quad (2)$$

نشان می‌دهیم که معادله (۲) کامل است.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4x^3 y^{-2} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4x^3 y^{-2}$$

معادله دیفرانسیل کامل را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} u &= \int 4x^3 y^1 dx + f(y) \\ &= x^4 y^1 + f(y) \end{aligned} \quad (3)$$

از طرفین (۳) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^4 y^{-2} + \frac{df(y)}{dy} = -x^4 y^{-2}$$

معادله دیفرانسیل (۲) کامل است و جواب عمومی آن بصورت زیر می‌باشد.

$$\frac{y-1}{\sqrt{x^2 y^2}} = c$$

ث: اگر

$$\frac{y^2}{xP+yQ} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

باشد. در اینصورت، معادله دیفرانسیل (۹)، دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F(z) = e^{\int f(z) dz} \quad , \quad z = \frac{x}{y}$$

خواهد بود.

اثبات. فرض کنید معادله (۶) دارای فاکتور انتگرال به فرم تابعی از $z = x/y$ باشد.

مانند $F(z)$ در اینصورت (۹) به فرم زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{1}{y} Q + \frac{x}{y^2} P \right) \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

یا

$$\frac{y^2}{yQ+xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{d}{dz} \ln F(z)$$

طرف راست عبارت بالا، تابعی تنها از $z = x/y$ می‌باشد. پس باید طرف چپ نیز

تابعی تنها از z باشد، مانند $f(z)$

$$\frac{d}{dz} \ln F(z) = f(z)$$

$$\ln F(z) = \int f(z) dz$$

$$\frac{df(y)}{dy} = 0$$

$$f(y) = c_1$$

در (۳)، بجای $f(y)$ ، مقدار می‌گذاریم

$$x^4 y^{-1} = c$$

ج: اگر

$$\frac{x^2}{xP + yQ} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$$

باشد، در اینصورت معادله دیفرانسیل (۶)، دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F(z) = e^{\int f(z) dz}, \quad z = y/x$$

خواهد بود.

اثبات. مشابه با حالت "ث" می‌باشد. (تعرین شماره ۲۵)

ج: اگر معادله دیفرانسیل (۶)، همگن باشد، دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F(x, y) = \frac{1}{xP + yQ}$$

خواهد بود. البته اگر $xP + yQ \neq 0$ باشد

اثبات. می‌دانیم اگر معادله دیفرانسیل

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

همگن باشد، آنگاه می‌توان آنرا به فرم

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(۱۱)

نوشت. کفایت نشان دهیم (۱۱) دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$(12) \quad F = \left(y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$$

می‌باشد. ابتدا (۱۱) را به فرم زیر می‌نویسیم

$$(13) \quad f\left(\frac{y}{x}\right) dx - dy = 0$$

طرفین (۱۳) را در F ضرب می‌کنیم

$$(14) \quad \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{y - xf\left(\frac{y}{x}\right)} dx - \frac{1}{y - xf\left(\frac{y}{x}\right)} dy = 0$$

نشان می‌دهیم (۱۴) کامل است.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) [y - xf\left(\frac{y}{x}\right)] - [1 - f'\left(\frac{y}{x}\right)] f\left(\frac{y}{x}\right)}{(y - xf\left(\frac{y}{x}\right))^2}$$

$$(15) = \frac{\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - f\left(\frac{y}{x}\right)}{(y - xf\left(\frac{y}{x}\right))^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right)}{(y - xf\left(\frac{y}{x}\right))^2}$$

$$(16) = \frac{\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - f\left(\frac{y}{x}\right)}{(y - xf\left(\frac{y}{x}\right))^2}$$

با مقایسه (۱۵) و (۱۶)، نتیجه می‌گیریم که (۱۴) کامل است و در نتیجه (۱۲)، فاکتور انتگرال (۱۱) می‌باشد*

مثال ۳۷.۲. یک فاکتور انتگرال برای معادله دیفرانسیل
(1) $(3x^2 - xy) dx + x^2 dy = 0$
پیدا کنید.

حل. معادله (۱)، همگن می‌باشد لذا

$$F = \frac{1}{xP + yQ} = \frac{1}{3x^3}$$

طرفین (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{3x^2}\right) dx + \frac{1}{3x} dy = 0 \quad (2)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{3x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{3x^2}$$

ح: اگر معادله دیفرانسیل (۶) به‌فوم زیر باشد

$$yf_1(x,y) dx + xf_2(x,y) dy = 0$$

آنگاه دارای فاکتور انتگرال به‌فوم

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow -f\left(\frac{y}{x}\right) dx + dy = 0$$

$$\frac{1}{xP + yQ} = \frac{1}{y - xf\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$F = \frac{1}{xy(f_1(xy) - f_2(xy))}$$

خواهد بود. البته باید $f_1(xy) \neq f_2(xy)$ باشد

اثبات. طرفین معادله را در F ضرب می‌کنیم

$$\frac{yf_1(xy)}{xy(f_1(xy) - f_2(xy))} dx + \frac{xf_2(xy)}{xy(f_1(xy) - f_2(xy))} dy = 0$$

شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(xy)}{x(f_1(xy) - f_2(xy))} \right) =$$

$$\frac{x^2 f_1'(xy) [f_1(xy) - f_2(xy)] - x f_1(xy) [x f_1'(xy) - x f_2'(xy)]}{x^2 (f_1(xy) - f_2(xy))^2}$$

$$= \frac{f_1(xy) f_2'(xy) - f_2(xy) f_1'(xy)}{(f_1(xy) - f_2(xy))^2}$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(xy)}{y(f_1(xy) - f_2(xy))} \right) =$$

$$\frac{y^2 f_2'(xy) [f_1(xy) - f_2(xy)] - y^2 f_2(xy) [f_1'(xy) - f_2'(xy)]}{y^2 (f_1(xy) - f_2(xy))^2}$$

$$= \frac{f_1(xy) f_2'(xy) - f_2(xy) f_1'(xy)}{(f_1(xy) - f_2(xy))^2}$$

با مقایسه (a) و (b)، نتیجه می‌گیریم که F ، یک فاکتور انتگرال معادله می‌باشد

مثال ۳۸.۲. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad (2y + 3xy^2) dx + (x + 2x^2 y) dy = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله به فرم

$$y(2+3xy) dx + x(1+2xy) dy = 0$$

می باشد، لذا دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F = \frac{1}{xy(2+3xy-1-2xy)}$$

$$= \frac{1}{xy(1+xy)}$$

می باشد. طرفین معادله (۱) را در F ضرب می کنیم

$$\frac{2+3xy}{x(1+xy)} dx + \frac{1+2xy}{y(1+xy)} dy = 0 \quad (2)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x^2(1+xy) - x^2(2+3xy)}{x^2(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y^2(1+xy) - y^2(1+2xy)}{y^2(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

پس معادله (۲) کامل می باشد.

$$u = \int \frac{2+3xy}{x(1+xy)} dx + f(y)$$

$$= 2 \int \frac{1+2xy}{x(1+xy)} dx - \int \frac{y}{1+xy} dx + f(y)$$

$$= 2 \ln x(1+xy) - \ln(1+xy) + f(y)$$

$$= \ln x^2 + \ln(1+xy) + f(y) \quad (3)$$

از طرفین (۳) نسبت به y مشتق می گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1+xy} + \frac{df(y)}{dy} = \frac{1+2xy}{y(1+xy)}$$

$$\frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$f(y) = \ln y$$

در (۳)، بجای $f(y)$ ، مقدار می گذاریم

$$\ln x^2 + \ln(1+xy) + \ln y = \ln c$$

$$x^2 y(1+xy) = c$$

خ: اگر معادله دیفرانسیل به فرم

$$(14) \quad y(Kx^a y^b + Lx^c y^d) dx + x(Mx^a y^b + Nx^c y^d) dy = 0$$

باشد، آنگاه معادله دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F = x^\alpha y^\beta$$

خواهد بود. البته اگر $KN - ML \neq 0$ باشد.

و α و β از حل دستگاه زیر بدست می آیند

$$\left\{ \begin{array}{l} K(\beta + b + 1) = M(\alpha + a + 1) \\ L(\beta + d + 1) = N(\alpha + c + 1) \end{array} \right.$$

$$L(\beta + d + 1) = N(\alpha + c + 1)$$

(K و L و M و N ، مقادیر ثابت می باشند)

مثال ۳۹۰۲. یک فاکتور انتگرال برای معادله دیفرانسیل

$$y(4x + 3y^3) dx + x(2x + 5y^3) dy = 0 \quad (1)$$

پیدا کنید.

حل. چون

$$KN - ML = 20 - 6 \neq 0$$

است، لذا معادله دارای فاکتور انتگرال به فرم

$$F = x^\alpha y^\beta$$

می باشد که α و β از حل دستگاه زیر بدست می آیند

$$\left\{ \begin{array}{l} 4(\beta + 0 + 1) = 2(\alpha + 1 + 1) \\ 3(\beta + 3 + 1) = 5(\alpha + 0 + 1) \end{array} \right.$$

$$3(\beta + 3 + 1) = 5(\alpha + 0 + 1)$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1$$

$$F = x^2 y$$

ضرایب جملات متشابه را مساوی قرار می دهیم

$$2(\beta+1) = -(\alpha+1) \quad , \quad \beta+2=0$$

$$\beta = -2 \quad , \quad \alpha = 1$$

$$F = xy^2$$

مثال ۰۴۱.۰۲. برای معادله دیفرانسیل

$$(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$$

یک فاکتور انتگرال به فرم تابعی از $z = (y^2 - x^2)$ پیدا کنید.

حل. فرض کنید $F(z)$ یک فاکتور انتگرال معادله باشد. با توجه به (۹) داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial \ln F}{\partial x} - P \frac{\partial \ln F}{\partial y} \quad (۰)$$

از طرفی

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$$

$$\frac{\partial \ln F}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{\partial \ln F}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{F'(z)}{F(z)}$$

در (۰) جای گذاری می کنیم.

$$4y = 4x^2y \frac{F'(z)}{F(z)} - (x^2 + y^2 + 1)(2y) \frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{2}{x^2 - y^2 - 1} = \frac{-2}{z+1}$$

$$\ln F(z) = -2 \ln(z+1)$$

$$F(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

طرفین معادله (۱) را در xy^2 ضرب می کنیم و نشان می دهیم که F یک فاکتور انتگرال برای (۱) می باشد

$$(4x^3y^2 + 3x^2y^5) dx + (2x^4y + 5x^2y^4) dy = 0 \quad (۲)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 8x^3y + 15x^2y^4$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 8x^3y + 15x^2y^4$$

تذکر. چون بخاطر سپردن فرم معادله و دستگاه ممکن است مشکل باشد، برای تعیین فاکتور انتگرال، معادله را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می کنیم، سپس شرط کامل بودن را برقرار می سازیم

مثال ۰۴۰.۰۲. یک فاکتور انتگرال برای معادله دیفرانسیل

$$y(2 - 3xy) dx - x dy = 0$$

پیدا کنید.

حل. طرفین معادله را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می کنیم

$$(2x^\alpha y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1} y^{\beta+2}) dx - x^{\alpha+1} y^\beta dy = 0$$

شرط کامل بودن را برقرار می کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+1)x^\alpha y^\beta - 3(\beta+2)x^{\alpha+1} y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+1)x^\alpha y^\beta$$

شرط کامل بودن به شرح زیر است.

$$2(\beta+1)x^\alpha y^\beta - 3(\beta+2)x^{\alpha+1} y^{\beta+1} = -(\alpha+1)x^\alpha y^\beta$$

مجموعه مسائل ۴.۲

با پیدا کردن فاکتور انتگرال، معادله‌های زیر را حل کنید.

$$(x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0 \quad \cdot 1$$

$$(x^4 y^2 - y) dx + (x^2 y^4 - x) dy = 0 \quad \cdot 2$$

$$y(2x + y^3) dx - x(2x - y^3) dy = 0 \quad \cdot 3$$

$$(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0 \quad \cdot 4$$

$$e^x(x+1) dx + (y e^y - x e^x) dy = 0 \quad \cdot 5$$

$$y(y+2x+1) dx - x(2y+x-1) dy = 0 \quad \cdot 6$$

$$3(y+x)^2 dx + x(3y+2x) dy = 0 \quad \cdot 7$$

$$(x + \sin x + \sin y) dx + \cos y dy = 0 \quad \cdot 8$$

$$(x^4 \ln x - 2xy^3) dx + 3x^2 y^2 dy = 0 \quad \cdot 9$$

$$y' = e^{2x} + y - 1 \quad \cdot 10$$

$$dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right) dy = 0 \quad \cdot 11$$

$$y dx + (2xy - e^{2y}) dy = 0 \quad \cdot 12$$

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0 \quad \cdot 13$$

$$\left(3x + \frac{6}{y}\right) dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right) dy = 0 \quad \cdot 14$$

$$(xy - 2y^2) dx - (x^2 - 3xy) dy = 0 \quad \cdot 15$$

$$= \frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$$

مثال ۴.۲.۲. برای معادله دیفرانسیل

$$(3y^2 - x) dx + (2y^3 - 6xy) dy = 0$$

یک فاکتور انتگرال به فرم تابعی از $z = x + y^2$ پیدا کنید.

حل. می‌دانیم اگر $F(z)$ یک فاکتور انتگرال معادله باشد، با توجه به (۹)، داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial \ln F}{\partial x} - P \frac{\partial \ln F}{\partial y} \quad (\bullet)$$

از طرفی

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -6y$$

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{\partial \ln F(z)}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{F'(z)}{F(z)}$$

در (۱۰) جای‌گذاری می‌کنیم

$$12y = (2y^3 - 6xy) \frac{F'(z)}{F(z)} - 2y(3y^2 - x) \frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{-3}{y^2 + x} = \frac{-3}{z}$$

$$\ln F(z) = -3 \ln z$$

$$F(z) = \frac{1}{z^3}$$

$$= \frac{1}{(x+y^2)^3}$$

$$(۲) \quad \frac{dy}{y} = -f(x) dx$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد. با انتگرال‌گیری از طرفین (۲) داریم

$$\ln y = -\int f(x) dx + c_1$$

$$y = C e^{-\int f(x) dx}$$

اگر معادله (۱) ناهمگن باشد، ابتدا آنرا به فرم زیر می‌نویسیم

$$(۳) \quad (y f(x) - q(x)) dx + dy = 0$$

معادله (۳) در حالت کلی از نوع متغیرهای از هم جدا و همگن نیست، لذا شرط کامل بودن را برای (۳) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

در نتیجه در حالت کلی، معادله (۳) کامل هم نیست. نشان می‌دهیم که معادله (۱) دارای فاکتور انتگرال به فرم تابعی تنها از x می‌باشد

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x)$$

و با توجه به مطالب بیان شده در قسمت "الف" بخش قبل، داریم

$$F = e^{\int f(x) dx}$$

طرفین (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$(۴) \quad e^{\int f(x) dx} \left(\frac{dy}{dx} + y f(x) \right) = q(x) e^{\int f(x) dx}$$

و چون

$$(۵) \quad \frac{d}{dx} (y e^{\int f(x) dx}) = \frac{dy}{dx} e^{\int f(x) dx} + y f(x) e^{\int f(x) dx}$$

$$y dx + x(x^2 y - 1) dy = 0 \quad \cdot ۱۶$$

$$(x+y) dx - (x-y) dy = 0 \quad \cdot ۱۷$$

$$(y + \ln x) dx - x dy = 0 \quad \cdot ۱۸$$

$$y(y^2 - 2x^2) dx + x(2y^2 - x^2) dy = 0 \quad \cdot ۱۹$$

۲۰. حالت "ج" را اثبات کنید.

۵۰۲. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

تعریف ۴۰۲. اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بتوان به فرم

$$A(x) \frac{dy}{dx} + B(x)y + c(x) = 0$$

نوشت، آن را خطی گوئیم. در فاصله‌ای که $A(x) \neq 0$ باشد، می‌توانیم طرفین را بر $A(x)$ تقسیم کنیم.

$$(۱) \quad \frac{dy}{dx} + y f(x) = q(x)$$

اگر در (۱) $q(x) \equiv 0$ باشد، معادله را همگن و در غیر اینصورت آنرا ناهمگن نامند.

در زیر به بررسی روشی جهت پیدا کردن فرمولی برای جواب عمومی معادله (۱) می‌پردازیم.

فرض کنید $q(x), f(x)$ هر دو در فاصله I پیوسته باشند. جواب عمومی را نیز در این فاصله پیدا می‌کنیم.

روش اول: اگر معادله (۱) همگن باشد.

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = 0$$

با توجه به (۵)، (۴) به فرم زیر نوشته می شود

$$(۶) \quad \frac{d}{dx}(y e^{\int f(x) dx}) = q(x) e^{\int f(x) dx}$$

از طرفین (۶) نسبت به x انتگرال می گیریم، داریم

$$y e^{\int f(x) dx} = \int q(x) e^{\int f(x) dx} dx + c$$

$$(۷) \quad y = e^{-\int f(x) dx} [\int q(x) e^{\int f(x) dx} dx + c]$$

با فرض

$$g(x) = \int f(x) dx$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول (۱)، به فرم

$$(۸) \quad y = e^{-g(x)} [\int q(x) e^{g(x)} dx + c]$$

می باشد.

مثال ۴۳.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' + 2y = e^x$$

را حل کنید.

حل. با مقایسه این معادله با (۱)، داریم

$$f(x) = 2, \quad q(x) = e^x$$

با انتگرال گیری از $f(x)$ داریم

$$g(x) = \int 2 dx = 2x$$

جواب عمومی به فرم (۸) می باشد

$$y = e^{-2x} [\int e^x e^{2x} dx + c]$$

$$= e^{-2x} \left(\frac{1}{3} e^{3x} + c \right)$$

$$= \frac{1}{3} e^x + c e^{-2x}$$

مثال ۴۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' - xy = x, \quad y(0) = 0$$

را حل کنید.

$$f(x) = -x, \quad q(x) = x. \quad \text{حل.}$$

$$g(x) = \int -x dx = -\frac{1}{2} x^2$$

با توجه به (۸)، جواب عمومی معادله به فرم

$$y = e^{\frac{1}{2} x^2} [\int x e^{-\frac{1}{2} x^2} dx + c]$$

$$= e^{\frac{1}{2} x^2} \left[-e^{-\frac{1}{2} x^2} + c \right]$$

$$= -1 + c e^{\frac{1}{2} x^2}$$

با توجه به شرط اولیه، $y(0) = 0$ داریم

$$0 = -1 + c$$

$$c = 1$$

در جواب عمومی بجای c ، مقدار می گذاریم

$$y = e^{\frac{1}{2} x^2} - 1$$

مثال ۴۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$\tan x \frac{dy}{dx} + y = 3x \sec x$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به فرم (۱) می نویسیم ، با تقسیم طرفین بر $\tan x$ ، داریم

$$y' + y \cot x = 3x \csc x$$

$$f(x) = \cot x \quad , \quad q(x) = 3x \csc x$$

$$g(x) = \int \cot x \, dx = \ln \sin x$$

با توجه به (۸) ، جواب عمومی معادله به فرم

$$y = e^{-\ln \sin x} [\int 3x \csc x e^{\ln \sin x} \, dx + C]$$

$$= \frac{1}{\sin x} [\int 3x \csc x \sin x \, dx + C]$$

$$= \frac{1}{\sin x} [\int 3x \, dx + C]$$

$$= \frac{3}{2} x^2 \csc x + C \csc x$$

روش دوم : روش تغییر پارامتر . برای حل معادله دیفرانسیل (۱) .

ابتدا معادله همگن متناظر را حل می کنیم

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x) \, dx$$

معادله بالا از نوع متغیرهای از هم جدا می باشد و جواب آن به صورت

$$(9) \quad y = c e^{-\int f(x) \, dx}$$

است که در (۹) ، c عدد ثابت دلخواه می باشد . و (۹) جواب عمومی معادله همگن متناظر است که این جواب در معادله غیر همگن (۱) صدق نخواهد کرد . ولی اگر c را بعنوان تابعی از x فرض کنیم ، آنگاه می توانیم این تابع $(c(x))$ را چنان تعیین

کنیم که (۹) در (۱) صدق کند

برای تعیین $c(x)$ از طرفین (۹) نسبت به x مشتق می گیریم ، داریم

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = c'(x) e^{-\int f(x) \, dx} - c(x) f(x) e^{-\int f(x) \, dx}$$

(۱۰) را در (۱) قرار می دهیم

$$c'(x) e^{-\int f(x) \, dx} - c(x) f(x) e^{-\int f(x) \, dx} + c(x) f(x) e^{-\int f(x) \, dx} = q(x)$$

یا

$$(11) \quad c'(x) = q(x) e^{\int f(x) \, dx}$$

با انتگرال گیری نسبت به x از طرفین (۱۱) ، داریم

$$(12) \quad c(x) = \int q(x) e^{\int f(x) \, dx} \, dx + \lambda$$

در (۹) ، بجای c ، (۱۲) را قرار می دهیم ، جواب عمومی به فرم زیر می باشد

$$(13) \quad y = e^{-\int f(x) \, dx} (\int q(x) e^{\int f(x) \, dx} \, dx + \lambda)$$

که همان (۷) می باشد .

مثال ۴۶.۲ . معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله همگن متناظر را حل می کنیم

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -2 dx \quad (2)$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} \ln y &= -2x + c_1 \\ y &= C e^{-2x} \end{aligned} \quad (3)$$

در (۳) C را بعنوان تابعی از x چنان تعیین می‌کنیم که (۳) در (۱) صدق کند. از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx} = C'(x) e^{-2x} - 2C(x) e^{-2x} \quad (4)$$

در (۱) بجای $\frac{dy}{dx}$ ، (۴) را و بجای y ، (۳) را قرار می‌دهیم، داریم

$$C'(x) e^{-2x} - 2C(x) e^{-2x} + 2C(x) e^{-2x} = x^2 + 2x$$

$$C'(x) = (x^2 + 2x) e^{2x}$$

$$C(x) = \int (x^2 + 2x) e^{2x} dx + \lambda$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + \lambda \quad (5)$$

در (۳) بجای C ، (۵) را قرار می‌دهیم، جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد

$$y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x}$$

مثال ۴۷.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' - \frac{1}{2x} y = \frac{3}{2} x \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله همگن متناظر را حل می‌کنیم

$$y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \quad (2)$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد. از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln x + \ln c$$

$$y = C x^{1/2} \quad (3)$$

حال C را بعنوان تابعی از x چنان تعیین می‌کنیم که (۳) در (۱) صدق کند. برای اینکار از طرفین (۳) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$y' = C'(x) x^{1/2} + \frac{1}{2} x^{-1/2} C(x) \quad (4)$$

(۳) و (۴) را در (۱) قرار می‌دهیم، داریم

$$C'(x) x^{1/2} + \frac{1}{2} x^{-1/2} C(x) - \frac{1}{2x} x^{1/2} C(x) = \frac{3}{2} x$$

$$C'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$C(x) = \frac{3}{2} \int x^{1/2} dx + \lambda$$

$$= x^{3/2} + \lambda \quad (5)$$

در (۳) بجای C ، (۵) را قرار می‌دهیم، جواب عمومی به‌فرم زیر درمی‌آید

$$y = x^2 + \lambda x^{1/2}$$

تذکر (۱): یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند نسبت به x بعنوان تابعی از y خطی باشد؛ و صورت کلی آن به‌فرم

(۱۴)

$$\frac{dx}{dy} + x f(y) = q(y)$$

$$y' = \frac{y}{2y \operatorname{Ln} y + y - x}$$

را حل کنید .

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y(2 \operatorname{Ln} y + 1) - x}{y} \quad \text{حل .}$$

$$= 2 \operatorname{Ln} y + 1 - \frac{x}{y}$$

یا

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 2 \operatorname{Ln} y + 1 \quad (1)$$

معادله (۱) ، یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به x به عنوان تابعی از y می باشد

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad , \quad q(y) = 2 \operatorname{Ln} y + 1$$

$$g(y) = \int f(y) dy$$

$$= \int \frac{1}{y} dy$$

$$= \operatorname{Ln} y$$

با توجه به (۱۵) ، جواب عمومی عبارت است از

$$x = e^{\operatorname{Ln} y} [\int (2 \operatorname{Ln} y + 1) e^{\operatorname{Ln} y} dy + c]$$

$$= \frac{1}{y} [\int y(2 \operatorname{Ln} y + 1) dy + c]$$

$$= \frac{1}{y} \left[\frac{1}{2} y^2 + c + 2 \int y \operatorname{Ln} y dy \right]$$

و برای محاسبه $\int y \operatorname{Ln} y dy$ به طریق زیر عمل می کنیم

می باشد . جواب عمومی (۱۴) به فرم (۸) است با این تفاوت که جای x با y عوض می شود و جواب عمومی (۱۴) به فرم

$$x = e^{-g(y)} [\int q(y) e^{g(y)} dy + c] \quad (15)$$

که در آن

$$g(y) = \int f(y) dy$$

می باشد .

مثال ۴۸.۲ . معادله دیفرانسیل

$$y'(x \sin y + 2 \sin 2y) = 1$$

را حل کنید .

حل .

$$x \sin y + 2 \sin 2y = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} - x \sin y = 2 \sin 2y \quad (1)$$

معادله (۱) ، یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به x به عنوان تابعی از y می باشد

$$f(y) = -\sin y \quad , \quad q(y) = 2 \sin 2y$$

$$g(y) = \int f(y) dy$$

$$= -\int \sin y dy$$

$$= \cos y$$

با توجه به (۱۵) ، جواب عمومی معادله به صورت

$$x = e^{-\cos y} [\int 2 \sin 2y e^{\cos y} dy + C]$$

$$= e^{-\cos y} [4 \int \sin y \cos y e^{\cos y} dy + C]$$

$$= e^{-\cos y} [-4 \cos y e^{\cos y} + 4 e^{\cos y} + C]$$

$$= -4 \cos y + 4 + C e^{-\cos y}$$

$$u = \ln y \Rightarrow du = \frac{dy}{y}$$

$$\begin{aligned} \int y \ln y \, dy &= \int u e^{2u} \, du = \frac{1}{2} u e^{2u} - \frac{1}{4} e^{2u} \\ &= \frac{1}{2} y^2 \ln y - \frac{1}{4} y^2 \end{aligned}$$

در نتیجه، جواب عمومی به فرم زیر می باشد.

$$x = \frac{c}{y} + y \ln y$$

در این قسمت به بررسی معادلاتی می پردازیم که قابل تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی می باشند.

الف: معادله برنولی. صورت کلی این معادله به فرم

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} + yf(x) = y^n g(x)$$

می باشد که در آن $n \in \mathbb{R}$ ولی n ، صفر یا یک نیست، زیرا اگر $n=0$ یا $n=1$ باشد، در این صورت (۱۶)، به فرم (۱) می شود که خطی است.

برای حل این معادله، طرفین را y^{-n} تقسیم کرده و تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ می دهیم، آنگاه تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می شود. زیرا،

$$(17) \quad u = y^{1-n}, \quad \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

طرفین (۱۶) را بر y^{-n} تقسیم می کنیم

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n} f(x) = g(x)$$

طرفین معادله بالا را در $(1-n)$ ضرب می کنیم

$$(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)y^{1-n} f(x) = (1-n)g(x)$$

با توجه به (۱۷)

$$(18) \quad \frac{du}{dx} + (1-n)u f(x) = (1-n)g(x)$$

(۱۸) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول، نسبت به u به عنوان تابعی از x می باشد. و با توجه به (۸) جواب عمومی به فرم

$$(19) \quad u = y^{1-n} = e^{\int (1-n)f(x) dx} \left[\int (1-n)g(x) e^{\int (1-n)f(x) dx} dx + C \right]$$

می باشد.

مثال ۵۰.۲. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} - y = xy^2$$

را حل کنید.

حل. معادله (۱)، برنولی می باشد. لذا طرفین را بر y^2 تقسیم می کنیم

$$(2) \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} - y^{-1} = x$$

تغییر متغیر $u = y^{-1}$ می دهیم

$$(3) \quad u = y^{-1}, \quad \frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$$

با قرار دادن (۳) در (۲) داریم

$$\frac{du}{dx} + u = -x \quad (۴)$$

معادله دیفرانسیل (۴)، معادله خطی مرتبه اول نسبت به تابع u می باشد. که در آن

$$f(x) = 1, \quad q(x) = -x$$

$$g(x) = \int f(x) dx = \int dx = x$$

و با توجه به (۸)

$$u = e^{-x} [\int -x e^x dx + c]$$

$$= e^{-x} [(1-x)e^x + c]$$

$$= 1 - x + c e^{-x}$$

و جواب عمومی معادله (۱) به فرم زیر می باشد:

$$\frac{1}{y} = 1 - x + c e^{-x}$$

مثال ۵۱.۲. معادله دیفرانسیل

$$(2xy^5 - y) dx + 2x dy = 0 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله (۱) را به فرم (۱۶) بیان می کنیم

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -y^6 \quad (۲)$$

معادله (۲)، برنولی می باشد، طرفین را بر y^6 تقسیم می کنیم

$$y^6 \frac{dy}{dx} - \frac{y^4}{2x} = -1 \quad (۳)$$

تغییر متغیر $u = y^{-4}$ می دهیم

$$u = y^{-4}, \quad \frac{du}{dx} = -4y^{-5} \frac{dy}{dx} \quad (۴)$$

با قرار دادن (۴) در (۳) داریم

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x} u = 4 \quad (۵)$$

معادله دیفرانسیل (۵)، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به تابع u می-

باشد که در آن

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = 4$$

$$g(x) = \int f(x) dx = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$= 2 \ln x$$

و با توجه به (۸)

$$u = e^{-2 \ln x} [\int 4 e^{2 \ln x} dx + c]$$

$$= \frac{1}{x^2} [\int 4 x^2 dx + c]$$

$$= \frac{1}{x^2} (\frac{4}{3} x^3 + c)$$

$$= \frac{4}{3} x + \frac{c}{x^2}$$

و جواب عمومی معادله (۱) به فرم زیر می باشد:

$$y^{-4} = \frac{4}{3} x + \frac{c}{x^2}$$

مثال ۵۲.۲. معادله دیفرانسیل

$$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2} \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله (۱) را به فرم (۱۶) می نویسیم

$$y' - \frac{2}{3x} y = \frac{x^2}{3} y^{-2} \quad (2)$$

معادله (۲) برنولی می باشد، طرفین آنرا بر y^2 تقسیم می کنیم

$$y^2 y' - \frac{2}{3x} y^3 = \frac{x^2}{3} \quad (3)$$

تغییر متغیر $u = y^3$ می دهیم

$$u = y^3 \quad \frac{du}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx} \quad (4)$$

با قراردادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x} u = x^2 \quad (5)$$

معادله دیفرانسیل (۵)، خطی مرتبه اول نسبت به تابع u می باشد. که در آن

$$f(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = x^2$$

$$g(x) = \int f(x) dx = -2 \int \frac{dx}{x} \\ = -2 \operatorname{Ln} x$$

و با توجه به (۸)

$$u = e^{2 \operatorname{Ln} x} \left[\int x^2 e^{-2 \operatorname{Ln} x} dx + c \right] \\ = x^2 \left[\int dx + c \right] \\ = x^3 + c x^2$$

و جواب عمومی معادله (۱) به فرم زیر می باشد:

$$y^3 = x^3 + c x^2$$

تذکر (۲): یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می تواند نسبت به x به عنوان تابعی از y به فرم معادله برنولی باشد. و صورت کلی آن به فرم

$$(20) \quad \frac{dx}{dy} + x f(y) = x^n g(y)$$

است. و جواب عمومی (۲۰) به فرم (۱۹) می گردد. با این تفاوت که جای x با y عوض می شود.

مثال ۳.۲.۵۳. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1} \quad (1)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3 + y + 1}{3x^2}$$

$$= \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(y+1)x^{-2} \quad (2)$$

معادله (۲)، برنولی می باشد. طرفین را بر x^2 تقسیم می کنیم

$$x^2 \frac{dx}{dy} - \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3}(y+1) \quad (3)$$

تغییر متغیر $u = x^3$ می دهیم

$$u = x^3, \quad \frac{du}{dy} = 3x^2 \frac{dx}{dy} \quad (4)$$

با قرار دادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dy} - u = y + 1 \quad (۵)$$

معادله دیفرانسیل (۵)، خطی مرتبه اول نسبت به تابع u و متغیر y می باشد. که در آن

$$f(y) = -1, \quad q(y) = y + 1$$

$$g(y) = \int f(y) dy = -\int dy = -y$$

$$u = e^{g(y)} \left[\int q(y) e^{g(y)} dy + c \right]$$

$$= e^y \left[\int (y + 1) e^{-y} dy + c \right]$$

$$= e^y \left[-y e^{-y} - 2 e^{-y} + c \right]$$

$$= -y + c e^y - 2$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$x^2 = -y + c e^y - 2.$$

مثال ۵۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y} \quad (۱)$$

را حل کنید.

$$\text{حل.} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \cos y + 2 \sin y \cos y}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} x \cos y + \frac{1}{x} \sin y \cos y$$

یا

$$\frac{dx}{dy} - x \frac{\cos y}{2} = x^{-1} \sin y \cos y \quad (۲)$$

معادله دیفرانسیل (۲)، برنولی می باشد. طرفین را بر x^{-1} تقسیم می کنیم

$$x \frac{dx}{dy} - x^2 \frac{\cos y}{2} = \sin y \cos y \quad (۳)$$

تغییر متغیر $u = x^2$ می دهیم

$$u = x^2, \quad \frac{du}{dy} = 2x \frac{dx}{dy} \quad (۴)$$

با قراردادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dy} - u \cos y = 2 \sin y \cos y \quad (۵)$$

معادله دیفرانسیل (۵)، خطی مرتبه اول نسبت به تابع u و متغیر y می باشد که در آن

$$f(y) = -\cos y, \quad q(y) = 2 \sin y \cos y$$

$$g(y) = \int f(y) dy = -\int \cos y dy$$

$$= -\sin y$$

$$u = e^{g(y)} \left[\int q(y) e^{g(y)} dy + C \right]$$

$$= e^{\sin y} \left[2 \int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy + C \right]$$

$$= e^{\sin y} \left[-2 \sin y e^{-\sin y} - 2 e^{-\sin y} + C \right]$$

$$= C e^{\sin y} - 2(\sin y + 1)$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$x^2 = C e^{\sin y} - 2(\sin y + 1).$$

مثال ۵۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$x y' + y = 2 x^2 y y' \ln y \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$y'(x - 2x^2y Lny) = -y$$

$$y' = -\frac{y}{x - 2x^2y Lny}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x - 2x^2y Lny}{y}$$

$$= -\frac{x}{y} + 2x^2 Lny$$

یا

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 2x^2 Lny \quad (2)$$

معادله دیفرانسیل (۲)، برنولی می باشد. طرفین را بر x^2 تقسیم می کنیم

$$x^{-2} \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y} x^{-1} = 2 Lny \quad (3)$$

تغییر متغیر $u = x^{-1}$ می دهیم

$$u = x^{-1}, \quad \frac{du}{dy} = -x^{-2} \frac{dx}{dy} \quad (4)$$

با قراردادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = -2 Lny \quad (5)$$

معادله (۵)، خطی مرتبه اول، نسبت به تابع u و متغیر y می باشد که در آن

$$f(y) = -\frac{1}{y}, \quad q(y) = -2 Lny$$

$$g(y) = \int f(y) dy = -\int \frac{dy}{y}$$

$$= -Lny$$

و

$$u = e^{-g(y)} \left[\int q(y) e^{g(y)} dy + C \right]$$

$$= e^{Lny} \left[-\int 2 Lny e^{-Lny} dy + C \right]$$

$$= y \left[-2 \int \frac{Lny}{y} dy + C \right]$$

$$= y \left[-Ln^2 y + C \right]$$

$$= -y Ln^2 y + Cy$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$x^{-1} = -y Ln^2 y + Cy.$$

ب: معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت کلی

$$f'(y) \frac{dy}{dx} + f(y) P(x) = q(x) \quad (21)$$

با تغییر متغیر $u = f(y)$ ، تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می شود. زیرا

$$u = f(y), \quad \frac{du}{dx} = f'(y) \frac{dy}{dx} \quad (22)$$

با قرار دادن (۲۲) در (۲۱) داریم

$$\frac{du}{dx} + u P(x) = q(x) \quad (23)$$

و (۲۳) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به تابع u می باشد.

مثال ۵۶.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' \cos y + \sin y = x + 1 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با فرض $u = \sin y$ ، داریم

$$u = \sin y \quad u' = y' \cos y \quad (۲)$$

با قرار دادن (۲) در (۱)، داریم

$$u' + u = x + 1 \quad (۳)$$

معادله (۳)، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با تابع u می باشد که در آن

$$f(x) = 1, \quad q(x) = x + 1$$

$$g(x) = \int f(x) dx = \int dx \\ = x$$

$$u = e^{-q(x)} \left[\int q(x) e^{q(x)} dx + C \right]$$

$$= e^{-x} \left[\int (x+1) e^x dx + C \right]$$

$$= e^{-x} (x e^x + C)$$

$$= x + C e^{-x}$$

و جواب عمومی معادله (۱) به فرم زیر می باشد:

$$\sin y = x + C e^{-x}$$

مثال ۲: ۵۷. معادله دیفرانسیل

$$y' - 2 = 2x e^{-y} \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین (۱) را در e^y ضرب می کنیم

$$y' e^y - 2 e^y = 2x \quad (۲)$$

معادله (۲) به فرم (۲۱) می باشد، با فرض $u = e^y$ ، داریم

$$u = e^y, \quad u' = y' e^y \quad (۳)$$

با قرار دادن (۳) در (۲)، داریم

$$u' - 2u = 2x \quad (۴)$$

معادله (۴)، خطی مرتبه اول می باشد.

$$f(x) = -2, \quad q(x) = 2x$$

$$g(x) = \int f(x) dx = -2 \int dx \\ = -2x$$

و

$$u = e^{-q(x)} \left[\int q(x) e^{q(x)} dx + C \right]$$

$$= e^{2x} \left[\int 2x e^{-2x} dx + C \right]$$

$$= e^{2x} \left(-x e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + C \right)$$

$$= -x - \frac{1}{2} + C e^{2x}$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$e^y = C e^{2x} - x - \frac{1}{2}$$

پ: معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت کلی

$$(۲۴) \quad y' + y^2 P_1(x) + y P_2(x) + P_3(x) = 0 \quad \text{و} \quad P_1(x) \neq 0$$

را معادله ریکاتی نامند. برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی این معادله را

داشته باشیم. جواب عمومی این معادله به فرم

$$(۲۵) \quad y = y_1 + \frac{1}{z}$$

می باشد که y_1 جواب خصوصی معادله (۲۴) است و z تابعی از x می باشد و با

حای گذاری (۲۵) در (۲۴)، معادله، تبدیل به یک معادله خطی مرتبه اول می شود. زیرا

$$(۲۶) \quad y = y_1 + \frac{1}{z}, \quad y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

(۲۶) را در (۲۴) قرار می دهیم، داریم

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + \left(y_1 + \frac{1}{z} \right)^2 P_1(x) + \left(y_1 + \frac{1}{z} \right) P_2(x) + P_3(x) = 0$$

$$-2x - \frac{z'}{z^2} = x^3 - 2x + \frac{2}{xz} - x^3 - \frac{1}{xz^2} + \frac{2x}{z}$$

یا

$$z' + z\left(\frac{2}{x} + 2x\right) = \frac{1}{x} \quad (۴)$$

معادله (۴)، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشد که در آن

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2x, \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{2}{x} + 2x\right) dx \\ = 2 \ln x + x^2$$

و

$$z = e^{-g(x)} \left[\int q(x) e^{g(x)} dx + C \right] \\ = e^{-\ln x^2 - x^2} \left[\int \frac{1}{x} e^{\ln x^2 + x^2} dx + C \right] \\ = \frac{e^{-x^2}}{x^2} \left[\int x e^{x^2} dx + C \right] \\ = \frac{e^{-x^2}}{x^2} \left[\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right] \\ = \frac{1}{2x^2} + C \frac{e^{-x^2}}{x^2} \quad (۵)$$

در (۲) بجای z ، (۵) را قرار می دهیم و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = -x^2 + \frac{2x^2 e^{-x^2}}{e^{x^2} + C}$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + y_1^2 P_1(x) + \frac{1}{z^2} P_1(x) + 2 \frac{y_1}{z} P_1(x) + y_1 P_2(x) + \frac{1}{z} P_2(x) + P_3(x) = 0$$

$$(y_1' + y_1^2 P_1(x) + y_1 P_2(x) + P_3(x)) - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} P_1(x) + 2 \frac{y_1}{z} P_1(x) + \frac{1}{z} P_2(x) = 0$$

چون y_1 یک جواب خصوصی معادله (۲۴) است، پس

$$y_1' + y_1^2 P_1(x) + y_1 P_2(x) + P_3(x) = 0$$

می باشد، در نتیجه، داریم

$$(۲۷) \quad z' - z(2y_1 P_1(x) + P_2(x)) = P_1(x)$$

معادله (۲۷)، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با تابع z می باشد.

مثال ۵۸.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = x^3 + \frac{2}{x} y - \frac{1}{x} y^2 \quad (۱)$$

را حل کنید، اگر $y_1(x) = -x^2$ باشد.

حل. جواب عمومی را به فرم

$$y = -x^2 + \frac{1}{z} \quad (۲)$$

می باشد، از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می گیریم.

$$y' = -2x - \frac{z'}{z^2} \quad (۳)$$

(۲) و (۳) را در (۱) قرار می دهیم

$$-2x - \frac{z'}{z^2} = x^3 + \frac{2}{x} \left(-x^2 + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{x} \left(-x^2 + \frac{1}{z}\right)^2$$

مثال ۵۹.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \quad (1)$$

را حل کنید، اگر $y_1(x) = x$ باشد.

حل. جواب عمومی را به فرم

$$y = x + \frac{1}{z} \quad (2)$$

می باشد، از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می گیریم

$$y' = 1 - \frac{z'}{z^2} \quad (3)$$

با قرار دادن (۲) و (۳) در (۱) داریم

$$\begin{aligned} 1 - \frac{z'}{z^2} &= 1 + \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{x^2} \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{xz} - 1 - \frac{1}{x^2 z^2} - \frac{2}{xz} \\ &= 1 - \frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2 z^2} \end{aligned}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = \frac{1}{x^2 z} \quad (4)$$

معادله (۴)، خطی مرتبه اول می باشد که در آن

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int f(x) dx = -\int \frac{1}{x} dx \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} z &= e^{-g(x)} \left[\int q(x) e^{g(x)} dx + C \right] \\ &= e^{\ln x} \left[\int \frac{1}{x^2} e^{-\ln x} dx + C \right] \\ &= x \left[\int \frac{1}{x^3} dx + C \right] \\ &= -\frac{1}{2x} + Cx \quad (5) \end{aligned}$$

در (۲)، بجای z ، (۵) را قرار می دهیم و جواب عمومی معادله (۱) به فرم زیر می باشد:

$$y = x + \frac{2x}{2Cx^2 - 1}$$

مجموعه مسائل ۵۰.۲.

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱. $y' + 2y = e^{-x}$
۲. $xy' + 2y = 8x^2$
۳. $y' - y \cot x = \csc x$
۴. $\frac{dy}{dx} = \cos x - y \sec x$

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx}{dy} = y - 4xy \quad .20$$

$$y' = \frac{y}{x+y^3} \quad .21$$

$$y' + \tan y = \frac{x}{\cos y} \quad .22$$

$$(1+y^2) dx = (\sqrt{1+y^2} \cos y - xy) dy \quad .23$$

معادلات دیفرانسیل، برنولی زیر را حل کنید.

$$xy' + xy^2 = y \quad .24$$

$$xy' - y(2y \ln x - 1) = 0 \quad .25$$

$$2xyy' + x = y^2 \quad .26$$

$$y' + 4xy = 2x e^{-x^2} \sqrt{y} \quad .27$$

$$y' = y(y^3 \cos x + \tan x) \quad .28$$

$$y' = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{2y(x^2 - 1)} \quad .29$$

معادلات دیفرانسیل، برنولی زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 4} \quad .30$$

$$(xy + x^2 y^3) y' = 1 \quad .31$$

$$y' x^3 \sin y + 2y = xy' \quad .32$$

$$2 \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^3 \cos y = 0 \quad .33$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$y' - 3y \tan x = 2 \quad .5$$

$$(x^2 + 2x - 1) y' - (x + 1) y = x - 1 \quad .6$$

$$y' - 2xy = 2x e^{x^2} \quad .7$$

$$x(1+2y) dx - dy = 0 \quad .8$$

$$y' + y \cos x = e^{2x} \quad .9$$

$$xy' + y = x \sin x \quad .10$$

$$xy' - y = x^2 \sin x \quad .11$$

$$y' + 2xy = x e^{-x^2} \quad .12$$

$$(1+x^2) y' = 2xy + (1+x^2)^2 \quad .13$$

$$y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2 \quad .14$$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

$$xy' + 2y = x^2 \quad x = -1 \text{ وقتی } y = \frac{5}{4} \quad .15$$

$$x^2 y' + 2xy = \cos x \quad x = \pi \text{ وقتی } y = 0 \quad .16$$

$$xy' + 2y = \frac{\ln x}{x^2} \quad x = 1 \text{ وقتی } y = 3 \quad .17$$

$$y' = 2y + e^x - x \quad x = 0 \text{ وقتی } y = \frac{1}{4} \quad .18$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{1}{y(1-x)} \quad .19$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' + 1 = 4e^{-y} \sin x \quad ۳۴$$

$$y' \cos y + x \sin y = 2x \quad ۳۵$$

$$2(y+1)y' - \frac{2}{x}(y+1)^2 = x^4 \quad ۳۶$$

معادلات دیفرانسیل، ریکاتی زیر را حل کنید.

$$y' = 2 \tan x \sec x - y^2 \sin x \quad \text{و} \quad y_1(x) = \sec x \quad ۳۷$$

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2 \quad \text{و} \quad y_1(x) = \frac{1}{x} \quad ۳۸$$

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad y_1(x) = \frac{1}{x} \quad ۳۹$$

$$y' = y^2 + 8xy + 16x^2 - 5 \quad y_1(x) = 1 - 4x \quad ۴۰$$

۶.۲. معادلات مرتبه اول که نسبت به مشتق حل نشده‌اند

در بخش‌های قبیل در مورد حل معادلاتی که به فرم $y' = f(x, y)$ بیان می‌شد صحبت کردیم. حال فرض کنید y' بطور صریح نسبت به x و y بیان نشود، پس لازم است در این بخش در مورد چگونگی حل این معادلات صحبت کنیم. و پس از شروع مطلب توضیح مختصری در باره جواب غیر عادی خواهیم داشت.

قبلا تعریف کردیم که جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، جوابی است که منحنی آن بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس باشد. بدینال راه حلی برای پیدا کردن جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستیم. از طرفی می‌دانیم پوش یک دسته منحنی $F(x, y, c) = 0$ ، منحنی می‌باشد که بر کلیه منحنی‌های آن دسته منحنی (که به ازای c های مختلف بدست می‌آید) و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس است. پس برای بدست آوردن جواب غیر-

عادی یک معادله دیفرانسیل، ابتدا جواب عمومی آن را پیدا می‌کنیم و از همان روشی که پوش یک دسته منحنی را بدست می‌آوریم استفاده می‌کنیم. در زیر مختصرا در باره راه پیدا کردن پوش یک دسته منحنی صحبت می‌کنیم. فرض کنید $F(x, y, c) = 0$ معادله یک دسته منحنی باشد، می‌دانیم پوش این دسته منحنی از حذف پارامتر c در دستگاه زیر بدست می‌آید.

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

اگر حذف c عملا ممکن نباشد، می‌توان مختصات پوش را نسبت به پارامتر c بیان نمود یعنی مختصات معادله پوش را به فرم پارامتری بیان نمود.

نکته‌ای که باید بدان توجه نمود، آنست که نتیجه‌ای که از حذف c در دستگاه (۱) بدست می‌آید ممکن است پوش نباشد و یا قسمتی از آن پوش باشد. (مثال‌های در این زمینه در زیر می‌آید)

تعریف ۵.۲. نقاط استثنایی یک دسته منحنی، نقاطی هستند که در آن نقاط مماس منحنی مشخص نیست.

این نقاط از حل دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

زیرا اگر $F(x, y, c) = 0$ معادله یک دسته منحنی باشد

$$0 = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

و با صفر بودن صورت و مخرج طرف راست عبارت بالا، مشتق وجود ندارد یعنی مماس بر منحنی مشخص نیست.

حال اگر $F(x, y, c) = 0$ شامل نقاط استثنایی باشد می توان مختصات این نقاط را بر حسب C به فرم زیر نوشت

$$x = A(C) \quad , \quad y = B(C)$$

یعنی در این نقاط داریم

$$F[A(C), B(C), C] = 0$$

نسبت به C مشتق می گیریم

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dA}{dC} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dB}{dC} + \frac{\partial F}{\partial C} = 0$$

از طرفی در این نقاط $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ در نتیجه باید $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ باشد به عبارت دیگر نقاط استثنایی هم از حل دستگاه (۱) بدست می آیند

مثال ۶۰.۲. پوش دسته منحنی

$$(x - C)^2 + y^2 = 4 \quad (1)$$

را پیدا کنید.

حل. از (۱) نسبت به C مشتق می گیریم

$$-2(x - C) = 0 \quad , \quad x = C$$

پس C را در دستگاه زیر حذف می کنیم

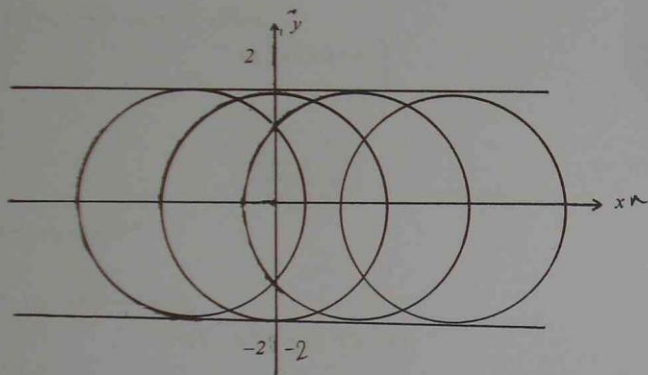
$$\begin{cases} (x - C)^2 + y^2 = 4 \\ x = C \end{cases}$$

در نتیجه

$$y^2 = 4 \quad , \quad y = \pm 2$$

و خطوط $y = \pm 2$ معادلات پوش هستند *

* دایر نقاط استثنایی ندارند، زیرا



شکل ۲۰.۲.

مثال ۶۱.۲. پوش دسته منحنی

$$y = Cx + C^2 + 1 \quad (1)$$

را پیدا کنید.

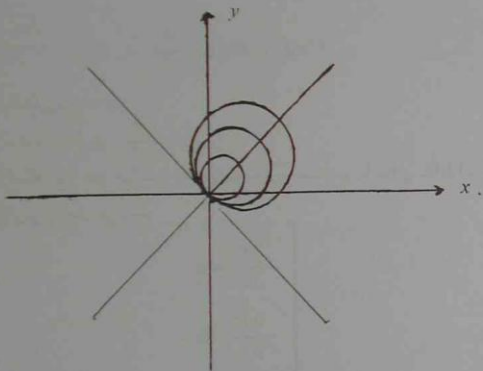
حل. از (۱) نسبت به C مشتق می گیریم

$$0 = x + 2C$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x - C) = 0 & x = C \\ 2y = 0 & y = 0 \end{cases}$$

در معادله دسته منحنی قرار می دهیم

$$0 + 0 \neq 4$$



شکل (۰۳۰۲)

مثال ۰۶۳۰۲. پوش دسته منحنی

$$(y-C)^2 = (x-C)^2 \quad (1)$$

را پیدا کنید.

حل. از (۱) نسبت به C مشتق می‌گیریم

$$2(y-C) = 3(x-C)^2$$

سیس C را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} (y-C)^2 = (x-C)^2 \\ 2(y-C) = 3(x-C)^2 \end{cases}$$

$$\frac{9}{4}(x-C)^4 = (x-C)^3$$

$$(x-C)^3 \left[\frac{9}{4}(x-C) - 1 \right] = 0$$

سیس C را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} y = Cx + C^2 + 1 \\ x + 2C = 0 \end{cases}$$

داریم

$$y = -\frac{x^2}{4} + 1$$

که معادله پوش می‌باشد.*

مثال ۰۶۲۰۲. پوش دسته منحنی

$$(x-C)^2 + (y-C)^2 = 2C^2 \quad (1)$$

را پیدا کنید.

حل. از (۱) نسبت به C مشتق می‌گیریم

$$-2(x-C) - 2(y-C) = 4C$$

یا

$$x+y=0$$

سیس C را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} (x-C)^2 + (y-C)^2 = 2C^2 \\ x+y=0 \end{cases}$$

چون معادله دوم دستگاه مستقل از C است، پس جواب مطلوب $x+y=0$ می‌باشد. حال

با توجه به شکل می‌بینیم که فقط نقطه $(0,0)$ واقع در روی $x+y=0$ ، پوش می‌باشد

حال می‌خواهیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ را حل کنیم و فرض می‌کنیم y' بسادگی بر حسب x و y بیان نشود برای حل این معادله حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

الف. اگر معادله به فرم

$$(۳) \quad F(y') = 0$$

باشد و لااقل دارای یک ریشه حقیقی $y' = k_i$ باشد، چون معادله (۳) شامل x و y نیست پس k_i ، یک ثابت است. در نتیجه

$$y' = k_i, \quad y = k_i x + C$$

یا

$$k_i = \frac{y - C}{x}$$

و چون k_i یک ریشه معادله (۳) می‌باشد، یعنی $F(k_i) = 0$ پس

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

جواب عمومی معادله (۳) خواهد بود.

مثال ۴۰۲. معادله دیفرانسیل

$$(۱) \quad (y')^6 - (y')^3 + y' + 1 = 0$$

را حل کنید.

حل. با فرض $y' = p$ در (۱) داریم

$$(۲) \quad p^6 - p^3 + p + 1 = 0$$

معادله (۲) یک کثیرالجزء از درجه ۵ می‌باشد و می‌دانیم هر کثیرالجزء از درجه n ، قابل تجزیه به عوامل خطی و درجه دوم می‌باشد، لذا معادله (۲) لااقل دارای یک ریشه حقیقی $p = k$ خواهد بود.

$$y' = k \Rightarrow y = kx + C$$

یا

$$C = x, \quad C = x - \frac{4}{9}$$

که به ازای $x = C$ داریم $y = x$

و به ازای $C = x - \frac{4}{9}$ داریم $y = x - \frac{4}{9}$

برای بررسی اینکه این دو جواب، معادلات پوش هستند و یا مکان نقاط استثنایی می‌باشد دستگاه زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

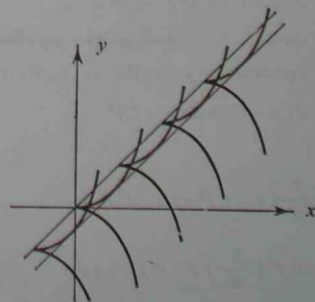
که در آن

$$\begin{cases} F(x, y, C) = (y - C)^2 - (x - C)^3 = 0 \\ -3(x - C)^2 = 0 \Rightarrow x = C \\ 2(y - C) = 0 \Rightarrow y = C \end{cases}$$

یا

$$y = x$$

پس $y = x$ مکان نقاط استثنایی و $y = x - \frac{4}{9}$ معادله پوش می‌باشد



شکل (۴۰۲)

$$k = \frac{y-C}{x}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - \left(\frac{y-C}{x}\right)^4 + \left(\frac{y-C}{x}\right) + 1 = 0$$

جواب معادله (۱) می باشد.

ب. اگر معادله به فرم

$$(۴) \quad F(y, y') = 0$$

باشد. (فاقد متغیر). اگر (۴) نسبت به y' قابل حل باشد، در این صورت

$$(۵) \quad y' = f(y) \Rightarrow dy = f(y) dx$$

معادله (۵) از نوع متغیرهای از هم جدا می باشد و

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C$$

ولی اگر y' بسادگی بر حسب y بیان نشود. اما y بسادگی بر حسب y' بیان گردد یعنی $y = f(y')$ یا فرض $y' = P$ داریم

$$(۶) \quad y = f(P)$$

از طرفین (۶) دیفرانسیل می گیریم

$$(۷) \quad dy = f'(P) dP$$

از طرفی

$$(۸) \quad y' = P \Rightarrow dy = P dx$$

(۸) را در (۷) قرار می دهیم

$$P dx = f'(P) dP$$

$$dx = \frac{f'(P)}{P} dP$$

$$x = \int \frac{f'(P)}{P} dP + C$$

یا

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می آید

$$(۹) \quad \begin{cases} y = f(P) \\ x = \int \frac{f'(P)}{P} dP + C \end{cases}$$

و اگر عملاً حذف P ممکن نباشد (۹) را جواب عمومی به فرم پارامتری، با پارامتر P می نامیم اگر (۴) بسادگی برای y با y' حل نشود، فرض می کنیم

$$y = f_1(P), \quad y' = f_2(P)$$

و چون

$$dy = y' dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} \\ = \frac{f_1'(P) dP}{f_2(P)}$$

و

$$x = \int \frac{f_1'(P)}{f_2(P)} dP + C$$

و با حذف P در دستگاه زیر

$$(۱۰) \quad \begin{cases} y = f_1(P) \\ x = \int \frac{f_1'(P)}{f_2(P)} dP + C \end{cases}$$

جواب عمومی بدست می آید. و اگر حذف P ممکن نباشد، (۱۰) جواب عمومی به فرم پارامتری با پارامتر P می باشد.

مثال ۶۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$y = (y')^2 e^{y'} \quad (۱)$$

را حل کنید.

$$y' = P, \quad dy = P dx$$

حل. فرض می کنیم

$$y = P^2 e^P \quad (۲)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = (2Pe^P + P^2 e^P) dP$$

$$Pdx = P(2+P)e^P dP$$

$$P(e^P(2+P)dP - dx) = 0 \quad (۳)$$

معادله (۳) دارای دو جواب می‌باشد یکی $P=0$ و دیگری از حل معادله

$$e^P(2+P)dP = dx \quad (۴)$$

بدست می‌آید. با انتگرال‌گیری از (۴) داریم

$$x = e^P + Pe^P + C \quad (۵)$$

حال باید P را در دستگاهی که یک معادله آن $y = P^2 e^P$ و معادله دیگر آن نتایج حل معادله (۳) می‌باشد حذف کنیم،

$$\begin{cases} y = P^2 e^P \\ x = e^P(1+P) + C \end{cases} \quad (۶)$$

(۶) جواب عمومی به‌فرم پارامتری می‌باشد. و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیر-عادی بدست می‌آید.

$$\begin{cases} y = P^2 e^P \\ P = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad (۷)$$

و $y=0$ جواب غیرعادی می‌باشد.

تذکر ۱. همانطور که ملاحظه می‌کنید، معادله (۳) دارای دو جواب بود که یکی به C بستگی نداشت و دیگری به C بستگی داشت. آن جوابی که به C بستگی دارد منجر به جواب عمومی می‌شود و آن جوابی که به C بستگی ندارد، منجر به جواب غیرعادی می‌شود.

تذکر ۲. یک راه برای بدست آوردن جواب غیرعادی معادله، $F(x, y, y') = 0$ آنست که فرض می‌کنیم $y' = P$ را در دستگاه زیر

$$(۱۱) \quad \begin{cases} F(x, y, P) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial P} = 0 \end{cases}$$

حذف می‌کنیم، چنانچه نتیجه در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب غیرعادی می‌باشد. این مطلب را در مورد مثال ۶۵۰۲ بررسی می‌کنیم.

در معادله

$$y = (y')^2 e^{y'}$$

قرار می‌دهیم $y' = P$

$$y = P^2 e^P \quad (۰)$$

از طرفین نسبت به P مشتق می‌گیریم

$$0 = 2Pe^P + P^2 e^P$$

$$= Pe^P(2+P)$$

که دو جواب دارد

$$P=0, P=-2$$

$P=0$ را در (۰) قرار می‌دهیم

$$y=0$$

که در معادله صدق می‌کند و جواب غیرعادی می‌باشد.

$P=-2$ را در (۰) قرار می‌دهیم

$$y = 4e^{-2}$$

که در معادله صدق نمی‌کند

$$4e^{-2} \neq 0$$

مثال ۶۶۰۲. معادله دیفرانسیل

$$y = y' \ln y' \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم $y' = P$ ، $dy = Pdx$

$$y = P \ln P \quad (۲)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = (\ln P + 1) dP$$

$$Pdx = (\ln P + 1) dP$$

$$dx = \left(\frac{1 + \operatorname{Ln} P}{P} \right) dP \quad (3)$$

با انتگرال‌گیری از (3) داریم

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\operatorname{Ln} P}{P} dP \\ &= \operatorname{Ln} P + \frac{1}{2} (\operatorname{Ln} P)^2 + C \end{aligned}$$

با حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y = P \operatorname{Ln} P \\ x = \operatorname{Ln} P + \frac{1}{2} (\operatorname{Ln} P)^2 + C \end{cases} \quad (4)$$

جواب عمومی بدست می‌آید. البته (4) جواب عمومی به فرم پارامتری می‌باشد. این معادله دارای جواب غیرعادی نیست. زیرا اگر از طرفین (2) نسبت به P مشتق بگیریم، داریم

$$0 = \operatorname{Ln} P + 1$$

$$\operatorname{Ln} P = -1, \quad P = e^{-1} \quad (5)$$

با حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y = P \operatorname{Ln} P \\ P = e^{-1} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود

$$y = -e^{-1} \quad (6)$$

(6) در (1) صدق نمی‌کند، زیرا

$$-e^{-1} \neq 0$$

مثال ۶۷۰۲. معادله دیفرانسیل

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \quad (1)$$

را حل کنید.

$$y' = \sinh P \Rightarrow y = \cosh P \quad \text{حل. فرض می‌کنیم}$$

$$dy = \sinh P dP$$

و

$$\begin{aligned} dy = y' dx &\Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} \\ &= \frac{\sinh P dP}{\sinh P} = dP \end{aligned} \quad (2)$$

و با انتگرال‌گیری از طرفین (2)، داریم

$$x = P + C$$

با توجه به (10)

$$\begin{cases} y = \cosh P \\ x = P + C \end{cases}$$

با حذف P در دستگاه بالا، جواب عمومی به صورت زیر می‌باشد:

$$y = \cosh(x - C)$$

پ. اگر معادله به فرم

$$F(x, y') = 0 \quad (12)$$

باشد. فاقد تابع x . اگر (12) نسبت به y' قابل حل باشد، در این صورت

$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x) dx + C$$

ولی اگر y' بسادگی بر حسب x بیان نشود. اما x بسادگی بر حسب y' بیان شود. یعنی

$$x = f(y') \quad \text{با فرض } y' = P \text{ داریم}$$

$$x = f(P) \quad (13)$$

از طرفین (13) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = f'(P) dP \quad (14)$$

از طرفی

$$y' = P \Rightarrow dx = \frac{1}{P} dy \quad (15)$$

(15) را در (14) قرار می‌دهیم، داریم

$$\frac{1}{P} dy = f'(P) dP$$

$$dy = Pf'(P) dP$$

یا

$$y = \int Pf'(P) dP + C$$

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$(16) \quad \begin{cases} x = f(P) \\ y = \int Pf'(P) dP + C \end{cases}$$

و اگر عملاً حذف P در دستگاه (۱۶) ممکن نباشد، (۱۶) را جواب عمومی به فرم پارامتری، با پارامتر P می‌نامیم.

اگر (۱۲) بسادگی برای x یا y' حل نشود، فرض می‌کنیم

$$x = f_1(P), \quad y' = f_2(P)$$

و چون $dx = f_1'(P) dP$ ، $dy = y' dx$ ، پس

$$dy = f_2(P) f_1'(P) dP$$

و

$$y = \int f_2(P) f_1'(P) dP + C$$

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$(17) \quad \begin{cases} x = f_1(P) \\ y = \int f_2(P) f_1'(P) dP + C \end{cases}$$

و اگر حذف P ممکن نباشد، (۱۷) جواب عمومی به فرم پارامتری، با پارامتر P می‌باشد

مثال ۶۹.۲. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad x = \ln y' + \sin y'$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$y' = P, \quad dx = \frac{1}{P} dy$$

$$x = \ln P + \sin P$$

(۲)

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = \left(\frac{1}{P} + \cos P \right) dP$$

$$\frac{1}{P} dy = \left(\frac{1}{P} + \cos P \right) dP$$

$$dy = (1 + P \cos P) dP \quad (3)$$

یا انتگرال‌گیری از (۳) داریم

$$\begin{aligned} y &= \int (1 + P \cos P) dP \\ &= P + P \sin P + \cos P + C \end{aligned}$$

و

$$(4) \quad \begin{cases} x = \ln P + \sin P \\ y = P(1 + \sin P) + \cos P + C \end{cases}$$

(۴) جواب عمومی به فرم پارامتری می‌باشد.

مثال ۶۹.۲. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad x = 2y' - \ln y'$$

را حل کنید.

$$\text{حل. فرض می‌کنیم} \quad y' = P, \quad dx = \frac{1}{P} dy$$

$$x = 2P - \ln P \quad (2)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = \left(2 - \frac{1}{P} \right) dP$$

$$\frac{1}{P} dy = \left(2 - \frac{1}{P} \right) dP$$

$$dy = (2P - 1) dP \quad (3)$$

یا انتگرال‌گیری از (۳) داریم

$$y = \int (2P - 1) dP$$

$$= p^2 - p + C$$

$$\begin{cases} x = 2P - \ln P \\ y = P^2 - P + C \end{cases} \quad (۴)$$

(۴) جواب عمومی به فرم پارامتری می باشد.

مثال ۷۰.۲. معادله دیفرانسیل

$$x \sqrt{1+y'^2} = y' \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. فرض می کنیم $-\frac{\pi}{2} < P < \frac{\pi}{2}$ ، $y' = \tan P$ ، آنگاه $x = \sin P$

$$dy = y' dx$$

$$x = \sin P \Rightarrow dx = \cos P dP$$

$$dy = \tan P \cos P dP$$

$$= \sin P dP \quad (۲)$$

با انتگرال گیری از (۲) داریم

$$y = -\cos P + C$$

و با حذف p در دستگاه زیر

$$\begin{cases} x = \sin P \\ y = -\cos P + C \end{cases}$$

جواب عمومی به فرم $x^2 + (y - C)^2 = 1$ بدست می آید.

ت. اگر معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y') = 0$$

همادگی بر حسب x بیان شود، یعنی داشته باشیم

$$x = f(y, y')$$

یا فرض $y' = P$ ، داریم

$$(۱۹) \quad x = f(y, P)$$

از طرفین (۱۹) ، دیفرانسیل می گیریم

$$(۲۰) \quad dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial P} dP$$

از طرفی

$$(۲۱) \quad y' = P \Rightarrow dx = \frac{1}{P} dy$$

(۲۱) را در (۲۰) قرار می دهیم، داریم

$$\frac{1}{P} dy = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial P} dP$$

یا

$$(۲۲) \quad \frac{1}{P} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dy}$$

و جواب عمومی از حذف p در دستگاه زیر بدست می آید.

$$(۲۳) \quad \begin{cases} x = f(y, P) \\ \frac{1}{P} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dy} \end{cases}$$

و اگر عملاً حذف p ممکن نباشد، (۲۳) جواب عمومی به فرم پارامتری می باشد.

تذکر ۳. ابتدا معادله دوم دستگاه (۲۳) را حل می کنیم و سپس نتایج حل را بجای

معادله دوم دستگاه (۲۳) قرار می دهیم

مثال ۷۱.۲. معادله دیفرانسیل

$$y = 2xy' - y y'^2 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم $y' = P$, $dx = \frac{1}{P} dy$

در معادله (۱) بجای y' ، P می‌گذاریم و داریم

$$2x = \frac{y}{P} + yP \quad (2)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$2 dx = \frac{P dy - y dP}{P^2} + y dP + P dy$$

$$2 \frac{1}{P} dy = \frac{P dy - y dP}{P^2} + y dP + P dy$$

$$2P = P - y \frac{dP}{dy} + y P^2 \frac{dP}{dy} + P^3$$

$$-P - y \frac{dP}{dy} + P^2 \left(P + y \frac{dP}{dy} \right) = 0$$

$$(P + y \frac{dP}{dy})(P^2 - 1) = 0 \quad (3)$$

از حل (۳) داریم

$$P^2 - 1 = 0 \Rightarrow P = \pm 1 \quad (4)$$

$$P + y \frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dy}{y} = 0 \quad (5)$$

(۵) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد و با انتگرال‌گیری از (۵) داریم

$$\ln P + \ln y = \ln C \quad (6)$$

$$Py = C \Rightarrow P = \frac{C}{y}$$

از حذف P در دستگاه زیر، جواب عمومی بدست می‌آید

$$\begin{cases} 2x = \frac{y}{P} + yP \end{cases}$$

$$P = \frac{C}{y}$$

$$2x = \frac{y^2}{C} + C$$

$$y^2 = C(2x - C)$$

و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیرعادی بدست می‌آید

$$\begin{cases} 2x = \frac{y}{P} + yP \\ P = \pm 1 \end{cases}$$

$$2x = 2y , 2x = -2y$$

یا $y = \pm x$ جوابهای غیرعادی معادله می‌باشند.

حال جوابهای غیرعادی را به دو روش دیگر نیز محاسبه می‌کنیم

اول، با حذف C بین جواب عمومی و مشتق آن نسبت به C

$$\begin{cases} y^2 = C(2x - C) \\ 0 = 2x - 2C \end{cases}$$

از معادله دوم دستگاه داریم $x = C$. این مقدار را در معادله اول دستگاه قرار می-

$$y^2 = x(2x - x) \quad \text{دهیم}$$

$$y^2 = x^2$$

$$y = \pm x$$

دوم، با حذف P ، بین (۲)، $(x = f(y, P))$ و مشتق آن نسبت به P

$$2x = \frac{y}{P} + yP$$

$$0 = -\frac{y}{P^2} + y$$

از معادله دوم دستگاه داریم $P = \pm 1$. این مقدار را در معادله اول دستگاه قرار می-

دهیم

$$2x = 2y, \quad 2x = -2y$$

یا $y = \pm x$. البته هر وقت از روش دوم جواب بدست بیاوریم، حتما باید در معادله گذاشته شود و در صورتی که در معادله صدق کند، جواب غیرعادی می باشد.

مثال ۷۲.۲. معادله دیفرانسیل

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'} \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. فرض می کنیم $y' = P$, $dx = \frac{1}{P} dy$

در معادله (۱)، بجای y' ، P می گذاریم، داریم

$$x = P^2 + \frac{y}{P} \quad (2)$$

از طرفین (۲)، دیفرانسیل می گیریم

$$dx = 2P dP + \frac{P dy - y dP}{P^2}$$

$$\frac{1}{P} dy = 2P dP + \frac{1}{P} dy - \frac{y}{P^2} dP$$

$$\frac{1}{P} = 2P \frac{dP}{dy} + \frac{1}{P} - \frac{y}{P^2} \cdot \frac{dP}{dy}$$

یا

$$\frac{dP}{dy} (2P - \frac{y}{P^2}) = 0 \quad (3)$$

از حل (۳)، داریم

$$\frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow P = C \quad (4)$$

$$2P - \frac{y}{P^2} = 0 \Rightarrow P = \sqrt[3]{\frac{y}{2}} \quad (5)$$

از حذف P در دستگاه زیر، جواب عمومی بدست می آید.

$$\begin{cases} x = P^2 + \frac{y}{P} \\ P = C \\ y = Cx - C^3 \end{cases}$$

و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیرعادی بدست می آید.

$$\begin{cases} x = P^2 + \frac{y}{P} \\ P = \sqrt[3]{\frac{y}{2}} \\ y = \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2} \end{cases}$$

ث. اگر معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y') = 0$$

به سادگی بر حسب y بیان شود، یعنی داشته باشیم

$$y = f(x, y') \quad (24)$$

با فرض $y' = P$ ، داریم

$$y = f(x, P) \quad (25)$$

از طرفین (۲۵) دیفرانسیل می گیریم

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial P} dP \quad (26)$$

از طرفی

$$y' = P \Rightarrow dy = P dx \quad (27)$$

(۲۷) را در (۲۶) قرار می دهیم، داریم

$$P dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial P} dP$$

یا

$$(28) \quad P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dx}$$

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$(29) \quad \begin{cases} y = f(x, P) \\ P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dx} \end{cases}$$

و اگر حذف P ممکن نباشد، (۲۹) جواب عمومی به فرم پارامتری می‌باشد.

تذکر ۴. ابتدا معادله دوم دستگاه (۲۹) را حل می‌کنیم و سپس نتایج حل را، بجای معادله دوم دستگاه (۲۹) قرار می‌دهیم.

مثال ۷۳.۲. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم $y' = P$ ، $dy = P dx$
در معادله (۱)، بجای y' ، P می‌گذاریم

$$(2) \quad y = \frac{P^2}{2} + 2xP + x^2$$

از طرفین (۲)، دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = P dP + 2P dx + 2x dP + 2x dx$$

$$P dx = P dP + 2P dx + 2x dP + 2x dx$$

$$P = (P + 2x) \frac{dP}{dx} + 2P + 2x$$

یا

$$(3) \quad (P + 2x) \left(\frac{dP}{dx} + 1 \right) = 0$$

از حل (۳)، داریم

$$(4) \quad \frac{dP}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow P = C - x$$

$$(5) \quad P + 2x = 0 \Rightarrow P = -2x$$

از حذف P در دستگاه زیر، جواب عمومی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = \frac{P^2}{2} + 2xP + x^2 \\ P = C - x \end{cases}$$

$$y = Cx + \frac{1}{2} (C^2 - x^2)$$

و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیرعادی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = \frac{P^2}{2} + 2xP + x^2 \\ P = -2x \\ y = -x^2 \end{cases}$$

مثال ۷۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad y = -\frac{1}{x^2 y'} - xy'$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم
در معادله (۱) بجای y' از $P + y'$ می‌گذاریم

$$y' = P + y' \implies dy = P dx + y' dx \quad (1)$$

از طرفین (۱) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = \frac{2xP dx + x^2 dP}{x^2 P^2} - x dP - P dx$$

$$P dx = \frac{2}{x^2 P} dx + \frac{1}{x^2 P^2} dP - x dP - P dx$$

$$2P = \frac{2}{x^2 P} = \left(\frac{1}{x^2 P^2} - x\right) \frac{dP}{dx}$$

$$2(P^2 x^2 - 1)P = x(1 - x^2 P^2) \frac{dP}{dx}$$

$$(1 - x^2 P^2)(x \frac{dP}{dx} + 2P) = 0 \quad (2)$$

از حل (۲) داریم

$$x \frac{dP}{dx} + 2P = 0 \implies \frac{dP}{P} + 2 \frac{dx}{x} = 0 \quad (3)$$

(۳) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد و داریم

$$\ln P + \ln x^2 = \ln C$$

$$P = \frac{C}{x^2}$$

$$1 - x^2 P^2 = 0 \implies P = \pm \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

(۳) حد P در دستگاه زیر جواب عمومی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{x^2 P} - xP \\ P = \frac{C}{x^2} \\ y = -\frac{1}{C} - \frac{C}{x} \end{cases}$$

$$x^2 + Cxy + C = 0$$

از حد P در دستگاه زیر جواب عمومی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{x^2 P} - xP \\ P = \pm \frac{1}{x\sqrt{x}} \\ y' = \frac{C}{x^2} \end{cases}$$

معادله کوری *

فرم معادله دیفرانسیل معمولی

$$y' = xy' + f(y') \quad (20)$$

معادله کوری نامیده می‌شود. برای حل این معادله فرض می‌کنیم $y' = P$

$$y = Px + f(P) \quad (21)$$

از طرفین (۲۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم. داریم

$$y' = P = P + x \frac{dP}{dx} + f'(P) \frac{dP}{dx}$$

$$[x + f'(P)] \frac{dP}{dx} = 0 \quad (22)$$

از حل (۳۲) داریم

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = c$$

و

$$x + f'(P) = 0$$

یا حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y = Px + f(P) \\ P = c \end{cases}$$

جواب عمومی به فرم زیر بدست می آید

$$y = cx + f(c)$$

که یک دسته خطوط مستقیم می باشد.

توجه. برای بدست آوردن جواب عمومی در معادله کلرو کافی است در معادله به جای y' مقدار c گذاشته شود. و با حذف p در دستگاه زیر

$$(۳۴) \quad \begin{cases} y = Px + f(P) \\ x + f'(P) = 0 \end{cases}$$

جواب غیرعادی بدست می آید، و اگر حذف P در دستگاه (۳۴) عملاً ممکن نباشد، (۳۴) جواب غیرعادی به فرم پارامتری می شود.

تذکره ۰۵. برای بدست آوردن جواب غیرعادی در معادله کلرو، از جواب عمومی نسبت به c مشتق می گیریم و c را در دستگاه زیر حذف می کنیم

$$\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$$

مثال ۰۲-۷۵. معادله دیفرانسیل

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

ا حل کنید.

حل. معادله کلرو می باشد. پس برای بدست آوردن جواب عمومی، کافی است به جای y' ، c بگذاریم و جواب عمومی به فرم زیر است

$$y = cx + \frac{1}{c}$$

برای بدست آوردن جواب غیرعادی، c را در دستگاه زیر حذف می کنیم

$$\begin{cases} y = cx + \frac{1}{c} \\ 0 = x - \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

و جواب غیرعادی

$$y^2 = 4x.$$

مثال ۰۲-۷۶. معادله دیفرانسیل

$$y = xy' + y'^2$$

را حل کنید.

حل. چون این معادله، معادله کلرو می باشد؛ پس جواب عمومی به فرم

$$y = cx + c^2$$

است و برای بدست آوردن جواب غیرعادی، c را در دستگاه زیر حذف می کنیم

$$\begin{cases} y = cx + c^2 \\ 0 = x + 2c \end{cases}$$

و جواب غیرعادی

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

ج: معادله لاگرانژ*

مثال ۷۷.۲. معادله دیفرانسیل

$$y = x y'^2 + y' \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با فرض $y' = P$ ، داریم

$$y = x P^2 + P \quad (2)$$

از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$P = P^2 + (2Px + 1) \frac{dP}{dx}$$

یا

$$\frac{dx}{dP} - x \frac{2P}{P - P^2} = \frac{1}{P - P^2} \quad (3)$$

(۳) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد که در آن

$$f(P) = -\frac{2P}{P - P^2}, \quad q(P) = \frac{1}{P - P^2}$$

$$g(P) = \int f(P) dP = -2 \int \frac{dP}{1 - P} = 2 \ln |1 - P|$$

و

$$\begin{aligned} x &= e^{\int q(P) dP} [\int q(P) e^{\int q(P) dP} dP + c] \\ &= \frac{1}{(1 - P)^2} [\int \frac{(1 - P)^2}{P(1 - P)} dP + c] \\ &= \frac{1}{(1 - P)^2} [Ln P - P + c] \end{aligned}$$

و جواب عمومی به فرم پارامتری به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = \frac{1}{(1 - P)^2} (Ln P - P + c) + P \\ x = \frac{1}{(1 - P)^2} (Ln P - P + c) \end{cases}$$

هر معادله دیفرانسیل به صورت کلی

$$y = x f(y') + g(y') \quad (35)$$

معادله لاگرانژ، نامیده می‌شود. برای حل، فرض می‌کنیم $y' = P$

$$y = x f(P) + g(P) \quad (36)$$

از طرفین (۳۶)، نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$P = f(P) + x f'(P) \frac{dP}{dx} + g'(P) \frac{dP}{dx}$$

$$P - f(P) = [x f'(P) + g'(P)] \frac{dP}{dx}$$

با تقسیم طرفین بر $P - f(P)$ داریم *

$$1 = \left[x \cdot \frac{f'(P)}{P - f(P)} + \frac{g'(P)}{P - f(P)} \right] \frac{dP}{dx}$$

یا

$$\frac{dx}{dP} - x \frac{f'(P)}{P - f(P)} = \frac{g'(P)}{P - f(P)} \quad (37)$$

و (۳۷) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول، نسبت به تابع x و متغیر P می‌باشد. از حل (۳۷) جواب به صورت رابطه‌ای بین x و y به فرم $x = \Psi(P)$ بدست می‌آید. که با حذف P در دستگاه زیر

$$(38) \quad \begin{cases} y = x f(P) + g(P) \\ x = \Psi(P) \end{cases}$$

جواب عمومی بدست می‌آید. و اگر عملاً حذف P ممکن نباشد، جواب عمومی به فرم پارامتری صورت زیر خواهد بود.

$$(39) \quad \begin{cases} y = \Psi(P) f(P) + g(P) \\ x = \Psi(P) \end{cases}$$

* $P - f(P)$ مخالف صفر است. زیرا اگر بخواید صفر باشد $P = f(P)$ ، که در این صورت معادله کلرو است.

البته این معادله دارای دو جواب غیرعادی می باشد که مربوط به ریشه های $P^2 - P = 0$ است که به ازای $P=0$ ، $P=1$ بدست می آید. به این صورت که $P=0$ را در (۲) قرار می دهیم ، داریم $y=0$ و در معادله (۱) صدق می کند. و از قرارداد $P=1$ در (۲) داریم $y=x+1$ و در معادله (۱) صدق می کند. پس

$$y=0, y=x+1$$

جوابهای غیرعادی معادله می باشند.

مثال ۷۸.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = xy'^2 + y'^3 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با فرض $y' = P$ داریم

$$y = xP^2 + P^3 \quad (2)$$

از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می گیریم

$$P = P^2 + (2xP + 3P^2) \frac{dP}{dx}$$

$$P(1-P) = P(2x + 3P) \frac{dP}{dx}$$

یا

$$\frac{dx}{dP} - 2 \frac{x}{1-P} = \frac{3P}{1-P} \quad (3)$$

معادله (۳)، خطی مرتبه اول می باشد با

$$f(P) = \frac{-2}{1-P}, \quad q(P) = \frac{3P}{1-P}$$

$$g(P) = \int f(P) dP = 2 \int \frac{-dP}{1-P}$$

$$= 2 \ln |1-P|$$

$$x = \frac{1}{(1-P)^2} \left[\int \frac{3P}{1-P} (1-P)^2 dP + c \right] \quad \text{و}$$

$$= \frac{1}{(1-P)^2} \left[\frac{3}{2} P^2 - P^3 + c \right]$$

و جواب عمومی به شکل پارامتری به فرم زیر است.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(1-P)^2} \left(\frac{3}{2} P^2 - P^3 + c \right) \\ y = \frac{P^2}{(1-P)^2} \left(\frac{3}{2} P^2 - P^3 + c \right) + P^3 \end{cases}$$

این معادله دارای دو جواب غیرعادی می باشد، که مربوط به ریشه های $P(1-P)=0$ است و به ازای $P=0$ و $P=1$ بدست می آید. با قرارداد $P=0$ و $P=1$ در (۲) داریم $y=0$ و $y=x+1$ که هر دو در معادله صدق می کنند، پس جوابهای غیرعادی می باشند

ح: معادله مرتبه اول و از درجه دلخواه n به فرم

$$(40) (y')^n + f_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + f_{n-1}(x, y)y' + f_n(x, y) = 0$$

اگر قابل تجزیه به n عامل خطی نسبت به y' بصورت زیر باشد

$$(y' - g_1(x, y))(y' - g_2(x, y)) \dots (y' - g_n(x, y)) = 0$$

در این صورت n معادله مرتبه اول

$$y' = g_1(x, y), y' = g_2(x, y), \dots, y' = g_n(x, y)$$

را حل می کنیم و بدست می آوریم

$$\Psi_1(x, y, c) = 0, \Psi_2(x, y, c) = 0, \dots, \Psi_n(x, y, c) = 0$$

و جواب عمومی عبارت است از

$$\Psi_1(x, y, c) \cdot \Psi_2(x, y, c) \cdot \dots \cdot \Psi_n(x, y, c) = 0$$

مثال ۷۹.۲. معادله دیفرانسیل

$$xyy'^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x^2 + xy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

$$y' = \frac{-(x^2 + xy + y^2) \pm \sqrt{(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + xy)}}{2xy} \quad \text{حل.}$$

و عبارت زیر رادیکال

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 - 4x^3y - 4x^2y^2 =$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^3y + 2xy^3 - 2x^2y^2 =$$

$$(-x^2 + xy + y^2)^2$$

در نتیجه

$$y' = \frac{-(x^2 + xy + y^2) \pm (-x^2 + xy + y^2)}{2xy}$$

و

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{x+y}{x}$$

از حل این دو معادله داریم:

$$y^2 + x^2 - c = 0, \quad 2xy + x^2 - c = 0$$

و جواب عمومی معادله (۱) بصورت

$$(y^2 + x^2 - c) / (2xy + x^2 - c) = 0$$

می باشد.

مثال ۸۰۰۲. معادله دیفرانسیل

(۱)

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0$$

را حل کنید.

حل.

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}, \quad y' = \frac{y - \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

که هر دو همگن می باشند. ابتدا معادله

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

را حل می کنیم. با فرض

$$y = vx, \quad y' = v + xv'$$

$$v + xv' = v + \sqrt{v^2 - 1}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \frac{dx}{x} \quad (۲)$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم جدا می باشد. یا انتگرال گیری از طرفین (۲) داریم

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \ln |x| + \text{Lnc}, \quad c > 0$$

با استفاده از فرمول

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \ln(v + \sqrt{v^2 - a^2})$$

داریم

$$\text{Ln}(v + \sqrt{v^2 - 1}) = \text{Ln} cx$$

یا

$$cx = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$$

$$cx^2 - y = \sqrt{y^2 - x^2} \quad (۳)$$

و به طریق مشابه، جواب معادله

$$y' = \frac{y - \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

به فرم زیر می باشد.

$$cx^2 - y = -\sqrt{y^2 - x^2} \quad (۴)$$

و جواب عمومی، از ضرب (۳) و (۴) بدست می آید

$$[(cx^2 - y) - \sqrt{y^2 - x^2}][-(cx^2 - y) + \sqrt{y^2 - x^2}] = 0$$

یا

$$(cx^2 - y)^2 - (y^2 - x^2) = 0$$

$$c^2x^4 + y^2 - 2cx^2y - y^2 + x^2 = 0$$

و جواب غیرعادی از حذف c در دستگاه زیر بدست می آید

$$\begin{cases} y = \frac{c}{2} x^2 + \frac{1}{2c} \\ 0 = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2c^2} \end{cases}$$

$$y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$$

مجموعه مسائل ۶.۲

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱. $y = y'^2 + 4y'^3$

۲. $y = y' \sqrt{1 + y'^2}$

۳. $y = (y' - 1) e^{y'}$

۴. $x = y'^3 - y' + 2$

۵. $x = y' \cos y'$

۶. $x = y'^2 - 2y' + 2$

۷. $x = \frac{1}{1 + y'^2}$

۸. $x = y' + \sin y'$

۹. $4y = x^2 + y'^2$

۱۰. $yy'^2 - 2xy' + y = 0$

۱۱. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$

۱۲. $y^2 y'^2 + 3xy' - y = 0$

۱۳. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

۱۴. $y = xy' - e^{y'}$

۱۵. $y = xy' + \cos y'$

۱۶. $y = xy' + \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

۱۷. $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$

۱۸. $y = \frac{1}{2} (xy' + y' \ln y')$

۱۹. $y = 2xy' + \sin y'$

۲۰. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$

۲۱. $y = x(1 + y') + y'^2$

۲۲. $y = -xy' + y'^2$

۷.۲. روش تکرار پیکارد*

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بسیاری وجود دارند که نمی‌توان آنها را بوسیله یک روش استاندارد یا روشهای ساده‌ای که جوابهای دقیق بدهند، حل نمود. ولی می‌توان از یک روش تقریبی برای پیدا کردن جواب تقریبی استفاده نمود. در زیر بررسی یک روش تقریبی که به روش تکرار پیکارد موسوم است می‌پردازیم. و جواب تقریبی یک مسئله با شرایط اولیه به‌فرم

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

را بدست می‌آوریم و فرض می‌کنیم که (۱) در فاصله‌ای شامل x_0 دارای یک جواب باشد. با انتگرال‌گیری از (۱) داریم -

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y(S)) dS \quad (2)$$

زیرا به‌ازای $x = x_0$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(S, y(S)) dS = y_0 + 0$$

و علاوه با مشتق‌گیری از (۲) نسبت به x داریم

$$y' = f(x, y)$$

از طرفی برای مقادیر x نزدیک x_0 ، مقادیر y در نزدیکی y_0 می‌باشد. بنابراین اولین تقریب y_1 از y بوسیله تعویض y با y_0 در سمت راست (۲) بدست می‌آید.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_0) dS \quad (3)$$

و با تعویض y_0 با y_1 در سمت راست (۳). دومین تقریب صورت زیر می‌باشد.

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_1(S)) dS$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_{n-1}(S)) dS \quad (4)$$

و یک دنباله از تقریبات بدست می‌آید. و در شرایط خاصی، این دنباله به جواب معادله (۱) همگرا خواهد شد.

مثال ۸۱.۲. با استفاده از روش تکرار پیکارد، معادله دیفرانسیل

$$y' = 2y, \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

را حل کنید

حل. با توجه به فرمول (۴)

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_0(S)) dS$$

$$= 1 + \int_0^x 2 dS$$

$$= 1 + 2x$$

و به همین طریق y_2 و y_3 و ... را حساب می‌کنیم

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_1(S)) dS$$

$$= 1 + \int_0^x 2(1+2S) dS$$

$$= 1 + 2x + 2x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 2(1+2S+2S^2) dS$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به بسط مک‌لورن، e^{2x} نتیجه می‌گیریم، دنباله جوابها به e^{2x} همگرا است.

مثال ۸۲.۲. با استفاده از روش تکرار پیکارد، معادله دیفرانسیل

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 1$$

را حل کنید

حل.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_0) dS$$

$$= 1 + \int_0^x 2S dS$$

$$= 1 + x^2$$

$$y' = 1 + xy, \quad y(1) = 2 \quad .۸$$

$$y' = e^x + y, \quad y(0) = 0 \quad .۹$$

$$y' = x^2 - y, \quad y(1) = 2 \quad .۱۰$$

۸.۲. قضایای مربوط به وجود و یکتائی

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه

$$(۱) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

را بررسی می‌کنیم، (۱) ممکن است اصلاً جوابی نداشته باشد و یا دقیقاً یک جواب و یا بیش از یک جواب داشته باشد. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۸۳.۲. معادله دیفرانسیل

$$(y')^2 + 2 = 0$$

دارای جواب حقیقی نیست

مثال ۸۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$y'^2 + y^2 = 0, \quad y(0) = 2 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. تنها جواب معادله $y \equiv 0, (1)$ می‌باشد، که با توجه به شرط اولیه $y(0) = 2$.

معادله (۱) دارای جواب نیست.

مثال ۸۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x}, \quad y(0) = 2 \quad (۱)$$

را حل کنید

حل. معادله (۱)، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد و جواب عمومی آن به فرم

$$y = x \left[-2 \int \frac{dx}{x^2} + c \right]$$

می‌باشد، یعنی

$$y = x \left(\frac{2}{x} + c \right)$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_1(S)) dS$$

$$= 1 + \int_0^x 2S(1+S^2) dS$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_2(S)) dS$$

$$= 1 + \int_0^x 2S(1+S^2 + \frac{S^4}{2}) dS$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$$

و بهین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به بسط مکلاورن e^{x^2} نتیجه می‌گیریم، که دنباله جوابها به $y = e^{x^2}$ ، همگرا است.

مجموعه مسائل ۷.۲

با استفاده از روش تکرار بیکارد، معادلات زیر را حل کنید.

$$y' = y^2 + 4, \quad y(0) = 0 \quad .۱$$

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1 \quad .۲$$

$$y' = 2x(1+y), \quad y(0) = 0 \quad .۳$$

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0 \quad .۴$$

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad .۵$$

$$y' = x^2 + y, \quad y(1) = 3 \quad .۶$$

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 0 \quad .۷$$

$$= 2 + cx$$

و با توجه به شرط اولیه $y(0) = 2$

$$2 = 2 + 0$$

پس معادله (۱) دارای بینهایت جواب به فرم

$$y = 2 + cx$$

می باشد.

مثال ۰.۸۶.۲

معادله دیفرانسیل

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 2 \quad (1)$$

را حل کنید

حل.

$$y = x^3 + c$$

و با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y = x^3 + 2$$

یعنی معادله (۱)، دقیقاً یک جواب دارد.

حال می‌خواهیم، به بررسی این موضوع بپردازیم، که چه شرایطی باید برقرار باشد تا معادله دیفرانسیل

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

فقط یک جواب داشته باشد

قضیه ۳.۰۲، شرط کافی برای آنکه معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه به فرم

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

دارای جواب منحصر بفرد $y = F(x)$ باشد، آنست که $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک ناحیه مستطیل شکل شامل (x_0, y_0) در صفحه xy پیوسته و کراندار باشند.*

قضیه درباره جلوگیری پیدا کردن $F(x)$ راه حلی ارائه نمی‌دهد، بعلاوه پیوسته بودن $f(x, y)$ برای وجود جواب کافی است، از طرف دیگر چون شرایط قضیه فوق کافی

برای اثبات مراجعه شود به کتاب

است و لازم نیست، لذا معادله با شرط اولیه می‌تواند دارای جواب منحصر بفرد باشد، بطوری که شرایط قضیه برقرار نباشد.

مثال ۰.۸۷.۲، معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{1}{y^2}, \quad y(x_0) = 0$$

را بررسی می‌کنیم، این معادله دارای جواب عمومی

$$\frac{1}{3}y^3 = x + c$$

می‌باشد، که با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$$

که جواب منحصر بفرد معادله می‌باشد. اما

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{y^3}$$

در نقاط $(x_0, 0)$ روی محور x ها پیوسته و کراندار نیستند.

قضیه ۳.۰۲ را می‌توان به فرم زیر بیان نمود.

قضیه ۰.۴.۲ فرض کنید توابع $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ در ناحیه مستطیل شکل شامل (x_0, y_0)

$$x_1 < x < x_2, \quad y_1 < y < y_2$$

پیوسته و کراندار باشند، آنگاه یک فاصله $(x_0 - h, x_0 + h)$ وجود دارد بطوری که روی این فاصله جواب منحصر بفردی برای معادله زیر وجود دارد.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

تذکر ۱: شرط کراندار بودن، $\frac{\partial f}{\partial y}$ در قضیه وجود و یکنواختی را می‌توان با شرط ضعیف‌تری، بنام شرط لیب شیتز* عوض کرد.

تعریف ۰.۶.۲ فرض کنید تابع $f(x, y)$ در ناحیه مستطیل شکل

$$D: x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

پیوسته باشد. آنگاه می‌گوییم $f(x, y)$ در یک شرط لیب شیتز در D صدق می‌کند. اگر

$$|f(\xi_1, \eta_1) - f(\xi_2, \eta_2)| \leq k | \eta_1 - \eta_2 |$$

برای (ξ, η_1) ، (ξ, η_2) در D و برای ثابت k ، که به آن ثابت لیب شینز گوئیم.
در مثال زیر نشان می‌دهیم که تابع f داده شده دارای شرط لیب شینز می‌باشد
حال آنکه $\frac{\partial f}{\partial y}$ کراندار نیست.

مثال ۰۸۸.۰۲ $f(x, y) = \ln |y| \cos x$

نسبت به y مشتق می‌گیریم $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{|y|}{y} \cos x$

ملاحظه می‌شود که در نقاط $(x_0, 0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود نیست. اما شرط لیب شینز برقرار است، زیرا

$$\begin{aligned} |f(\xi, \eta_1) - f(\xi, \eta_2)| &= \left| |\eta_1| \cos \xi - |\eta_2| \cos \xi \right| \\ &= \left| \cos \xi \right| \left| |\eta_1| - |\eta_2| \right| \\ &\leq \left| |\eta_1| - |\eta_2| \right| \\ &\leq \left| \eta_1 - \eta_2 \right| \end{aligned}$$

پس شرط لیب شینز برقرار است با $k=1$

قضیه ۰۵۰۲. اگر تابع $f(x, y)$ پیوسته و در یک شرط لیب شینز در D صدق کند. آنگاه معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$

دارای یک جواب منحصر بفرد می‌باشد.

شرط لیب شینز برای منحصر بفرد بودن جواب، ضروری است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۰۸۹.۰۲. معادله دیفرانسیل

$y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$

یعنی

$f(x, y) = y^{2/3}$

را بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که تابع $f(x, y)$ پیوسته می‌باشد. حال شرط لیب شینز را بررسی می‌کنیم

$$|f(\xi, \eta_1) - f(\xi, \eta_2)| = \left| \eta_1^{2/3} - \eta_2^{2/3} \right|$$

حال باید بررسی شود که آیا k ای وجود دارد بقسمی که

$$\left| \eta_1^{2/3} - \eta_2^{2/3} \right| \leq k \left| \eta_1 - \eta_2 \right|$$

فرض می‌کنیم $\eta_2 = 0$ و $\eta_1 > 0$ آنگاه

$$\frac{1}{\eta_1^{1/3}} \leq k$$

و واضح است که با نزدیک شدن η_1 به صفر، $\frac{1}{\eta_1^{1/3}}$ از هر عدد مثبت بزرگتر می‌باشد. پس شرط لیب شینز برقرار نیست. از طرفی معادله دارای جواب عمومی

$$y = \left(\frac{x+c}{3} \right)^3$$

می‌باشد که با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y = \frac{x^3}{27}$$

از طرفی $y=0$ نیز جواب معادله می‌باشد، یعنی معادله دارای جواب یکتا نیست. حال می‌خواهیم روشی برای پیدا کردن جواب معادله، دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

ارائه دهیم، اگر معادله در شرایط قضیه وجود و یکتائی صدق کند. آنگاه اگر با روشهای کلاسیک* قابل حل باشد که آنرا حل می‌کنیم و در غیر اینصورت از روش تکرار بیگارد استفاده می‌کنیم که در اینصورت یک دنباله از جواب‌های تقریبی $\{y_n(x)\}$ را بدست می‌آوریم.

حال فرض کنید D یک ناحیه مستطیل شکل با مرکز (x_0, y_0) باشد.

$$D = \{ |x - x_0| < a, |y - y_0| < b \}$$

در اینصورت طبق قضیه ۰۲. ۴. به‌عنوان هر x در فاصله $x_0 - h < x < x_0 + h$ یک جواب منحصر بفرد وجود دارد. البته مقدار h از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right) , M = \max |f(x, y)|$$

تذکر ۰۲. وقتی از روش تکرار بیگارد استفاده می‌کنیم، خطای جواب $y_n(x)$ از جواب

* متغیرها از هم جدا، همگن، خطی و غیره

اصلی $y(x)$ معادله بوسیله نامساوی زیر بیان می شود.

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n$$

که در آن

$$N = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

مثال ۹۰.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

را حل می کنیم و فرض می کنیم

$$D = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

حل داریم

$$|f(x,y)| = x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow M = 2$$

و $a = 1$ و $b = 1$

$$h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

یعنی

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

حال با استفاده از روش تکرار بیکاردا، معادله را حل می کنیم

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x (S^2) dS = \frac{1}{3} x^3$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x \left[S^2 + \frac{S^6}{9}\right] dS = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x \left[S^2 + \frac{S^6}{9} + \frac{2S^{10}}{3 \times 63} + \frac{S^{14}}{63^2}\right] dS$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

و قدر مطلق خطای جمله سوم از جواب اصلی

$$|y_3(x) - y(x)| \leq \frac{2}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 2^2 = \frac{1}{6}$$

که

$$N = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_D |2y| = 2$$

مثال ۹۱.۲. بزرگترین h ای را پیدا کنید که برای آن وجود یک جواب معادله

دیفرانسیل

$$y' = 4 + y^2, \quad y(0) = 0$$

را تضمین می کند.

حل.

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

و

$$|x| < a, \quad |y| < b$$

$$M = \max_{(x,y) \in D} |f(x,y)|$$

از طرفی

$$D = \{(x,y) / |x| < a, |y| < b\}, f(x,y) = 4 + y^2$$

در نتیجه

$$M = \max_{|y| < b} |4 + y^2| < 4 + b^2$$

$$h = \min\left(a, \frac{b}{4 + b^2}\right)$$

حال کمترین مقدار $\frac{b}{4 + b^2}$ را بدست می آوریم، برای اینکار نسبت به b مشتق می گیریم.

داریم

$$\frac{b^2 + 4 - 2b^2}{(4 + b^2)^2}$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق، داریم

$$4 - b^2 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$b = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثال ۹۲.۲. تمام جوابهای معادله با شرط اولیه

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(1) = 0$$

را پیدا کنید. کدامیک از آنها با استفاده از روش پیکارد با انتخاب $y_0 = 0$ حاصل می شود؟ آیا $2\sqrt{y}$ در شرط لیب شیتز صدق می کند؟ حل.

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2 dx$$

$$2y^{1/2} = 2x + c$$

و جواب عمومی بدوم زیر می باشد.

$$y = (x+c)^2 \quad (1)$$

با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y = (x-1)^2 \quad (2)$$

حال اگر از (1) نسبت به c مشتق بگیریم، داریم

$$0 = 2(x+c) \Rightarrow c = -x \quad (3)$$

و با حذف c ، بین (1) و (3) داریم

$$y = 0$$

جواب غیرعادی
حال با استفاده از تکرار پیکارد، معادله را حل می کنیم

$$y_1 = 0 + \int_1^x 0 dx = 0$$

$$y_2 = 0 + \int_1^x 0 dx = 0$$

$$y_n = 0$$

و در نتیجه $y \equiv 0$ ، یعنی جواب غیرعادی، با روش پیکارد بدست آمد.

حال شرط لیب شیتز را برای $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ بررسی می کنیم.

$$|f(\xi, \eta_1) - f(\xi, \eta_2)| = 2|\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\eta_2}|$$

باید بررسی کنیم که آیا وجود دارد، k ای که رابطه زیر برقرار باشد

$$2|\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\eta_2}| \leq k|\eta_1 - \eta_2|$$

با فرض $\eta_2 = 0$ ، $\eta_1 > 0$ داریم

$$\frac{2}{\sqrt{\eta_1}} \leq k$$

واضح است که برای η_1 نزدیک صفر، $\frac{2}{\sqrt{\eta_1}}$ از هر عدد مثبت، بزرگتر است. پس شرط لیب شیتز برقرار است.

مجموعه مسائل ۸۰۲

۱. نشان دهید، تابع زیر در شرط لیب شیتز در صفحه xy صدق می کند. اما $\frac{\partial f}{\partial y}$ وجود ندارد

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

۲. نشان دهید معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه زیر، دارای جواب نیست

$$xy' = 3y, \quad y(0) = 1$$

۳. بزرگترین مجموعه در صفحه xoy را مشخص کنید، که از هر نقطه این مجموعه یک و تنها یک جواب معادله $dy = y dx$ می گذرد.

۴. نشان دهید

$$f(x, y) = |\sin y| + x$$

در شرط لیب شیتز با $k=1$ در تمام صفحه xoy صادق است ولی $\frac{\partial f}{\partial y}$ در $y=0$ موجود نیست.

۵. معادله دیفرانسیل

$$xy' = 2y$$

را در نظر می گیریم. تمام شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ را پیدا کنید، بقسمی که معادله دارای جواب نباشد.

ب: بیش از یک جواب داشته باشد.

پ: دقیقاً یک جواب داشته باشد.

در تمرینهای ۶ الی ۱۲، ناحیه ای را پیدا کنید که معادلات داده شده دارای جواب منحصر بفرد باشند

$$y' = x\sqrt{1-y^2} \quad ۶.$$

$$y' = x^2 - y^2 \quad ۷.$$

$$y' = \frac{y}{y-x} \quad ۸.$$

$$y' = 1 + \tan y \quad ۹.$$

$x + y - 2 + (1 - x)y' = 0$.۱۱

$2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$.۱۲

$2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$.۱۳

$4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$.۱۴

$y' \cos x - y \sin x = 2x$, $y(0) = 0$.۱۵

$y'x \operatorname{Ln} x - y = 3x^3 \operatorname{Ln}^2 x$.۱۶

$(2x - y^2)y' = 2y$.۱۷

$y' + \sin y + x \cos y + x = 0$ * .۱۸

$2y' \operatorname{Ln} x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y}$.۱۹

$2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x$.۲۰

$y' - \tan y = e^x \frac{1}{\cos y}$.۲۱

$y' = y(e^x + \operatorname{Ln} y)$ ** .۲۲

* راهتمائی: توابع $\sin y$ و $\cos y$ را برحسب نصف قوس بیان کنید و قرار

دهید $\tan \frac{y}{2} = z$

** راهتمائی: قرار دهید $\operatorname{Ln} y = u$

$y' = x^2 + \sqrt{x - y^2}$.۱۰

$y' = \operatorname{Ln} |4 - y^2|$.۱۱

$y' = \frac{1}{x^2 - y^2}$.۱۲

تمرینهای دوره‌های فصل دوم

$y' = (x - y)^2 + 1$.۱

$y'x \sin x + y(\sin x - x \cos x) = \sin x \cos x - x$.۲

$(5xy - 4y^2 - 6x^2)dx + (y^2 - 2xy + 6x^2)dy = 0$.۳

$(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$.۴

$(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.۵

$y' \sin x = y \operatorname{Ln} y$, $y(\frac{\pi}{2}) = e$.۶

$y + xy' = a(1 + xy)$, $y(\frac{1}{a}) = -a$.۷

$y^2 \sin x dx + \cos^2 x \operatorname{Ln} y dy = 0$.۸

$xy' = y + x \cos^2 \frac{y}{x}$.۹

$xy' = y(\operatorname{Ln} y - \operatorname{Ln} x)$.۱۰

$$y = (1 + y')x + y'^2 \quad . ۳۷$$

۳۸. معادله منحنی را پیدا کنید که از نقطه (۱ و ۱) گذشته و ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه مناسب با مربع عرض نقطه تماس باشد.

۳۹. معادله منحنی را پیدا کنید که از نقطه (۰, -۲) گذشته و ضریب زاویه در هر نقطه، سه واحد بیش از عرض نقطه تماس باشد.

مسیرهای قائم منحنی‌های زیر را پیدا کنید.

$$y^2 = 4(x - a) \quad . ۴۰$$

$$x^2 - y^2 = c \quad . ۴۱$$

$$x^2 + y^2 = 2cx \quad . ۴۲$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad . ۴۳$$

$$(y + \frac{2}{x^2}) dx + (x - \frac{3}{y^2}) dy = 0 \quad . ۳۳$$

$$(2x + e^{x/y}) dx + (1 - \frac{x}{y}) e^{x/y} dy = 0 \quad . ۳۴$$

$$2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0 \quad . ۳۵$$

$$(\sin y - y \sin x + \frac{1}{x}) dx + (x \cos y + \cos x - \frac{1}{y}) dy = 0 \quad . ۳۶$$

$$(y^2 - 3xy - 2x^2) dx + (xy - x^2) dy = 0 \quad . ۳۷$$

$$(x - y^2) dx + 2xy dy = 0 \quad . ۳۸$$

$$(2xy^2 - 3y^3) dx + (7 - 3xy^2) dy = 0 \quad . ۳۹$$

$$y'^2 - yy' + e^x = 0 \quad . ۴۰$$

$$y'^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0 \quad . ۴۱$$

$$y = x \frac{1 + y'^2}{2y'} \quad . ۴۲$$

$$y = xy' - \frac{1}{y'} \quad . ۴۳$$

$$y = xy' + y' + \sqrt{y'} \quad . ۴۴$$

$$y = -xy' + x^4 y'^2 \quad . ۴۵$$

$$y(3 - 4y)^2 y'^2 = 4(1 - y) \quad . ۴۶$$

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

مقدمه. در این فصل می‌خواهیم طریقه حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را بیان کنیم و روش حل را به مراتب بالاتر تعمیم دهیم. صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام، به فرم

$$(1) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

می‌باشد. معادله (1) را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

الف) معادلات دیفرانسیل خطی

ب) معادلات دیفرانسیل غیرخطی

معادلات دیفرانسیل خطی نیز خود به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

۲. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر

از آنجا که معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت از اهمیت بیشتری برخوردارند، لذا قسمت اعظم این فصل را به طریقه حل این نوع معادلات اختصاص داده‌ایم.

۱.۳ معادلات خطی مرتبه دوم

تعریف ۱.۳. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را خطی گوئیم، اگر به فرم

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

بیان شود.

تعریف ۲۰۳. اگر در معادله (۱) $r(x) \equiv 0$ باشد، معادله (۱) را همگن * و در غیر این صورت، غیرهمگن می‌گویند. صورت کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(2) \quad y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$$

تعریف ۳۰۳. توابع $P(x)$ و $q(x)$ در معادله (۱) را ضرایب معادله می‌نامیم.

قضیه ۱۰۳. اگر توابع $P(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ روی فاصله باز $a_1 < x < a_2$ پیوسته باشند،

آنگاه یک و فقط یک تابع مانند $y = G(x)$ وجود دارد که در معادله

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = r(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

در یک نقطه خاص x_0 در فاصله (a_1, a_2) صدق می‌کند.

مثال ۱۰۳. معادله دیفرانسیل

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

را بررسی می‌کنیم؛ می‌دانیم که جوابهای این معادله

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

می‌باشد (چون در معادله صدق می‌کنند). و با توجه به شرایط اولیه، $y = \sin x$ جواب منحصر بفرد معادله است.

مثال ۲۰۳. جواب منحصر بفرد معادله دیفرانسیل

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0, \quad a_1 < x < a_2$$

را که در شرایط اولیه

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad a_1 < x_0 < a_2$$

صدق می‌کند را پیدا کنید.

حل. $y = 0$ در معادله صدق می‌کند و در شرایط اولیه نیز صدق می‌کند. پس جواب

منحصر بفرد معادله $y = 0$ می‌باشد.

قضیه ۲۰۳. اگر $v_1 = G(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

باشد، آنگاه $y = cG(x)$ (c ثابت دلخواه) نیز یک جواب معادله خواهد بود.

اثبات. طبق تعریف جواب، کافیت نشان دهیم که $y = cG(x)$ و مشتقاتش در معادله صدق می‌کند.

$$y = cG(x), \quad y' = cG'(x), \quad y'' = cG''(x) \quad (2)$$

در معادله (۱) بجای y, y', y'' را قرار می‌دهیم.

$$cG''(x) + P(x)cG'(x) + q(x)cG(x) =$$

$$c(G''(x) + P(x)G'(x) + q(x)G(x)) = 0$$

عبارت داخل پرانتز صفر است چون فرض کرده بودیم که $G(x)$ جواب معادله (۱) است. پس $y = cG(x)$ در معادله صدق می‌کند؛ یعنی جواب معادله است.

قضیه ۳۰۳. اگر y_1, y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ نیز یک جواب برای (۱) می‌باشد.

اثبات. باید نشان دهیم $y_1 + y_2$ در معادله (۱) صدق می‌کند.

$$y_1'' + y_2'' + P(x)(y_1' + y_2') + q(x)(y_1 + y_2) =$$

$$(y_1'' + P(x)y_1' + q(x)y_1) + (y_2'' + P(x)y_2' + q(x)y_2) = 0$$

هر دو پرانتز برابر صفر هستند، زیرا فرض کرده بودیم که y_1 و y_2 جوابهای (۱) هستند.

تذکره ۱. از قضایای ۲۰۳ و ۳۰۳ نتیجه می‌گیریم که اگر y_1 و y_2 دو جواب برای

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، همگن باشند، در این صورت $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز یک

جواب خواهد بود.

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$y_1 = x^2, \quad y_1' = 2x, \quad y_1'' = 2$$

در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$x^2(2) = x(2x)$$

$y_2 = 5$ نیز در معادله صدق می‌کند. حال نشان می‌دهیم بطور مثال x^2 در معادله (۱)

صدق نمی‌کند، زیرا

$$-y_2 = -x^2, \quad (-y_2)' = -2x, \quad (-y_2)'' = -2 \quad (2)$$

(۲) را در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$(-x^2)(-2) \neq x(-2x)$$

یعنی $y_2 = -x^2$ جواب معادله نیست. بطریق مشابه نشان می‌دهیم که $y_1 + y_2$ در معادله (۱)

صدق نمی‌کند.

$$y_1 + y_2 = x^2 + 5, \quad (y_1 + y_2)' = 2x, \quad (y_1 + y_2)'' = 2 \quad (3)$$

(۳) را در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$(x^2 + 5)(2) \neq x(2x)$$

مثال ۵.۳. نشان دهید که اگر y_1 یک جواب معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x) \quad (1)$$

و y_2 یک جواب معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ یک جواب برای (۱) خواهد بود.

حل. فرض می‌کنیم $h(x) = y_1 + y_2$ ؛ حال باید نشان دهیم که $h(x)$ در معادله (۱) صدق می‌کند.

$$h(x) = y_1 + y_2, \quad h'(x) = y_1' + y_2', \quad h''(x) = y_1'' + y_2'' \quad (3)$$

(۳) را در (۱) قرار می‌دهیم

$$y_1'' + y_2'' + P(x)(y_1' + y_2') + Q(x)(y_1 + y_2) =$$

$$(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + (y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2) = r(x) \quad (4)$$

برانتز دوم (۴) برابر صفر است. زیرا فرض کرده بودیم y_2 یک جواب (۲) باشد و

برانتز اول (۴) برابر با $r(x)$ می‌باشد، زیرا y_1 یک جواب (۱) است.

تذکره ۲. قضایای ۲.۳ و ۳.۳. فقط برای معادلات خطی همگن برقرار است (از هر مرتبه دلخواه n) و برای معادلات غیرخطی و غیرهمگن برقرار نیست. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۳.۳. معادله دیفرانسیل

$$y'' - 2y' - 3y = 2 \quad (1)$$

دارای جوابهای

$$y_1 = e^{3x} - \frac{2}{3}, \quad y_2 = e^{-x} - \frac{2}{3}$$

می‌باشد. زیرا در معادله صدق می‌کنند. برای نشان دادن این مطلب، کافیت y_1 و

y_1' و y_1'' را در (۱) قرار دهیم.

$$y_1' = 3e^{3x}, \quad y_1'' = 9e^{3x}$$

در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$9e^{3x} - 6e^{3x} - 3e^{3x} + 2 = 2$$

و بطریق مشابه می‌توان نشان داد که $y_2 = e^{-x} - \frac{2}{3}$ نیز یک جواب (۱) می‌باشد.

ولی بطور مثال، $3y_1$ در معادله (۱) صدق نمی‌کند، زیرا

$$3y_1 = 3e^{3x} - 2, \quad (3y_1)' = 9e^{3x}, \quad (3y_1)'' = 27e^{3x}$$

در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$27e^{3x} - 18e^{3x} - 9e^{3x} + 6 \neq 2$$

و همین‌طور $y_1 + y_2$ نیز در معادله صدق نمی‌کند، زیرا

$$y_1 + y_2 = e^{3x} + e^{-x} - \frac{4}{3}, \quad (y_1 + y_2)' = 3e^{3x} - e^{-x}$$

$$(y_1 + y_2)'' = 9e^{3x} + e^{-x}$$

در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$9e^{3x} + e^{-x} - 6e^{3x} + 2e^{-x} - 3e^{3x} - 3e^{-x} + 4 \neq 2$$

مثال ۴.۳. معادله دیفرانسیل

$$y \cdot y'' = x y' \quad (1)$$

دارای جوابهای

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = 5$$

می‌باشد. نشان می‌دهیم که y_1 در معادله (۱) صدق می‌کند.

مجموعه مسائل ۱۰۳

۱. نشان دهید

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x$$

حوابهای معادله

$$y'' + 4y = 0$$

می باشد و $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز یک جواب معادله است.

۲. نشان دهید

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = x e^{-2x}$$

حوابهای معادله زیر می باشد.

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

۳. نشان دهید

$$y_1 = e^x \cos 2x, \quad y_2 = e^x \sin 2x$$

حوابهای معادله زیر می باشد.

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

۴. نشان دهید

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

حوابهای معادله زیر می باشد.

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

۵. نشان دهید

$$y_1 = x, \quad y_2 = x \ln x$$

حوابهای معادله زیر می باشد.

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

۶. ثابت کند اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$$

باشد، آنگاه $y_1 + y_2$ یک جواب برای معادله فوق نیست.

۲۰۳ معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

تعریف ۴۰۳ معادله دیفرانسیل به فرم

$$(۱) \quad y'' + ay' + by = 0$$

را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت می نامیم که در آن $a, b \in \mathbb{R}$. مقادیر ثابت هستند و دامنه x محور x ها می باشد.

چطور معادله را حل کنیم؟ می دانیم که جواب معادله خطی همگن مرتبه اول با ضریب ثابت، یعنی $y' + ky = 0$ بصورت $y = c e^{-kx}$ می باشد. زیرا

$$(۲) \quad y' + ky = 0 \Rightarrow dy + ky dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + k dx = 0$$

و (۲) از نوع متغیرها از هم جدا می باشد. و با انتگرال گیری از طرفین (۲) داریم

$$\int \frac{dy}{y} + k \int dx = c_1 \Rightarrow \ln |y| + kx = c_1$$

$$\ln |y| = c_1 - kx$$

$$y = e^{c_1 - kx}$$

$$= c e^{-kx}$$

پس طبیعی است که حدس زده شود: ممکن است $y = e^{tx}$ یک جواب (۱) باشد؛ البته اگر t بطور مناسب انتخاب شود. حال این جواب و مشتقاتش را در (۱) قرار می دهیم و t را طوری تعیین می کنیم که $y = e^{tx}$ در معادله صدق کند.

$$(۳) \quad y = e^{tx}, \quad y' = t e^{tx}, \quad y'' = t^2 e^{tx}$$

(۳) را در (۱) می گذاریم

$$(۴) \quad t^2 e^{tx} + at e^{tx} + b e^{tx} = e^{tx} (t^2 + at + b)$$

آیا (۴) می تواند صفر باشد (یعنی e^{tx} جواب (۱) باشد). پاسخ مثبت است، زیرا اگر t ریشه معادله $t^2 + at + b = 0$ انتخاب شده بود، (۴) صفر می شد. پس برای حل معادله (۱)، ابتدا معادله

$$(۵) \quad t^2 + at + b = 0$$

را که به آن معادله مفسر یا معادله شاخصی* می گوئیم را تشکیل می دهیم. و ریشه های (۵) را بدست می آوریم. چون (۵) یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی می باشد، پس سه حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول. معادله مفسر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد ($a^2 - 4b > 0$)

اگر این دو ریشه را با t_1 و t_2 نشان دهیم، آنگاه

* Characteristic equation

$$y_1 = e^{1x}, \quad y_2 = e^{2x}$$

حوابهای (۱) می باشند.

مثال ۶.۳. جوابهای معادله زیر

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

را پیدا کنید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می دهیم

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

و سپس ریشه های آن را بدست می آوریم

$$t = 1 \pm \sqrt{1+3}, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = -1$$

پس $y = e^{3x}$ و $y = e^{-x}$ جوابهای معادله می باشند.

می خواهیم بررسی کنیم که جواب عمومی چگونه بدست می آید. می دانیم که جواب عمومی باید شامل دو پارامتر ثابت مستقل باشد (یعنی اینکه جواب را نتوان به فرمی تبدیل کرد که شامل کمتر از دو پارامتر ثابت دلخواه باشد). از طرفی بر طبق قضایای ۲.۳ و ۳.۳ و تذکر ۱. بخش قبل می دانیم اگر y_1, y_2 دو جواب (۱) روی یک فاصله باشد، آنگاه

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

که در آن c_1, c_2 ثابت های دلخواه هستند نیز یک جواب برای (۱) می باشد. (روی همان فاصله) و چون این جواب به دو پارامتر ثابت دلخواه بستگی دارد، پس می تواند جواب عمومی معادله باشد. به شرط آنکه نتوان آنرا تبدیل به عبارتی کرد که شامل کمتر از دو پارامتر باشد.

اکنون به بررسی این مطلب می پردازیم که y_1, y_2 باید چه شرایطی داشته باشند تا چنین تبدیلی امکان پذیر نباشد:

تعریف ۵.۳. دو تابع $y_1(x), y_2(x)$ را روی فاصله $x_0 \leq x \leq x_1$ مستقل خطی گوئیم اگر برای هر x در این فاصله

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

تنها اگر $c_1 = c_2 = 0$ و بستگی خطی دارند اگر

$$y_1(x) = k y_2(x) \quad \text{یا} \quad y_2(x) = k y_1(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

(k و k دو عدد ثابت می باشند.)

تذکر ۱. اگر $y_1(x) \equiv 0$ یا $y_2(x) \equiv 0$ فاصله $x_0 \leq x \leq x_1$ باشد. آنگاه y_1, y_2 بستگی خطی دارند. و در بقیه حالات y_1, y_2 بستگی خطی دارند اگر و فقط اگر y_1/y_2 برابر با یک مقدار ثابت باشد. پس اگر y_1/y_2 تابعی از x باشد (به x بستگی داشته باشد) در این صورت y_1, y_2 مستقل خطی هستند.

مثال ۷.۳. توابع

$$y_1 = 6x, \quad y_2 = 5x$$

بستگی خطی دارند. زیرا

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{6x}{5x} = \frac{6}{5}$$

مثال ۸.۳. توابع

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^x$$

مستقل خطی اند، زیرا

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$$

تذکر ۲. اگر y_1, y_2 دو جواب معادله (۱) باشند و بستگی خطی داشته باشند، یعنی $\frac{y_1}{y_2} = k$ (عدد ثابت) در این صورت

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

تبدیل به عبارتی می شود که شامل یک پارامتر دلخواه است، زیرا

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 k y_2(x) + c_2 y_2(x) \\ &= (c_1 k + c_2) y_2(x) \\ &= c y_2(x) \end{aligned}$$

تذکر ۳. اگر y_1, y_2 دو جواب معادله (۱) و مستقل خطی باشند، چنین تبدیلی امکان پذیر نیست.

صورت $y_1 = e^{t_1 x}$ و $y_2 = e^{t_2 x}$ ریشه‌های معادله مفسر هستند (جوابهای معادله (۱) خواهند بود و چون

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{t_1 x}}{e^{t_2 x}} = e^{(t_1 - t_2)x}$$

مخالف مقدار ثابت است، پس y_1, y_2 مستقل خطی اند و در نتیجه

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} \quad (۶)$$

تامل دو پارامتر ثابت می‌باشد و (۶) جواب عمومی معادله (۱) است. مثال ۹.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2y' - 15y = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^2 + 2t - 15 = 0 \\ t = 1 \pm \sqrt{1+15}, \quad t_1 = 5, \quad t_2 = -3$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$$

مثال ۱۰.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4 \quad (۱)$$

را پیدا کنید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^2 - t - 6 = 0$$

ریشه‌های معادله مفسر $t_1 = 3, t_2 = -2$ می‌باشد. بنابراین، جواب عمومی معادله

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (۲)$$

می‌باشد. از (۲) مشتق می‌گیریم، داریم

$$y' = -2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} \quad (۳)$$

و شرایط اولیه را در (۲) و (۳) قرار می‌دهیم، داریم

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_2 \\ -4 = -2c_1 + 3c_2 \end{cases} \quad (۴)$$

از حل دستگاه (۴) داریم $c_1 = 13/5$ و $c_2 = 2/5$. بنابراین جواب معادله (۱)

$$y = \frac{1}{5} (3e^{2x} + 2e^{3x})$$

می‌باشد.

حالت دوم. معادله مفسر دارای دو ریشه متمایز مختلط یا موهومی باشد ($a^2 - 4b < 0$) اگر مبین معادله مفسر $(a^2 - 4b)$ منفی باشد در این صورت جوابهای معادله مفسر به صورت

$$t_1 = p + iq, \quad t_2 = p - iq$$

خواهد بود. در نتیجه جوابهای معادله (۱) به فرم

$$y_1 = e^{(p+iq)x}$$

و

$$y_2 = e^{(p-iq)x}$$

می‌شوند و چون

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{(p+iq)x}}{e^{(p-iq)x}} \\ = e^{2iqx}$$

مخالف مقدار ثابت می‌باشد، پس جواب عمومی معادله (۱) به فرم

$$y(x) = c_1 e^{(p+iq)x} + c_2 e^{(p-iq)x} \quad (۷)$$

است. از طرفی طبق فرمول اولر*، می‌دانیم

$$e^{iq} = \cos \theta + i \sin \theta$$

و با انتخاب

* Euler's Formula

$$c_1 = \frac{1}{2}(A - iB), \quad c_2 = \frac{1}{2}(A + iB)$$

(۷) بفرم

$$y(x) = e^{px} \left(\left(\frac{A-iB}{2} \right) (\cos qx + i \sin qx) \right. \\ \left. + \left(\frac{A+iB}{2} \right) (\cos qx - i \sin qx) \right) \\ = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx) \quad (۸)$$

مان می‌شود. واضح است که $e^{px} \cos qx$ و $e^{px} \sin qx$ مستقل خطی هستند.توجه ۲. اگر معادله مفسر دارای دو ریشه بصورت $p \pm iq$ باشد، در این صورت، جواب عمومی معادله (۱) بفرم زیر می‌باشد:

$$y(x) = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx) \quad (۹)$$

مثال ۱۱.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

را بسویسد

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^2 + 2t + 10 = 0$$

ریشه‌های معادله مفسر را پیدا می‌کنیم

$$t = -1 \pm \sqrt{1-10}, \quad t_1 = -1 + 3i, \quad t_2 = -1 - 3i$$

$$p = -1, \quad q = 3$$

و جواب عمومی بفرم زیر می‌باشد

$$y = e^{-x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

مثال ۱۲.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

را بسویسد

حل. معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$t^2 - 4t + 5 = 0$$

$$t = 2 \pm \sqrt{4-5}$$

$$= 2 \pm i$$

و جواب عمومی

$$y = e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$$

مثال ۱۳.۳. معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه

$$8y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم

$$t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} = 0$$

$$t = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{8}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از:

$$y = e^{-\frac{x}{4}} \left(A \cos \frac{x}{4} + B \sin \frac{x}{4} \right) \quad (۲)$$

از (۲) مشتق می‌گیریم، داریم

$$y' = -\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \left(A \cos \frac{x}{4} + B \sin \frac{x}{4} \right)$$

(۳)

$$+ \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \left(-A \sin \frac{x}{4} + B \cos \frac{x}{4} \right)$$

با توجه به شرایط اولیه و (۲) و (۳) داریم

$$0 = e^0 (A \cos 0 + B \sin 0)$$

$$= A$$

$$1 = -\frac{1}{4} e^0 (0 + B \sin 0) + \frac{1}{4} e^0 (-0 + B \cos 0)$$

$$= \frac{1}{4} B$$

یعنی $A=0$ ، $B=4$. پس جواب معادله عبارت است از

$$y = 4e^{-x/4} \sin \frac{x}{4}$$

مثال ۱۴.۳. معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (1)$$

را حل کنید.*

حل. معادله مفسر را تشکیل می دهیم و ریشه های آنرا حساب می کنیم

$$t^2 - 2t + 10 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از

$$y = e^x (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم

$$-1 = e^0 (A \cos 0 + B \sin 0)$$

$$= A$$

$$1 = e^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos \frac{3\pi}{2} + B \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$= -e^{\frac{\pi}{2}} B$$

و جواب معادله به فرم زیر می باشد.

$$y = e^x \left(-\cos 3x - e^{-\frac{\pi}{2}} \sin 3x \right).$$

حالت سوم. معادله مفسر دارای ریشه مضاعف باشد. ($a^2 - 4b = 0$)

در این حالت ریشه های معادله مفسر، مساوی هستند. یعنی $t_1 = t_2 = t$. پس یک جواب معادله

$$y_1 = e^{tx}, \quad t = -\frac{a}{2}$$

حال برای پیدا کردن جواب دوم که با جواب اول مستقل خطی باشد، از روش تغییر پارامتر استفاده می کنیم و جواب دوم را به فرم

* یک جنس معادله دیفرانسیلی را مساله با مقدار مرزی گویند.

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

در نظر می گیریم، برای تعیین $u(x)$ ، y_2' ، y_2'' را در معادله (۱) قرار می دهیم

$$y_2'(x) = -\frac{a}{2}u(x)e^{-\frac{a}{2}x} + u'(x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y_2''(x) = \frac{a^2}{4}u(x)e^{-\frac{a}{2}x} - au'(x)e^{-\frac{a}{2}x} + u''(x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

در (۱) جایگذاری می کنیم. البته چون $a^2 - 4b = 0$ است پس $b = \frac{a^2}{4}$ و معادله (۱) به فرم زیر است

$$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0$$

$$\frac{a^2}{e^{\frac{a}{2}x}} \left(\frac{a^2}{4}u(x) - au'(x) + u''(x) - \frac{a^2}{2}u(x) + au'(x) + \frac{a^2}{4}u(x) \right) = 0$$

و در نتیجه

$$u''(x) = 0 \Rightarrow u(x) = c_2 x$$

(ثابت دوم انتگرال را می توان حذف کرد)

$$y_2(x) = c_2 x e^{-\frac{a}{2}x} \quad \text{و}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2}x} \quad (10)$$

مثال ۱۵.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

را بنویسید

حل. معادله مفسر را تشکیل می دهیم و ریشه های آنرا پیدا می کنیم

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$$

مجموعه سائل ۲۰۳

حواب عمومی معادلات زیر را بنویسید .

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad .1$$

$$y'' - 6y' + 25y = 0 \quad .2$$

$$y'' - 3y' = 0 \quad .3$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad .4$$

$$y'' + y' + 2y = 0 \quad .5$$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید .

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad .6$$

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 9 \quad .7$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -6 \quad .8$$

$$y'' + y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad .9$$

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad .10$$

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{1}{\pi} \quad .11$$

$$4y'' + 20y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad .12$$

۱۳. نشان دهید که حواب عمومی معادله*

$$y'' - y = 0$$

را می توان به صورت زیر نوشت .

$$y(x) = C_1 \cos hx + C_2 \sin hx$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت ، را طوری پیدا کنید که توابع زیر جوابهای آن باشند .

$$1, e^{3x} \quad .14$$

$$e^{(-1-3i)x}, e^{(-1+3i)x} \quad .15$$

$$e^{-x}, x e^{-x} \quad .16$$

$$e^{2x}, e^{-x} \quad .17$$

$$e^{2x} \cos 2x, e^{2x} \sin 2x \quad .18$$

$$e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x \quad .19$$

۳۰۲. معادلات خطی همگن از مرتبه دلخواه n با ضرایب ثابت

صورت کلی یک معادله خطی همگن از مرتبه دلخواه n به فرم

$$(1) \quad y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0$$

می باشد $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), f_n(x)$ را ضرایب می نامند . حال اگر ضرایب همگی ثابت باشند (۱) به فرم

$$(2) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

درمی آید . برای حل (۲) همان روش را که در مورد معادلات خطی همگن مرتبه دوم با

ضرایب ثابت بیان کردیم، اعمال می‌کنیم.

آیا $y = e^{tx}$ می‌تواند یک جواب (۲) باشد؟ برای پاسخ به این سؤال کافیت

$y = e^{tx}$ و مشتقاتش را در (۲) قرار دهیم.

$$(۳) \quad y = e^{tx}, \quad y' = t e^{tx}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = t^n e^{tx}$$

با جایگذاری (۳) در (۲) داریم،

$$(۴) \quad e^{tx} (t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n)$$

(۴) می‌تواند صفر باشد، اگر t ریشه معادله زیر انتخاب شود.

$$(۵) \quad t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = 0$$

(۵) را معادله مفسر گویند. و چون معادله مفسر یک كثيرالجمله از درجه n با ضرایب

حقیقی می‌باشد. پس دارای n ریشه است و در نتیجه

$$y_1 = e^{t_1 x}, \quad y_2 = e^{t_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{t_n x}$$

جوابهای (۲) می‌باشد (t_1, t_2, \dots, t_n ریشه‌های (۵) هستند)

قضیه ۴.۳. اگر y_1, y_2, \dots, y_n, n جواب معادله (۲) باشند. در این صورت

$$(۶) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

تیریک جواب (۲) می‌باشد.

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۳.۳ خواهد بود.

آیا (۶) می‌تواند جواب عمومی معادله (۲) باشد؟

می‌دانیم اگر (۶) بخواهد جواب عمومی (۲) گردد، باید دارای n پارامتر

ثابت مستقل باشد یعنی نتوانیم (۶) را به فرمی بنویسیم که تعداد پارامترها کمتر از n باشد.

تعریف ۴.۳. توابع y_1, y_2, \dots, y_n را روی فاصله I ، گوئیم بستگی خطی دارند.

اگر بتوان لافل یکی از آنها را به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت به عبارت دیگر،

$$(۷) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0$$

در ضمن تمام k_i هاسمیرت باشند. و اگر (۷) تنها وقتی برقرار گردد که تمام k_i هاسمیر

باشد، گوئیم توابع y_1, y_2, \dots, y_n مستقل خطی هستند.

با توجه به تعریف ۴.۳، (۶) می‌تواند جواب عمومی (۲) روی فاصله I باشد، بشرط آنکه

y_1, y_2, \dots, y_n روی فاصله I مستقل خطی باشند.

قضیه ۵.۳. اگر توابع y_1, y_2, \dots, y_n روی فاصله $[a, b]$ وابسته خطی باشند، آنگاه

روی فاصله $[a, b]$ ، دترمینان زیر برابر صفر خواهد بود.

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$W(x)$ را "رونسکین" * y_1, y_2, \dots, y_n می‌نامند.

اثبات. فرض کنید

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0$$

یک ترکیب خطی از y_1, y_2, \dots, y_n روی فاصله $[a, b]$ است و تمام k_i ها صفر

نیستند؛ در این صورت دستگاه زیر

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0 \\ k_1 y_1' + k_2 y_2' + \dots + k_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ k_1 y_1^{(n-1)} + k_2 y_2^{(n-1)} + \dots + k_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{array} \right.$$

همگن می‌باشد. و می‌دانیم

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad k_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

دستگاه فوق دارای جواب غیر صفری باشد بشرط آنکه دترمینان ضرایب یعنی

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots y_n \\ y_1' & y_2' \dots y_n' \\ \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

برای تمام $x \in [a, b]$ ، صفر باشد، یعنی

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$$

قضیه ۶.۳. اگر توابع y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل خطی همگن یا صریح ثابت

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

روی فاصله $[a, b]$ باشند آنگاه

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots y_n \\ y_1' & y_2' \dots y_n' \\ \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

در تمام نقاط $[a, b]$ نمی تواند صفر باشد

تعریف ۷.۳. اگر y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای مستقل خطی در فاصله‌ای مانند I برای (۲) باشند، در این صورت مجموعه y_1, y_2, \dots, y_n را یک پایه جوابهای (۲) در I می نامیم و

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

جواب عمومی معادله (۲) خواهد بود.

مثال ۱۶.۳. نشان دهید که توابع

$$y_1 = e^x, y_2 = e^x, y_3 = xe^x$$

یک پایه برای جواب معادله دیفرانسیل

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad (1)$$

تشکیل می دهد.

حل. ابتدا باید نشان داد که y_1, y_2, y_3 در معادله صدق می کند. برای این کار باید y_1, y_1', y_1'', y_1''' را در معادله گذاشت

$$y_1 = e^x, y_1' = e^x, y_1'' = e^x, y_1''' = e^x \quad (2)$$

(۲) را در (۱) می گذاریم

$$-e^x - e^x + e^x + e^x = 0$$

پس y_1 یک جواب (۱) می باشد و همین ترتیب نشان می دهیم y_2 و y_3 نیز جوابهای (۱) هستند.

پس روشکین y_1, y_2, y_3 را تشکیل می دهیم

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^x & xe^x \\ -e^x & e^x & e^x + xe^x \\ e^x & e^x & 2e^x + xe^x \end{vmatrix}$$

با استفاده از دستور ساروس

$$\begin{vmatrix} e^x & e^x & xe^x & | & e^x & e^x \\ -e^x & e^x & e^x(1+x) & | & -e^x & e^x \\ e^x & e^x & e^x(2+x) & | & e^x & e^x \end{vmatrix} = e^x(2+x) + e^x(1+x) - xe^x - (xe^x + e^x(1+x) - e^x(2+x)) = 4e^x \neq 0$$

مثال ۱۷.۳. نشان دهید

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$$

استقلال خطی دارند.

حل. روشکین y_1, y_2 را تشکیل می دهیم

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ -e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 3e^x \neq 0$$

پس y_1 و y_2 استقلال خطی دارند.

مثال ۱۸.۳. می‌دانیم نواح

$$x^2, 3x^2$$

وایستگی خطی دارند. نشان دهیم که روسکن آنها برابر صفر می‌باشد.

$$W(x^2, 3x^2) = \begin{vmatrix} x^2 & 3x^2 \\ 2x & 6x \end{vmatrix} \\ = 6x^3 - 6x^3 \\ = 0$$

حال بررسی کردیم به بررسی راهی برای پیدا کردن جواب عمومی معادله (۲). با توجه به مطالب گفته شده، ابتدا باید ریشه‌های معادله مفسر را پیدا کنیم و سپس با استفاده از ریشه‌های معادله مفسر، جوابهای مستقل خطی y_1, y_2, \dots, y_n را می‌نویسیم. چون معادله مفسر یک کثیرالجهله از درجه n با ضرایب حقیقی می‌باشد، پس حالات زیر را بررسی می‌کنیم

حالت اول. معادله مفسر دارای n ریشه متمایز حقیقی $t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_n$ باشد در این صورت جوابهای

$$y_1 = e^{t_1 x}, y_2 = e^{t_2 x}, \dots, y_n = e^{t_n x}$$

مستقل خطی هستند * پس جواب عمومی معادله (۲) به فرم

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} + \dots + c_n e^{t_n x}$$

می‌باشد.

مثال ۱۹.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

را بنویسید.

* روسکن y_1 و y_2 و \dots و y_n مخالف صفر است. از طرفی می‌توانیم برای بررسی استقلال خطی y_1 و y_2 و \dots و y_n دو تا دوتا برهم تقسیم کنیم؛ اگر خارج قسمت تمام تقسیم‌ها مخالف مقدار ثابت باشد، آنگاه y_1 و y_2 و \dots و y_n مستقل خطی هستند.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - 2t^2 - 3t = 0$$

$$t = 0, t = 3, t = -1$$

جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}$$

حالت دوم. معادله مفسر دارای n ریشه حقیقی باشد ولی m تای آنها مساوی فرض کنید $t_1 = t_2$ است؛ در این صورت $y_1 = e^{t_1 x}, y_2 = x e^{t_1 x}, y_3 = x^2 e^{t_1 x}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{t_1 x}$ اول بوده و اگر معادله مفسر دارای n ریشه مساوی باشد مانند $t_1 = t_2 = \dots = t_m$ در این صورت کلی اگر معادله مفسر دارای m ریشه مساوی باشد مانند $t_1 = t_2 = \dots = t_m$ در این صورت

$$y_1 = e^{t_1 x}, y_2 = x e^{t_1 x}, y_3 = x^2 e^{t_1 x}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{t_1 x}$$

و y_{m+1}, \dots, y_n مانند حالت اول هستند.

مثال ۲۰.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' - y'' = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - t^2 = 0$$

در نتیجه، ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از: 0 و 0 و 1

$$t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

مثال ۲۱.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2(t+1) = 0$$

پس ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$t_1 = t_2 = 1, t_3 = -1$$

$$y_1 = e^x, y_2 = x e^x, y_3 = e^{-x}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-x}$$

مثال ۲۲.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = 0$$

$$t^2(t-2) - 4(t-2) = 0$$

$$(t-2)(t^2-4) = (t-2)^2(t+2) = 0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1 = t_2 = 2, t_3 = -2$$

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = x e^{2x}, y_3 = e^{-2x}$$

و جواب عمومی معادله به فرم زیر است:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال ۲۳.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^4 - 2t^2 + 1 = 0$$

$$(t^2 - 1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2 = 0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1 = t_2 = 1, t_3 = t_4 = -1$$

$$y_1 = e^x, y_2 = x e^x, y_3 = e^{-x}, y_4 = x e^{-x}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x + (c_3 + c_4 x) e^{-x}$$

حالت سوم. معادله مفسر دارای ریشه مختلط هم باشد

فرض کنید $t_1 = p + iq, t_2 = p - iq$ و بقیه ریشه‌ها حقیقی باشند. در این صورت در جواب

عمومی بجای $c_1 y_1 + c_2 y_2$ عبارت

$$e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$$

را می‌نویسیم.

مثال ۲۴.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$$

$$t(t^2 - 4t + 5) = 0$$

$$t = 0, t^2 - 4t + 5 = 0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1 = 0, t_2 = 2 + i, t_3 = 2 - i$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = C_1 + e^{2x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$$

مثال ۲۵.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y^{(4)} - y = 0$$

را بنویسید.

حل. معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^4 - 1 = 0$$

$$(t^2 + 1)(t-1)(t+1) = 0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1 = i, t_2 = -i, t_3 = 1, t_4 = -1$$

و جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}$$

حالت چهارم: معادله مفر دارای ریشه مختلط تکراری باشد

فرض کنید، پس از تجزیه معادله مفسر، قسمتی که ریشه مختلط دارد، تکراری باشد، یعنی به توان m . در این صورت $2m$ جواب مربوط به این قسمت به صورت زیر خواهد بود،

$$C_1 e^{px} \cos qx, C_2 e^{px} \sin qx$$

$$C_3 x e^{px} \cos qx, C_4 x e^{px} \sin qx$$

$$C_5 x^2 e^{px} \cos qx, C_6 x^2 e^{px} \sin qx$$

.....

$$C_{2m-1} x^{m-1} e^{px} \cos qx, C_{2m} x^{m-1} e^{px} \sin qx$$

و آنرا به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$e^{px} (C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) \cos qx$$

$$+ e^{px} (C_{m+1} + C_{m+2} x + \dots + C_{2m} x^{m-1}) \sin qx$$

مثال ۳. ۲۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y^{(6)} - y = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^6 + t^4 - t^2 - 1 = 0$$

$$t^4(t^2 + 1) - (t^2 + 1) = 0$$

$$(t^2 + 1)^2(t - 1)(t + 1) = 0$$

پس معادله مفسر دارای ریشه‌های $t_1 = 1, t_2 = -1, t_3 = i, t_4 = -i, t_5 = t_6 = -i, t_7 = i$ می‌باشد و جواب عمومی به فرم زیر است.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \sin x$$

تذکر. با انتخاب سمبول

$$D = \frac{d}{dx}, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \dots, D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت (۲)، به فرم زیر نوشته می‌شود

$$(8) \quad (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

عبارت داخل پرانتز (۸) را با $F(D)$ نمایش می‌دهیم و معادله را معمولاً بصورت

$$F(D)y = 0$$

مقال ۳. ۲۷. معادله دیفرانسیل $F(D)y = 0$ می‌نویسیم و آنرا اپراتور * دیفرانسیل خطی مرتبه n ام می‌نامیم.

مثال ۳. ۲۷. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad y^{(4)} - y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

را می‌توان به فرم

$$(2) \quad (D^4 - D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$$

نشان داد. و می‌دانیم برای حل معادله (۱)، باید معادله مفسر را تشکیل داد

$$t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t = 0$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید ریشه‌های معادله مفسر و ریشه‌های معادله

$$D^4 - D^3 - 4D^2 + 4D = 0$$

یکی است. پس اگر یک معادله دیفرانسیل بصورت $F(D)y = 0$ داده شده باشد و $F(D)$ یک

یک چند جمله‌ای اپراتوری باشد، می‌توانیم ریشه‌های معادله مفسر را $F(D) = 0$ بدست

آوریم.

مثال ۳. ۲۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$D(D-1)(D+3)y = 0$$

را بنویسید.

حل. با توجه به $F(D)$ ، ریشه‌های معادله مفسر،

$$t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = -3$$

می باشد و جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x}$$

مثال ۳.۲۹. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$D(D^2 + 1)(D - 2)^3 y = 0$$

را بنویسید.

حل. با توجه به $F(D)$ ریشه های معادله مقسر

$$t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = -i, t_4 = t_5 = t_6 = 2$$

و جواب عمومی عبارت است از:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) e^{2x}$$

مثال ۳.۳۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$D^2(D - 1)^3(D^2 + 4)^2(D^2 + 2D + 2)(D + 1)y = 0$$

را بنویسید.

حل. با توجه به $F(D)$ ریشه های معادله مقسر

$$t_1 = t_2 = 0, t_3 = t_4 = t_5 = 1, t_6 = t_7 = 2i, t_8 = t_9 = -2i$$

$$t_{10} = -1 + i, t_{11} = -1 - i, t_{12} = -1$$

و جواب عمومی

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2) e^x + (C_6 + C_7 x) \cos 2x$$

$$+ (C_8 + C_9 x) \sin 2x + e^{-x} (C_{10} \cos x + C_{11} \sin x) + C_{12} e^{-x}$$

مثال ۳.۳۱. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad (1)$$

را با شرایط اولیه

$$y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

پیدا کنید.

حل. ابتدا معادله مقسر را تشکیل می دهیم

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

ریشه های معادله مقسر عبارتند از:

$$t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 1$$

و جواب عمومی معادله

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x \quad (2)$$

برای پیدا کردن ضرایب c_3, c_2, c_1 با توجه به $y(0) = 1$ و (۲) داریم

$$1 = c_1$$

از (۲) مشتق می گیریم

$$y' = (c_2 + 2c_3 x) e^x + (1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x \quad (3)$$

با توجه به $y'(0) = 2$ و (۳) داریم

$$2 = c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

از (۳) مشتق می گیریم

$$y'' = (2c_3) e^x + (1 + 2c_3 x) e^x + (1 + 2c_3 x) e^x + (1 + x + c_3 x^2) e^x \quad (4)$$

با توجه به $y''(0) = 3$ و (۴) داریم

$$3 = 2c_3 + 1 + 1 \Rightarrow c_3 = 0$$

و جواب خصوصی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$y = (1 + x) e^x$$

مجموعه مسائل ۳.۳.

روشن کن توابع زیر را پیدا کنید.

۱. x

۲. $x, \frac{1}{x}$

۳. $e^x, 2e^x, e^{-x}$

۴. $4, \sin^2 x, \cos 2x$

۵. $2, \cos x, \cos 2x$

نشان دهید توابع داده شده، پایه‌ای برای جوابهای معادله دیفرانسیل متناظر تشکیل می‌دهند.

۶. $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, y'''+3y''+3y'+y=0$

۷. $x, x^2, x^3, x^3y''-3x^2y'+6xy'-6y=0$

معادله دیفرانسیلی را بنویسید که توابع داده شده جوابهای مستقل خطی آن باشند.

۸. e^x, xe^x, x^2e^x

۹. $1, x, e^{2x}, xe^{2x}$

۱۰. $1, e^{-2x}, e^x, e^{2x}$

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بنویسید.

۱۱. $(D^3+D^2-2D)y=0$

۱۲. $(D^4-6D^3+12D^2-8D)y=0$

۱۳. $(D^4+4D^2)y=0$

۱۴. $(D^4-6D^3+13D^2-12D+4)y=0$

۱۵. $(D^3-D^2+9D-9)y=0$

۱۶. $(D^3-3D^2+3D-1)y=0$

۱۷. $(D^5+2D^3+D)y=0$

۱۸. $D(D+3)^2(D^2+4D+13)y=0$

۱۹. $D^3(D^2+9)^2(D-1)^2(D+1)y=0$

۲۰. معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دوم

صورت کلی این معادلات به فرم

(۱) $y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=f_3(x)$

می‌باشد. $(x)f_1(x), f_2(x)$ را ضرایب می‌نامند.

قضیه ۳. ۷. جواب عمومی معادله (۱) به فرم مجموع دو جواب $y_p(x), y_h(x)$ می‌باشد. که $y_h(x)$ جواب عمومی معادله همگن متناظر یعنی

(۲) $y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=0$

است و y_p یک جواب ساده بدون پارامتر، معادله (۱) می‌باشد. یعنی جواب عمومی معادله (۱) به فرم زیر است.

(۳) $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

اثبات (۳). $y(x)$ و مشتق اول و مشتق دوم $y'(x)$ را در (۱) قرار می‌دهیم.

$y'(x) = y'_h(x) + y'_p(x)$

$y''(x) = y''_h(x) + y''_p(x)$

$y''_h(x) + y''_p(x) + f_1(x)(y'_h(x) + y'_p(x)) + f_2(x)(y_h(x) + y_p(x)) = f_3(x)$

$(y''_h(x) + f_1(x)y'_h(x) + f_2(x)y_h(x)) + y''_p(x) + f_1(x)y'_p(x) + f_2(x)y_p(x) = f_3(x)$

چون $y_h(x)$ جواب عمومی معادله همگن متناظر می‌باشد. پس براساس اول عبارت بالا برابر صفر خواهد بود. و چون $y_p(x)$ جواب (۱) است، پس تساوی بالا برقرار بوده، یعنی (۳) در (۱) صدق می‌کند و چون $y_h(x)$ شامل دو پارامتر مستقل می‌باشد پس $y(x)$ نیز شامل دو پارامتر مستقل است. بنابراین (۳) جواب عمومی (۱) خواهد بود.

قضیه ۳. ۸. اگر در (۱)، $f_3(x)$ به فرم مجموع چند تابع به فرم زیر باشد

(۴) $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_1(x) + r_2(x) + \dots + r_n(x)$

و فرض کنید $y_1(x)$ یک جواب معادله

$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_1(x)$

و $y_2(x)$ یک جواب معادله

$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_2(x)$

و به همین ترتیب، $y_n(x)$ یک جواب معادله

$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_n(x)$

باشد. آنگاه

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$$

یک جواب (۴) خواهد بود.

(اثبات بعنوان تمرین به عهد خواننده)

مثال ۳.۳. نشان دهید، $y_p = e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + y = 2e^x \quad (1)$$

می باشد و سپس جواب عمومی معادله (۱) را بنویسید.

حل. باید y_p و مشتق دوم y_p را در معادله (۱) گذاشت و نشان داد که اتحاد برقرار

است.

$$y_p'' = e^x, \quad y_p = e^x \quad (2)$$

(۲) را در (۱) می گذاریم،

$$e^x + e^x = 2e^x$$

برای بدست آوردن جواب عمومی (۱)، باید جواب عمومی معادله همگن متناظر را بدادیم.

$$y'' + y = 0 \quad (3)$$

برای حل (۳)، معادله مفسر را تشکیل می دهیم و ریشه های آنرا حساب می کنیم

$$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$$

و

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \\ = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$$

مثال ۳.۳. نشان دهید $y_p = x \sin x$ یک جواب معادله

$$y'' + y = 2 \cos x \quad (1)$$

می باشد.

حل. y_p و y_p'' را در (۱) می گذاریم و نشان می دهیم که اتحاد برقرار است.

$$y_p = x \sin x, \quad y_p'' = 2 \cos x - x \sin x \quad (2)$$

(۲) را در (۱) می گذاریم،

$$2 \cos x - x \sin x + x \sin x = 2 \cos x$$

مثال ۳.۳. با استفاده از مثالهای ۳.۲ و ۳.۳، جواب عمومی معادله

$$y'' + y = 2e^x + 2 \cos x$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن را می نویسیم. با توجه به مثال ۳.۲ و ۳.۳ داریم

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

و

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ = e^x + x \sin x$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \\ = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x + x \sin x$$

حال روش بدست آوردن جواب خصوصی $y_p(x)$ را بررسی می کنیم. چند روش در بخشهای آینده مورد بررسی قرار می گیرد. ولی ساده ترین آنها روشی است موسوم به روش ضرایب نامعین*. حسن این روش، در مقایسه با روشهای دیگر که بعداً گفته خواهد شد، سادگی آن است. از این روش فقط در مورد معادلات خطی با ضرایب ثابت می توان استفاده کرد.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (5)$$

و $f(x)$ باید تابعی باشد که در حالت های مختلف ذکر می شود. در این روش سعی می کنیم y_p را مشابه با $f(x)$ انتخاب کنیم.

روش ضرایب نامعین، از این روش فقط در حالات زیر می توان استفاده کرد:

حالت اول. اگر $f(x)$ (۵) به فرم یک چند جمله ای از درجه n باشد.

مثال ۳.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y = 3 \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم.

$$y'' - 4y = 0$$

معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌نماییم

$$t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t = \pm 2$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

حال برای بدست آوردن y_p ، چون $f(x)$ (طرف دوم معادله) یک عدد می‌باشد، y_p را به‌صورت یک عدد انتخاب کرده یعنی $y_p = A$. حال $y_p'' = 0$ را در (۱) قرار می‌دهیم و A را مشخص می‌کنیم

$$y_p = A, \quad y_p'' = 0 \quad (2)$$

(۲) را در (۱) قرار می‌دهیم

$$0 - 4A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{4}$$

$$y_p = -\frac{3}{4}$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{4}$$

مثال ۰۳.۰۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' = 3 \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$y'' - 4y' = 0$$

معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب کرده

$$t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t = 0, 4$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = G_1 + G_2 e^{4x}$$

می‌باشد. حال اگر y_p را به‌صورت یک عدد انتخاب کنیم، مثلاً $y_p = A$ و $y_p' = 0$ و $y_p'' = 0$ را در معادله (۱) قرار دهیم

$$y_p = A, \quad y_p' = 0, \quad y_p'' = 0$$

$$0 = 3$$

علت آنکه y_p را نمی‌توان یک عدد انتخاب کرد آن است که در جواب عمومی معادله همگن c_1 وجود دارد و علت وجود c_1 در جواب عمومی معادله همگن، وجود یک ریشه صفر معادله مفسر می‌باشد. حال y_p را به‌فرم $y_p = Ax$ انتخاب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0 \quad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$0 - 4A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{4}$$

$$y_p = -\frac{3}{4}x$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{3}{4}x$$

مثال ۰۳.۰۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + y = 4x^2 + 1 \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم.

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

و ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از: $t_1 = t_2 = -1$ و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

حال برای بدست آوردن y_p ، می‌گوییم: چون طرف دوم معادله، یک چندجمله‌ای از

درجه ۲ می باشد، پس y_p را نیز یک چند جمله ای کامل از درجه ۲ انتخاب می کنیم.

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

و برای تعیین ضرایب A و B و C ، باید y_p و y_p' و y_p'' را در (۱) قرار داد و با متحد قرار دادن ضرایب حملات مشابه، A و B و C را تعیین کرد.

$$y_p'' = 2A, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p = Ax^2 + Bx + C \quad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$2A + 4Ax + 2B + Ax^2 + Bx + C \equiv 4x^2 + 1$$

$$\begin{cases} A = 4 \\ 4A + B = 0 \\ 2A + 2B + C = 1 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا خواهیم داشت

$$A = 4, \quad B = -16, \quad C = 25$$

$$y_p = 4x^2 - 16x + 25$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + 4x^2 - 16x + 25$$

مثال ۰۳-۰۳۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad y'' - y' = 2x$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می کنیم

$$y'' - y' = 0$$

$$t^2 - t = 0 \Rightarrow t = 0, 1$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^x$$

اگر y_p را به فرم یک چند جمله ای درجه یک انتخاب کنیم، $y_p = Ax + B$ ، داریم:

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0 \quad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) خواهیم داشت.

$$0 - A = 2x \quad \int$$

زیرا ضریب x یک طرف صفر و ضریب x طرف دیگر ۲ می باشد. علت اینکه y_p را نمی توان به فرم $y_p = Ax + B$ انتخاب کرد آن است که در جواب عمومی معادله همگن متناظر عامل c_1 وجود دارد و علت وجود عامل y_p در جواب عمومی معادله همگن، وجود یک ریشه صفر در معادله مفسر می باشد. لذا باید y_p را به فرم زیر انتخاب کرد:

$$y_p = x(Ax + B) \quad (3)$$

حال اگر مشتق اول و مشتق دوم (۳) را در (۱) جایگذاری کنیم، داریم

$$2A - 2Ax - B \equiv 2x$$

و A و B از حل دستگاه زیر پیدا می شوند

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -1, \quad B = -2$$

و

$$y_p = x(-x - 2)$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 + c_2 e^x - x^2 - 2x$$

قانون کلی. اگر $f(x)$ (طرف دوم معادله) در (۵) به فرم یک چند جمله ای از درجه n

باشد. جواب خصوصی را به فرم زیر در نظر می گیریم

$$(6) \quad y_p = x^m (\text{یک چند جمله ای کامل از درجه } n)$$

که در (۶) m تعداد ریشه های صفر معادله مفسر می باشد.

تذکره ۱. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۰۳-۰۳۹. فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' = x^3 + f$$

را بنویسید.

حل. با توجه به اینکه صفر، دوبار، ریشه معادله مفسر معادله همگن متناظر می باشد.

$$y_p = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \quad \text{پس}$$

حالت دوم. اگر $f(x)$ در (۵) به فرم

$$f(x) = M(x) e^{px}$$

باشد که $M(x)$ یک چند جمله ای از درجه n است.

مثال ۴۰.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x} \quad (1)$$

را بنویسد.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1, 2$$

و

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

برای پیدا کردن y_p ، چون طرف دوم (۱) به صورت یک عدد در e^{4x} می‌باشد، پس y_p را به فرم $y_p = A e^{4x}$ در نظر می‌گیریم و برای تعیین A ، باید y_p' و y_p'' را در (۱) قرار داد.

$$y_p = A e^{4x}, \quad y_p' = 4A e^{4x}, \quad y_p'' = 16A e^{4x} \quad (2)$$

با جایگذاری در (۱) داریم،

$$16A e^{4x} - 12A e^{4x} + 2A e^{4x} = 3e^{4x}$$

$$6A = 3 \Rightarrow A = 1/2$$

و

$$y_p = \frac{1}{2} e^{4x}$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر است:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{4x}$$

مثال ۴۱.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x \quad (1)$$

را بنویسد.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم،

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow t = 1, 6$$

و

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$$

حال اگر y_p را به فرم

$$y_p = (Ax+B)e^x \quad (2)$$

در نظر بگیریم، آنگاه

$$y_p' = A e^x + (Ax+B)e^x, \quad y_p'' = 2A e^x + (Ax+B)e^x$$

با جایگذاری y_p' و y_p'' در (۱) داریم

$$2A e^x + (Ax+B)e^x - 7A e^x - 7(Ax+B)e^x + 6(Ax+B)e^x = x e^x - 2e^x - 5A e^x = x e^x - 2e^x$$

چون ضریب $x e^x$ یک طرف (۱) و طرف دیگر صفر می‌باشد. علت آنکه نمی‌توان y_p را به فرم (۲) انتخاب نمود، آن است که عامل $B e^x$ در جواب عمومی معادله همگن متناظر موجود است. $(c_1 e^x)$ و علت وجود عامل $c_1 e^x$ در جواب عمومی معادله همگن متناظر، وجود یک ریشه ۱، معادله مفسری باشد. لذا باید y_p را به فرم زیر انتخاب نمود:

$$y_p = x(Ax+B)e^x$$

حال برای تعیین ضرایب A و B ، باید y_p' و مشتقاتش را در (۱) قرار دهیم

$$y_p' = e^x (Ax^2 + Bx) + e^x (2Ax + B)$$

$$y_p'' = e^x (Ax^2 + Bx) + 2e^x (2Ax + B) + 2A e^x$$

این مقادیر را در (۱) قرار می‌دهیم، داریم:

$$e^x [Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A - 7Ax^2 - 7Bx - 14Ax - 7B + 6Ax^2 + 6Bx] = (x-2)e^x$$

و

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = \frac{9}{25}$$

$$y_p = x \left(-\frac{x}{10} + \frac{9}{25} \right) e^x$$

و جواب عمومی معادله (۱) به فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + x \left(-\frac{x}{10} + \frac{9}{25} \right) e^x$$

قانون کلی، اگر $f(x)$ در (۵) به فرم

$$f(x) = M(x) e^{px}$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

که در آن $M(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد. آنگاه y_p را به فرم

$$y_p = x^m e^{px} \quad (n \text{ درجه از } n) \quad (Y)$$

انتخاب می‌کنیم و m تعداد ریشه‌های مساوی p معادله مفسر می‌باشد.

تذکر ۲. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۳.۲.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x} \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 2$$

$$y_h = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

چون $p=2$ ، دو بار ریشه معادله مفسر می‌باشد. پس باید y_p را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$y = A x^2 e^{2x}$$

و برای تعیین A باید y_p و y_p' و y_p'' را در (۱) قرار دهیم

$$y_p' = A e^{2x} (2x + 2x^2), \quad y_p'' = 2A e^{2x} (2x^2 + 4x + 1)$$

در (۱) قرار می‌دهیم، داریم

$$2A e^{2x} = 5e^{2x} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر می‌باشد:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + \frac{5}{2} x^2 e^{2x}$$

مثال ۳.۲.۴. فقط فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = (x^2 + 3)e^{-x} + 4x$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

را بنویسید.

حل. ابتدا ریشه‌های معادله مفسر معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$t^4 + 2t^3 + t^2 = 0$$

$$t^2(t+1)^2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0, \quad t_3 = t_4 = -1$$

جواب خصوصی، مجموع دو جواب خصوصی می‌باشد. یکی مربوط به $4x$ ؛ چون صفر دو بار ریشه معادله مفسر می‌باشد.

$$y_{p1} = x^2 (Ax + B)$$

و دیگری مربوط به $e^{-x}(x^2 + 3)$ ، از طرفی ۱- دو بار ریشه معادله مفسر است. پس

$$y_{p2} = x^2 e^{-x} (Cx^2 + Dx + E)$$

و

$$y_p = x^2 (Ax + B) + x^2 e^{-x} (Cx^2 + Dx + E)$$

حالت سوم. اگر $f(x)$ در (۵) در فرم

$$(8) \quad f(x) = M(x) \cos qx + N(x) \sin qx$$

و $M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای باشند، قانون کلی زیر را خواهیم داشت:

قانون کلی. اگر $f(x)$ در (۵) به فرم (۸) باشد. آنگاه y_p را به فرم

$$(9) \quad y_p = x^m [R(x) \cos qx + S(x) \sin qx]$$

انتخاب می‌کنیم که در (۹) m تعداد ریشه‌های $iq + 1$ معادله مفسر و $R(x)$ و $S(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه n می‌باشند و n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است.

تذکر ۳. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۳.۲.۴.۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + 4y = 3 \cos 5x \quad (1)$$

را بنویسد.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می نویسیم

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$$

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

برای تعیین y_p چون 5i ریشه معادله مقعر نیست، پس $m = 0$

$$y_p = A \cos 5x + B \sin 5x$$

برای پیدا کردن ضرایب A و B و y_p'' را در (1) قرار می دهیم

$$y_p'' = -25A \cos 5x - 25B \sin 5x$$

$$-25A \cos 5x - 25B \sin 5x = 3 \cos 5x$$

$$A = -\frac{3}{25}, \quad B = 0$$

و جواب عمومی مقعر زیر می باشد:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{25} \cos 5x$$

مثال ۴۵.۳. مقعرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y'' + 4y = x^2 \sin 2x$$

را بنویسد.

حل. با توجه به مثال ۴۴.۳. ریشه های معادله مقعر $\pm 2i$ می باشد. و چون $2i + 2i$ یک بار ریشه معادله مقعر است بنابراین y_p مقعر زیر می باشد.

$$y_p = x[(Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x]$$

مثال ۴۶.۳. مقعرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$D^2(D^2 + 1)^2(D - 2)^2 y = x + (x + 3) \sin x + x^2 e^x$$

را بنویسد.

حل. ابتدا ریشه های معادله مقعر را تعیین می کنیم

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = r_4 = r_5 = i, \quad r_6 = r_7 = r_8 = -i, \quad r_9 = r_{10} = 2$$

و با توجه به ریشه های معادله مقعر داریم:

$$y_{p_1} = x^2(Ax + B)$$

$$y_{p_2} = x^2[(A_1x + B_1) \sin x + (A_2x + B_2) \cos x]$$

$$y_{p_3} = x^2(A_3x^2 + B_3x + C)e^{2x}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

حالت چهارم. اگر $f(x)$ در (۵) مقعر

$$(10) \quad f(x) = e^{px} [M(x) \cos qx + N(x) \sin qx]$$

و $M(x)$ و $N(x)$ دو چندحلهای باشند. قانون کلی زیر را خواهیم داشت:قانون کلی. اگر $f(x)$ در (۵) مقعر (۱۰) باشد. آنگاه y_p را مقعر

$$(11) \quad y_p = x^m e^{px} [R(x) \cos qx + S(x) \sin qx]$$

انتخاب می کنیم بطوری که m تعداد ریشه های $p + iq$ معادله مقعر و $R(x)$ و $S(x)$ دو چندحلهای کامل از درجه n باشند و n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است.تذکره ۴. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۴۷.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + y''' = e^x \cos x \quad (1)$$

را بنویسد.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می نویسیم

$$r^3 + r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = -1$$

و

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

با جایگذاری y_p و y_p' و y_p'' در (۱) داریم

$$e^{2x} [4cx \cos x + 2(A+D) \cos x - 4Ax \sin x + 2(C-B) \sin x] \equiv e^{2x} (x+2) \sin x$$

و ضرایب A و B و C و D از حل دستگاه زیر بدست می‌آیند

$$\begin{cases} C=0 \\ A+D=0 \\ -4A=1 \\ 2(C-B)=2 \end{cases}$$

$$C=0, A=-\frac{1}{4}, D=\frac{1}{4}, B=-1$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x e^{2x} \left[\left(-\frac{1}{4}x - 1\right) \cos x + \frac{1}{4} \sin x \right]$$

مثال ۰۳، ۰۴. فقط فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$D(D^2 - 2D + 2)^3(D^2 + 9)(D+1)^4 y = x^2 + x \sin x + 3e^{-x} + 1 + x^2 \cos x + 5 \cos 3x$$

را بنویسید.

حل. ابتدا ریشه‌های معادله مفسر را مشخص می‌کنیم

$$t_1=0, t_2=t_3=t_4=1+i, t_5=t_6=t_7=1-i, t_8=3i, t_9=-3i$$

$$t_{10}=t_{11}=t_{12}=t_{13}=-1$$

جواب خصوصی مربوط به $1+i$ ، چون صفر یک بار، ریشه معادله مفسر است. با توجه

به فرمول (۶) خواهیم داشت

$$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C)$$

جواب خصوصی مربوط به $3e^{-x}$ ، چون ۱- چهاربار ریشه معادله مفسر است، با توجه به فرمول

(۷) خواهیم داشت.

$$y_{p_2} = Dx^4 e^{-x}$$

جواب خصوصی مربوط به $x \sin x$ ، با توجه به فرمول (۹)

و با توجه به (۱۱)

$$y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

برای تعیین ضرایب A و B ، باید y_p'' و y_p' را حساب کرده و در (۱) قرار داد. نتیجه به صورت زیر می‌باشد.

$$e^x (-4A \sin x - 2A \cos x + 2B \cos x - 2B \sin x) = e^x \cos x$$

و A و B از حل دستگاه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} 2A+B=0 \\ -2A+4B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{10}, B=\frac{1}{5}$$

و جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + e^x \left(-\frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x\right).$$

مثال ۰۳، ۰۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 5y = (x+2)e^{2x} \sin x \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می‌نویسیم

$$t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm i$$

و

$$y_h = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

و با توجه به (۱۱)

$$y_p = x e^{2x} [(Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x]$$

y_p و y_p' و y_p'' را حساب کرده و در (۱) جایگذاری می‌کنیم

$$y_p' = e^{2x} \{ [(2A+C)x^2 + (2A+2B+D)x + B] \cos x +$$

$$[(2C-A)x^2 + (2D-B+2C)x + D] \sin x \}$$

$$y_p'' = e^{2x} \{ [(3A+4C)x^2 + (8A+3B+4D+4C)x + (2A+4B+2D)] \cos x$$

$$+ [(-4A+3C)x^2 + (8C-4A-4B+3D)x + (4D-2B+2C)] \sin x \}$$

$$e^{2x} [4Cx \cos x + 2(A+D) \cos x - 4Ax \sin x + 2(C-B) \sin x] \equiv$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$y_{p_3} = (A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x$$

جواب خصوصی مربوط به $5 \cos 3x$ ، چون $3i$ یک بار ریشه معادله مقسوم‌الیه، با توجه به فرمول (۹) خواهیم داشت.

$$y_{p_4} = x(A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x)$$

و جواب خصوصی مربوط به $x^2 e^x \cos x$ ، چون $1+i$ سه بار ریشه معادله مقسوم‌الیه می‌باشد و با توجه به فرمول (۱۱) داریم.

$$y_{p_5} = x^3 e^x [(A_4 x^2 + B_4 x + C_4) \cos x + (A_5 x^2 + B_5 x + C_5) \sin x]$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_{p_4} + y_{p_5}$$

مثال ۳.۵۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' + y' = x^2 + 6 \sin 2x + x e^{3x} \quad (1)$$

رایبوسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن را می‌نویسیم

$$t^3 + t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = i, t_3 = -i$$

$$y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

اول جواب خصوصی مربوط به x^2 را حساب می‌کنیم

$$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C) \quad (2)$$

$$y'_{p_1} = 3Ax^2 + 2Bx + C, y''_{p_1} = 6Ax + 2B, y'''_{p_1} = 6A$$

در (۱) به جای y' و y''' از (۲) مقدار می‌گذاریم و متحد با x^2 قرار می‌دهیم.

$$6A + 3Ax^2 + 2Bx + C \equiv x^2$$

را $C_3 B_3 A$ از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 2B = 0 \\ 6A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = 0, C = -2$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

سیس جواب خصوصی مربوط به $6 \sin 2x$ را حساب می‌کنیم.

$$y_{p_2} = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x$$

$$y'_{p_2} = -2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x$$

$$y''_{p_2} = -4A_1 \cos 2x - 4B_1 \sin 2x$$

$$y'''_{p_2} = 8A_1 \sin 2x - 8B_1 \cos 2x$$

y'_{p_2} و y'''_{p_2} را در (۱) جایگذاری می‌کنیم و متحد با $6 \sin 2x$ قرار می‌دهیم.

$$8A_1 \sin 2x - 8B_1 \cos 2x - 2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x \equiv 6 \sin 2x$$

A_1 و B_1 را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} 6A_1 = 6 \\ -6B_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 1, B_1 = 0$$

$$y_{p_2} = \cos 2x$$

وبالاخره جواب خصوصی مربوط به $x e^{3x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y_{p_3} = e^{3x} (A_2 x + B_2)$$

$$y'_{p_3} = 3e^{3x} (A_2 x + B_2) + A_2 e^{3x}$$

$$y''_{p_3} = 9e^{3x} (A_2 x + B_2) + 6A_2 e^{3x}$$

$$y'''_{p_3} = 27e^{3x} (A_2 x + B_2) + 27A_2 e^{3x}$$

با جای‌گذاری در (۱) داریم:

$$27A_2 e^{3x} + 30e^{3x} (A_2 x + B_2) + A_2 e^{3x} \equiv x e^{3x}$$

A_2 و B_2 را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} 30A_2 = 1 \\ 28A_2 + 30B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{30}, B_2 = -\frac{14}{450}$$

$$y_{p_3} = \frac{1}{30} e^{3x} \left(x - \frac{14}{15} \right)$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

۲۱. $2y'' + y' = 8 \sin 2x + e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

۲۳. روش عمومی برای حل معادلات خطی غیرهمگن (روش تغییر پارامترها)

فرض می‌کنیم، در معادله، دیفرانسیل

(۱) $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$
 $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ و $f_3(x)$ در یک فاصله باز پیوسته باشند. برای پیدا کردن جواب خصوصی

y_p از روش زیر که به روش تغییر پارامترها موسوم است استفاده می‌کنیم.

فرض کنید جواب عمومی معادله، همگن متناظر موجود باشد؛ یعنی داشته باشیم

(۲) $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$
 جواب y_p را مانند y_h در نظر می‌گیریم با این تفاوت که مقادیر ثابت را به عنوان توابعی از x تلقی خواهیم کرد.

(۳) $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$

$y_p' = u'(x)y_1 + u(x)y_1' + v'(x)y_2 + v(x)y_2'$

$u(x)$ و $v(x)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

(۴) $u'(x)y_1 + v'(x)y_2 = 0$

باتوجه به شرط (۴) داریم؛

(۵) $y_p' = u(x)y_1' + v(x)y_2'$

(۶) $y_p'' = u'(x)y_1' + u(x)y_1'' + v'(x)y_2' + v(x)y_2''$

با جایگذاری (۳)، (۵) و (۶) در (۱) داریم،

$u(x)(y_1'' + f_1(x)y_1' + f_2(x)y_1) + v(x)(y_2'' + f_1(x)y_2' + f_2(x)y_2) + u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x)$

$+ f_2(x)y_2) + u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x)$

چون y_1 و y_2 جوابهای معادله، همگن متناظر (۱) می‌باشند پس دو برانتز طرف چپ عبارت بالا صفر هستند.

بنابراین،

(۷) $u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x)$
 حال $(u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x))$ را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$\begin{cases} u'(x)y_1 + v'(x)y_2 = 0 \\ u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x) \end{cases}$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌شود.

$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{3}x^3 - 2x + \cos 2x + \frac{1}{30}e^{3x}(x - \frac{14}{15})$

مجموعه مسائل ۴۰۳.

۱- قضیه ۸۰۳ را اثبات کنید.

مقطر فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید.

۲. $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$

۳. $y'' + 16y = \sin(4x + \beta)$ (β مقدار ثابت)

۴. $y'' - 4y' = 2 \cos^2 4x$

۵. $y'' - 4y' = x e^{4x}$

۶. $y'' - 7y' = (x-1)^2$

۷. $y'' + 2y' + 5y = e^x [(x+1) \cos 2x + 3 \sin 2x]$

۸. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} (x^2 \cos 3x - x \sin 3x)$

۹. $D(D^2 + 9)(D^2 - 8D + 25)^2 y = x + x^2 \sin 3x + x^2 e^{4x} \cos 3x$

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

۱۰. $y'' + y = \sin 2x$

۱۱. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$

۱۲. $y'' + y' + y = e^x \sin 3x$

۱۳. $y^{(4)} - y = e^x$

۱۴. $y'' - 9y = e^{3x} + \sin 3x$

۱۵. $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = x + e^{2x}$

۱۶. $y''' - 4y'' + y' - 4y = e^{4x} \sin x$

۱۷. $y''' + y'' = e^x + 6x$

۱۸. $y^{(4)} - y = x e^x + \cos x$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

۱۹. $y'' + 4y = 12 \cos^2 x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

۲۰. $y'' + y = 3x \sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

$$= -e^{-x} \cos x \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + e^{-x} \sin x \int \sec^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x} \frac{1}{\cos x} + e^{-x} \sin x \tan x$$

$$= -e^{-x} \frac{\cos 2x}{2 \cos x}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{2 \cos x})$$

مثال ۵۲.۳. معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + y = 4e^{x} \ln x$$

را حل کنید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می نویسیم

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = -1$$

و

$$y_h = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

و فرض می کنیم

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = x e^{-x}$$

برای محاسبه W, y_1', y_2' را حساب می کنیم

$$y_1' = -e^{-x}, y_2' = e^{-x} - x e^{-x}, W = e^{-2x}$$

و طبق فرمول (۹) داریم،

$$y_p = -e^{-x} \int \frac{4e^{2x} x \ln x}{e^{2x}} dx + x e^{-x} \int \frac{4e^{2x} \ln x}{e^{2x}} dx$$

$$= -4e^{-x} \int x \ln x dx + 4x e^{-x} \int \ln x dx$$

$$= -4e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) + 4x e^{-x} (x \ln x - x)$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = e^{-x} (c_1 + c_2 x) + x^2 e^{-x} (2 \ln x - 3)$$

و طبق دستور کرامر، داریم،

$$(۸) \quad u'(x) = -\frac{f_3(x)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}, \quad v'(x) = \frac{f_3(x)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}$$

و چون y_1, y_2 جوابهای مستقل خطی هستند پس

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$$

می باشد و با انتگرال گیری از (۸) داریم:

$$u(x) = -\int \frac{f_3(x)y_2}{W} dx, \quad v(x) = \int \frac{f_3(x)y_1}{W} dx$$

$$(۹) \quad y_p = -y_1 \int \frac{f_3(x)y_2}{W} dx + y_2 \int \frac{f_3(x)y_1}{W} dx$$

برای انتگرالها، ثابت انتگرال گیری منظور نمی کنیم، اگر ثابت های انتگرال گیری منظور شوند، جواب عمومی بدست می آید.

مثال ۵۱.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن متناظر را می نویسیم

$$t^2 + 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm i$$

$$y_h = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

و فرض می کنیم

$$y_1 = e^{-x} \cos x, y_2 = e^{-x} \sin x$$

برای محاسبه W, y_1', y_2' را حساب می کنیم

$$y_1' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x, y_2' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

$$W = y_1y_2' - y_2y_1' = e^{-2x}$$

$$y_p = -e^{-x} \cos x \int \frac{e^{-2x} \sin x}{e^{-2x} \cos^2 x} dx + e^{-x} \sin x \int \frac{e^{-2x} \cos x}{e^{-2x} \cos^2 x} dx$$

مثال ۵۳.۳. نشان دهید $y_1 = x$ و $y_2 = x^2$ جوابهای معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0 \quad (1)$$

می باشند و سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = \frac{6}{x} \quad (2)$$

را بنویسید.

حل. y_1, y_1', y_1'' را در (۱) قرار می دهیم و نشان می دهیم که اتحاد برقرار است.

$$y_1 = x, \quad y_1' = 1, \quad y_1'' = 0$$

$$0 - 2x + 2x = 0$$

باروش مشابه نشان می دهیم که y_2 نیز یک جواب (۱) می باشد

$$y_2 = x^2, \quad y_2' = 2x, \quad y_2'' = 2$$

$$2x^2 - 4x^2 + 2x^2 = 0$$

پس جواب عمومی معادله همگن متناظر (۲) عبارتست از:

$$y_h = c_1 x + c_2 x^2$$

فرض می کنیم

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2$$

داریم

$$y_1' = 1, \quad y_2' = 2x, \quad W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = x^2$$

حال طرفین (۲) را بر ضرب y یعنی $\frac{6}{x}$ تقسیم می کنیم

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = \frac{6}{x^3}$$

و طبق فرمول (۹) داریم:

$$y_p = -x \int \frac{\frac{6x^2}{x^3}}{x^2} dx + x^2 \int \frac{\frac{6x}{x^3}}{x^2} dx$$

$$= -x \int 6x^{-3} dx + x^2 \int 6x^{-4} dx$$

$$= x^{-1}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + x^{-1}$$

مثال ۵۴.۳. نشان دهید $y_1 = x$ و $y_2 = 1/x$ جوابهای معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x^2 y' - xy = 0 \quad (1)$$

می باشند و سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x^2 y' - xy = \frac{x}{1+x} \quad (2)$$

را بنویسید.

حل. y_1, y_1', y_1'' را در (۱) جایگذاری می کنیم

$$y_1 = x, \quad y_1' = 1, \quad y_1'' = 0$$

$$0 + x^2 - x^2 = 0$$

و بطور مشابه نشان می دهیم که y_2 نیز یک جواب (۱) می باشد.

حال طرفین (۲) را بر ضرب y یعنی x^3 تقسیم می کنیم. داریم

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2(1+x)} \quad (3)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر (۳) عبارتست از

$$y_h = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}$$

و فرض می کنیم

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

$$y_1' = 1, \quad y_2' = -\frac{1}{x^2}, \quad W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$$

$$y_p = -x \int \frac{\frac{1}{x^2(1+x)}}{-2/x} dx + \frac{1}{x} \int \frac{\frac{1}{x(1+x)}}{-2/x} dx$$

$$= \frac{x}{2} \int \frac{1}{x^2(1+x)} dx - \frac{1}{2x} \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$= \frac{x}{2} \left(-\frac{1}{x} - \ln x + \ln(1+x) \right) - \frac{1}{2x} \ln(1+x)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \ln x + \frac{x^2 - 1}{2x} \ln(1+x)$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} \ln(1+x) - \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \ln x$$

تذکره. این روش برای معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دلخواه نیز صادق است.

در حالت کلی برای حل یک معادله خطی غیرهمگن از مرتبه n . ابتدا جواب

عمومی معادله همگن متناظر را بدست می آوریم.

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

و y_p را به فرم زیر در نظر می گیریم

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_n y_n \quad (10)$$

که " v_i " ها " $1 \leq i \leq n$ ". نوعی از x می باشد. برای محاسبه " v_i " ها. ابتدا

" v_i " ها را از حل دستگاه زیر بدست می آوریم و سپس انتگرال می گیریم *

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + \dots + v_n' y_n = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + \dots + v_n' y_n' = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \dots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

$$v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

(طرف دوم معادله خطی غیرهمگن می باشد)

مثال ۳.۵۵. معادله دیفرانسیل

$$y''' + 4y'' - 5y' = e^{3x} \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می نویسیم.

$$t^3 + 4t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t = 0, 1, -5$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-5x} \quad (2)$$

* اگر نامشای انتگرالگیری را ثابت کنیم جواب عمومی بدست می آید.

سپس با فرض $y_1 = 1$ و $y_2 = e^x$ و $y_3 = e^{-5x}$ و با توجه به فرمول (۱۰) جواب خصوصی را به فرم زیر در نظر می گیریم.

$$y_p = v_1 + v_2 e^x + v_3 e^{-5x} \quad (3)$$

و برای محاسبه v_1 و v_2 و v_3 ابتدا v_1' و v_2' و v_3' را از حل دستگاه زیر بدست می آوریم

$$\begin{cases} v_1' + v_2' e^x + v_3' e^{-5x} = 0 \\ 0 + v_2' e^x - 5v_3' e^{-5x} = 0 \\ 0 + v_2' e^x + 25v_3' e^{-5x} = e^{3x} \end{cases}$$

$$v_1' = -\frac{-1}{5} e^{3x}, \quad v_2' = \frac{1}{6} e^{2x}, \quad v_3' = \frac{1}{30} e^{8x}$$

و با انتگرال گیری داریم:

$$v_1 = \frac{-1}{15} e^{3x}, \quad v_2 = \frac{1}{12} e^{2x}, \quad v_3 = \frac{1}{240} e^{8x}$$

با جایگذاری v_1 و v_2 و v_3 در (۳) خواهیم داشت

$$y_p = \frac{1}{15} e^{3x} + \frac{1}{12} e^{2x} + \frac{1}{240} e^{8x} = \frac{1}{48} e^{3x}$$

و جواب عمومی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-5x} + \frac{1}{48} e^{3x}$$

مثال ۳.۵۶. معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' + y' = e^x$$

را حل کنید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می نویسیم.

$$t^3 - 2t^2 + t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \quad t_2 = t_3 = 1$$

$y'' + 4y = \sec 2x$.۷

$y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^2$.۸

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(1-x)^2}$.۹

$y'' - 3y' + 2y = \sin e^x$.۱۰

$y' + 4y = \sec x \tan x$.۱۱

$y'' + 9y = \sec x \csc x$.۱۲

$y'' + 9y = \csc 2x$.۱۳

$9y'' + y = \tan^2 \frac{x}{3}$.۱۴

$y''' + y' = \tan x$.۱۵

$4y'' - 4y' + y = e^{x/2} \ln x$.۱۶

۱۷. نشان دهید، $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ و $y_2 = \frac{\sin x}{x}$ جوابهای معادله دیفرانسیل

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

می باشند، و سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$xy'' + 2y' + xy = x$$

۱۸. نشان دهید، $y_1 = e^x$ و $y_2 = x$ جوابهای معادله دیفرانسیل

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

می باشند؛ و سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x$$

و جواب خصوصی به فرم زیر می باشد:

$$y_p = v_1 + v_2 e^x + v_3 x e^x$$

و از حل دستگاه زیر، v_1' و v_2' و v_3' را بدست آورده و سپس انتگرال می گیریم تا v_1

و v_2 و v_3 بدست آیند

$$\begin{cases} v_1' + v_2' e^x + v_3' x e^x = 0 \\ 0 + v_2' e^x + v_3' e^x + v_3' x e^x = 0 \\ 0 + v_2' e^x + 2v_3' e^x + v_3' x e^x = e^x \end{cases}$$

$$v_1' = e^x, \quad v_2' = -1 - x, \quad v_3' = 1$$

$$v_1 = e^x, \quad v_2 = -x - \frac{x^2}{2}, \quad v_3 = x$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right)$$

مجموعه مسائل ۵.۳

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید. برای بدست آوردن y_p

از روش تغییر پارامترها استفاده شود.

۱. $y'' + 4y' + 4y = e^x$

۲. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

۳. $y'' + 4y = 2(x - \sin 2x)$

۴. $y'' + 9y = e^x + \sin 4x$

۵. $y''' + 3y'' - 4y' = \cos 2x$

۶. $y'' + y = \tan x$

۳. حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بر سلسله روش ابراتورها یا انتحاب علامت

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \dots, \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = r(x)$$

به فرم زیر نوشته می شود:

$$(2) \quad (D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_n) y = r(x)$$

و معادله (۲) را بصورت $F(D)y = r(x)$ نمایش می دهیم که $F(D)$ یک چند جمله ای از D می باشد و به آن چند جمله ای ابراتوری می گوئیم. $F(D)$ را می توان به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرد.

$$(3) \quad F(D) = (D - a_1)(D - a_2) \dots (D - a_n)$$

که در (۳) "ها" مقادیر ثابت حقیقی یا مختلط می باشند. درستی مطلب را برای مرتبه دوم نشان می دهیم. فرض کنید r تابع دلخواهی از x باشد که بتوان لااقل دو بار از آن مشتق گرفت.

$$(D - a_1)(D - a_2)y = (D - a_1)(Dy - a_2y) \\ = D^2y - a_1Dy - a_2Dy + a_1a_2y \\ = (D^2 - (a_1 + a_2)D + a_1a_2)y$$

(۱)

$$(D - a_2)(D - a_1)y = (D - a_2)(Dy - a_1y) \\ = D^2y - a_1Dy - a_2Dy + a_1a_2y \\ = (D^2 - (a_1 + a_2)D + a_1a_2)y$$

(۵)

از (۴) و (۵) داریم

$$D^2 - (a_1 + a_2)D + a_1a_2 = (D - a_1)(D - a_2) = (D - a_2)(D - a_1)$$

تذکره ۱. اگر ضرایب ثابت نباشند، تعمیم پذیری برقرار نخواهد بود. به مثال زیر توجه کنید!

مثال ۳. ۵۷.

$$(D - x)(D - 2)y = (D - x)(Dy - 2y) \\ = D^2y - 2Dy - xDy + 2xy \\ = (D^2 - (2 + x)D + 2x)y \quad (1)$$

$$(D - 2)(D - x)y = (D - 2)(Dy - xy) \\ = D^2y - Dxy - 2Dy + 2xy \\ = D^2y - Dy - xDy - 2Dy + 2xy \\ = (D^2 - (2 + x)D - 1 + 2x)y \quad (2)$$

با مقایسه (۱) و (۲)، داریم،

$$(D - x)(D - 2) \neq (D - 2)(D - x).$$

ابراتورها دارای خواص ساده ای هستند که از فضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می شوند بعضی از خواص آنها در زیر بیان می شود.

فرض کنید $F_1(D)$ و $F_2(D)$ و $F_3(D)$ سه چند جمله ای ابراتوری باشند در

این صورت،

$$(6) \quad [F_1(D) + F_2(D)]y = F_1(D)y + F_2(D)y$$

$$(7) \quad [F_1(D)F_2(D)]y = F_1(D)[F_2(D)y]$$

$$(8) \quad [F_1(D)F_2(D)]y = [F_2(D)F_1(D)]y$$

$$(9) \quad F_1(D)[F_2(D) + F_3(D)]y = [F_1(D)F_2(D) + F_1(D)F_3(D)]y$$

$$(10) \quad F_1(D)[F_2(D)F_3(D)]y = [F_1(D)F_2(D)]F_3(D)y$$

$$(11) \quad [cF_1(D)]y = c[F_1(D)y]$$

$$(12) \quad [F_1(D) + c]y = F_1(D)y + cy.$$

پیدا کردن جواب عمومی معادله (۲)، می دانیم که جواب عمومی به فرم $y = y_h + y_p$ می باشد، y_p را با روش زیر بدست می آوریم، ابتدا $F(D)$ را به عوامل

مثال ۳.۵۸. معادله دیفرانسیل

$$y'' - 3y' = \sin 2x$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را به فرم اپراتوری می نویسیم

$$D(D-3)y = \sin 2x \quad (1)$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^{3x}$$

برای محاسبه y_p فرض می کنیم

$$(D-3)y = v_1 \quad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$Dv_1 = \sin 2x$$

$$v_1 = -\frac{1}{2} \cos 2x \quad (3)$$

با جایگذاری (۳) در (۲)، داریم

$$(D-3)y = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

و با توجه به فرمول (۱۹)،

$$y_p = e^{3x} \int -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos 2x \, dx$$

$$= e^{3x} \left[-\frac{1}{13} e^{-3x} \sin 2x + \frac{3}{26} e^{-3x} \cos 2x \right]$$

$$= \frac{3}{26} \cos 2x - \frac{1}{13} \sin 2x$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + \frac{3}{26} \cos 2x - \frac{1}{13} \sin 2x$$

مثال ۳.۵۹. معادله دیفرانسیل

$$(D^2 - 4D + 3)y = 1$$

را حل کنید.

اول تجزیه می کنیم، داریم،

$$(13) \quad (D-a_1)(D-a_2)\dots(D-a_n)y = r(x)$$

و فرض می کنیم

$$(14) \quad V_1 = (D-a_2)(D-a_3)\dots(D-a_n)y$$

پس (۱۳) به فرم زیر درمی آید

$$(D-a_1)V_1 = r(x)$$

$$V_1' - a_1 V_1 = r(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشد و

$$(15) \quad V_1 = e^{a_1 x} \int r(x) e^{-a_1 x} \, dx$$

حال مقدار محاسبه شده V_1 از (۱۵) را در (۱۴) جایگذاری می کنیم و با فرض

$$V_2 = (D-a_3)(D-a_4)\dots(D-a_n)y$$

داریم،

$$(D-a_2)V_2 = V_1$$

$$(16) \quad V_2' - a_2 V_2 = V_1$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشد و داریم.

$$(17) \quad V_2 = e^{a_2 x} \int V_1 e^{-a_2 x} \, dx$$

و بعد از $n-1$ مرتبه که از این روش استفاده کنیم، داریم،

$$(18) \quad (D-a_n)y = V_{n-1}$$

$$(19) \quad y_p = e^{a_n x} \int V_{n-1} e^{-a_n x} \, dx$$

تذکره ۲. اگر ثابتهای انتگرالگیری را وارد کنیم یعنی $V_i = e^{a_i x} [\int V_{i-1} e^{-a_i x} \, dx + c_i]$ در این صورت جواب عمومی بدست می آید. ولی برای سادگی در محاسبات انتگرالها بهتر است ثابت انتگرال را وارد نکنیم و جواب خصوصی را بدست آورده با جواب عمومی معادله همگن متناظر جمع کنیم.

حل. ابتدا معادله را به فرم زیر می نویسیم

$$(D-1)(D-3)y=1 \quad (1)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

و برای محاسبه y_p فرض می کنیم

$$(D-3)y = V_1 \quad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم،

$$(D-1)V_1 = 1$$

$$V_1 = e^x \int e^{-x} dx = -1 \quad (3)$$

با توجه به مقدار (۳)، داریم،

$$(D-3)y = -1$$

$$y_p = e^{3x} \int -e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}$$

مثال ۳.۶۰. معادله دیفرانسیل

$$(D-2)^2(D+1)y=x \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را به فرم زیر می نویسیم

$$(D-2)(D-2)(D+1)y=x \quad (2)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^{2x}$$

برای محاسبه y_p فرض می کنیم

$$(D-2)(D+1)y = V_1 \quad (3)$$

با جایگذاری (۳) در (۲) داریم،

$$(D-2)V_1 = x \quad (4)$$

$$V_1 = e^{2x} \int x e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad (5)$$

با جایگذاری (۵) در (۳) داریم،

$$(D-2)(D+1)y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad (6)$$

و فرض می کنیم

$$(D+1)y = V_2 \quad (7)$$

با جایگذاری (۷) در (۶) داریم،

$$(D-2)V_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$V_2 = e^{2x} \int \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \quad (8)$$

با جایگذاری (۸) در (۷) داریم،

$$(D+1)y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$y_p = e^{-x} \int \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) e^x dx$$

$$= \frac{1}{4}x$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^{2x} + \frac{1}{4}x$$

مثال ۳.۶۱. معادله دیفرانسیل

$$(D^2+4)y = e^x \quad (1)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

برای محاسبه y_p ، فرض می‌کنیم

$$(D - 2)y = V_1 \quad (3)$$

با جایگذاری (۳) در (۲)، داریم

$$(D - 1)V_1 = \sin e^{-x}$$

$$V_1 = e^x \int e^{-x} \sin e^{-x} dx$$

$$= e^x \cos e^{-x} \quad (4)$$

با جایگذاری (۴) در (۳) داریم،

$$(D - 2)y = e^x \cos e^{-x}$$

$$y_p = e^{2x} \int e^{-x} \cos e^{-x} dx$$

$$= -e^{2x} \sin e^{-x}$$

و جواب عمومی معادله بدفرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$$

مجموعه مسائل ۶.۳.

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بنویسید.

$$y'' - y' - 2y = e^x \quad .1$$

$$y'' + 3y' + 2y = 12e^x \quad .2$$

$$y'' + 3y' + 2y = e^{ix} \quad .3$$

$$y'' + 3y' + 2y = \sin x \quad .4$$

$$y'' + 3y' + 2y = \cos x \quad .5$$

$$y'' + 3y' + 2y = 8 + 6e^x + 2\sin x \quad .6$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را بدفرم زیر می‌نویسیم

$$(D + 2i)(D - 2i)y = e^x \quad (2)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

برای محاسبه y_p ، فرض می‌کنیم

$$(D - 2i)y = V_1 \quad (3)$$

با جایگذاری (۳) در (۲) داریم،

$$(D + 2i)V_1 = e^x$$

$$V_1 = e^{-2ix} \int e^{2ix} \cdot e^x dx.$$

$$= \frac{1}{1 + 2i} e^{-2ix} \cdot e^{2ix} \cdot e^x$$

$$= \frac{e^x}{1 + 2i} \quad (4)$$

با جایگذاری (۴) در (۳) داریم،

$$(D - 2i)y = \frac{e^x}{1 + 2i}$$

$$y_p = e^{2ix} \int \frac{e^x}{1 + 2i} e^{-2ix} dx$$

$$= \frac{1}{1 + 2i} \cdot \frac{1}{1 - 2i} e^{2ix} \cdot e^x \cdot e^{-2ix}$$

$$= \frac{1}{5} e^x.$$

مثال ۶.۳.۳. معادله دیفرانسیل

$$(D^2 - 3D + 2)y = \sin e^{-x} \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را بدفرم زیر می‌نویسیم

$$(D - 1)(D - 2)y = \sin e^{-x} \quad (2)$$

$$y'' - 2y' - 8y = 10e^{-x} + 9xe^x \quad \cdot 7$$

$$y'' - 3y' = 2e^{2x} \sin x \quad \cdot 8$$

$$y^{(4)} - 2y'' + y = x - \sin x \quad \cdot 9$$

$$y'' + y' = x^2 + 2x \quad \cdot 10$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^{-x} \quad \cdot 11$$

$$y'' + 4y = 4x \sin 2x \quad \cdot 12$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{-x} \quad \cdot 13$$

$$y''' - y' = e^{2x} \sin^2 x \quad \cdot 14$$

$$4y'' - 5y' = x^2 e^{-x} \quad \cdot 15$$

$$y''' - y'' + y' - y = 4e^{-3x} + 2x^4 \quad \cdot 16$$

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 3e^{2x} \quad \cdot 17$$

۷-۳. ابراتورهای معکوس

در این بخش دربارهٔ تعیین جواب خصوصی یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت - با استفاده از ابراتورهای معکوس بحث خواهیم کرد. قبل از معرفی ابراتور معکوس و بررسی این روش، فضای زیر را - که بعداً مورد استفاده قرار می‌گیرد - بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳-۹. اگر $F(D)$ یک چند جمله‌ای ابراتور باشد، آنگاه برای هر ثابت a و هر

تابع دلخواه $u(x)$ که لاقبل دارای n مشتق متوالی است، داریم

$$(1) \quad F(D)(e^{ax}u(x)) = e^{ax}F(D+a)u(x)$$

اثبات. برای اثبات قضیه کافایت نشان دهیم

$$D^k(e^{ax}u) = e^{ax}(D+a)^k u$$

با استفاده از روش استقرار، ابتدا برای $k=0$ و $k=1$ قضیه را ثابت می‌کنیم.

$$D^0(e^{ax}u) = e^{ax}u = e^{ax}(D+a)^0 u$$

$$D(e^{ax}u) = a e^{ax}u + e^{ax}Du = e^{ax}(D+a)u$$

حال با فرض اینکه برای $k=m$ درست باشد و ثابت می‌کنیم برای $k=m+1$ نیز درست است یعنی فرض می‌کنیم

$$D^m(e^{ax}u) = e^{ax}(D+a)^m u$$

یا مشتگیری از رابطه بالا داریم

$$D^{m+1}(e^{ax}u) = D[D^m(e^{ax}u)]$$

$$= D[e^{ax}(D+a)^m u]$$

$$= a e^{ax}(D+a)^m u + e^{ax}D(D+a)^m u$$

$$= e^{ax}[a(D+a)^m + D(D+a)^m]u$$

$$= e^{ax}(D+a)^{m+1}u.$$

نتیجه ۱-۱. اگر $F(D) = (D-a)^n$ باشد، آنگاه

$$(2) \quad (D-a)^n(e^{ax}u) = e^{ax}D^n u$$

قضیه ۳-۱۰. اگر $F(D)$ یک چند جمله‌ای ابراتور باشد، آنگاه

$$(3) \quad F(D)(c e^{ax}) = c e^{ax} F(a)$$

a و c مقادیر ثابت هستند.

اثبات. کافایت نشان دهیم که

$$(4) \quad (D+a)^k c = c a^k$$

(۴) بسادگی بوسیله بسط دو جمله‌ای $(D+a)^k$ اثبات می‌شود*. و با توجه به (۴)

داریم

$$\begin{aligned} F(D+a)c &= [(D+a)^n + a_1(D+a)^{n-1} + \dots + a_n]c \\ &= c(a^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_n) \\ &= cF(a) \end{aligned}$$

حال طبق قضیه ۰۳، ۰۹، یا فرض $u(x) = c$

$$\begin{aligned} F(D)(e^{ax}c) &= e^{ax}F(D+a)c \\ &= ce^{ax}F(a) \end{aligned}$$

بدون آنکه بخواهیم از مطلب اصلی دور شویم، چند مثال درباره کاربردهای عملی قضایای فوق را بیان می‌کنیم:

مثال ۰۳، ۰۶۳. $(D^2 + 2D - 3)(4e^{2x})$ را تعیین کنید.

حل. با توجه به قضیه ۰۳، ۱۰۵ داریم

$$\begin{aligned} (D^2 + 2D - 3)(4e^{2x}) &= 4e^{2x}(4 + 4 - 3) \\ &= 20e^{2x} \end{aligned}$$

مثال ۰۳، ۰۶۴. $(x^2e^x)(D^2 + 3D - 1)$ را تعیین کنید.

حل. با توجه به قضیه ۰۳، ۹ داریم

$$\begin{aligned} (D^2 + 3D - 1)(e^x x^2) &= e^x [(D+1)^2 + 3(D+1) - 1]x^2 \\ &= e^x (D^2 + 5D + 3)x^2 \\ &= e^x (2 + 10x + 3x^2) \end{aligned}$$

مثال ۰۳، ۰۶۵. $(D+3)^2(e^{-3x} \cot x)$ را تعیین کنید.

یا توجه به نتیجه ۰۱ داریم

$$\begin{aligned} (D+3)^2(e^{-3x} \cot x) &= e^{-3x} D^2 \cot x \\ &= 2e^{-3x} \csc^2 x \cot x. \end{aligned}$$

* برای $k=2$ اثبات می‌کنیم

$$(D+a)^2 c = (D^2 + 2aD + a^2)c$$

و چون مشتقات c برابر صفر هستند پس:

$$(D+a)^2 c = ca^2$$

چون مشتگیری و انتگرالگیری دو عمل عکس یکدیگرند و چون نماد مشتگیری را با D نشان دادیم، بدین جهت نماد انتگرالگیری را با D^{-1} یا $\frac{1}{D}$ نمایش می‌دهیم و داریم،

$$D^{-1}(Du) = D(D^{-1}u) = u$$

و تعریف می‌کنیم $D^{-2}u$ یعنی $D^{-1}(D^{-1}u)$ و به همین ترتیب مقصود از $D^{-k}u$ یا $\frac{1}{D^k}$ یعنی k بار انتگرال متوالی از u گرفتن باشد و $D^k(D^{-k}u) = D^{-k}(D^k u)$

مثال ۰۳، ۰۶۶. $y = D^2(2x)$ را تعیین کنید.

حل.

$$y = D^2(2x) = D^2(x^2 + c_1) = \frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2$$

تعریف ۰۳، ۰۸. اپراتور معکوس $\frac{1}{F(D)}$ یا $F^{-1}(D)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(5) \quad F(D)\left[\frac{1}{F(D)}u\right] = u$$

$$(6) \quad \frac{1}{F(D)}[F(D)u] = u$$

قضیه ۰۳، ۰۱۱. برای هر مقدار ثابت c داریم

$$(7) \quad \frac{1}{F(D)}cu(x) = c\frac{1}{F(D)}u(x)$$

اثبات. برای اثبات اپراتور $F(D)$ را در دو طرف رابطه (۷) اثر داده و نشان می‌دهیم نتایج یکسان دارد.

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}cu(x)\right] = cu(x)$$

$$\begin{aligned} F(D)\left[c\frac{1}{F(D)}u(x)\right] &= cF(D)\left[\frac{1}{F(D)}u(x)\right] \\ &= cu(x) \end{aligned}$$

قضیه ۰۳، ۰۱۲. فرض کنید $F(D)$ یک چندجمله‌ای براتوری و a ثابت و $u(x)$ تابع دلخواهی از x باشد. آنگاه

$$(8) \quad \frac{1}{F(D)}(e^{ax}u(x)) = e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}u(x)$$

توجه ۱. تاکنون ثابت کرده‌ایم که جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به فرم

$$F(D)y = ce^{ax}$$

(۲) اگر a ریشه معادله مقسر نباشد یعنی $F(a) \neq 0$ باشد. به صورت زیر است.

$$(13) \quad y_p = c \frac{e^{ax}}{F(a)}$$

(ب) اگر a, k بار ریشه معادله مقسر باشد یعنی $F(D) = (D-a)^k P(D)$ و $P(a) \neq 0$ جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$(14) \quad y_p = c \frac{e^{ax} x^k}{k! P(a)}$$

مثال ۳. ۶۷. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 + D + 1)y = e^{3x} + 6e^x - 3e^{2x} + 5$$

را بنویسید.
حل.

$$y_p = \frac{1}{(D^2 + D + 1)} e^{3x} + 6 \frac{1}{(D^2 + D + 1)} e^x - 3 \frac{1}{(D^2 + D + 1)} e^{2x} + \frac{1}{(D^2 + D + 1)} 5$$

$$= \frac{1}{13} e^{3x} + 2e^x - e^{2x} + 5$$

مثال ۳. ۶۸. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 - 1)y = e^x$$

را بنویسید.

حل. چون $F(1) = (1-1) = 0$ می‌باشد. لذا "۱" ریشه معادله مقسر است.

$$D^2 - 1 = (D-1)(D+1)$$

در این مثال $P(D) = D+1$ و $k=1$ می‌باشد.

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D+1)} e^x$$

اثبات. اپراتور $F(D)$ را در دو طرف رابطه (۸) اثر داده و نشان می‌دهیم نتایج یکسان دارد.

$$F(D) \left[\frac{1}{F(D)} (e^{ax} u) \right] = e^{ax} u$$

$$F(D) \left[e^{ax} \left(\frac{1}{F(D+a)} u \right) \right] = e^{ax} F(D+a) \left[\frac{1}{F(D+a)} u \right]$$

$$= e^{ax} u.$$

نتیجه ۲. اگر $F(D) = (D-a)^n$ باشد، آنگاه

$$(9) \quad \frac{1}{(D-a)^n} (e^{ax} u) = e^{ax} \frac{1}{D^n} u.$$

و روابط بسیار مهم زیر را داریم

$$(10) \quad \frac{1}{F(D)} e^{ax} = \frac{1}{F(a)} e^{ax}, \quad F(a) \neq 0$$

$$(11) \quad \frac{1}{F(D)} c = \frac{c}{F(0)}, \quad F(0) \neq 0$$

$$(12) \quad \frac{1}{(D-a)^k P(D)} c e^{ax} = \frac{c x^k e^{ax}}{k! P(a)}, \quad P(a) \neq 0$$

رابطه (۱۲) را اثبات می‌کنیم. فرض کنید،

$$F(D) = (D-a)^k P(D)$$

حال با توجه به قضیه ۳. ۱۲ و با انتخاب $u(x) = c$ داریم،

$$\frac{1}{(D-a)^k P(D)} c e^{ax} = e^{ax} \frac{1}{D^k P(D+a)} c$$

$$= e^{ax} \frac{1}{D^k} \cdot \frac{1}{P(D+a)} c$$

و با توجه به رابطه (۱۱) داریم،

$$= e^{ax} \frac{1}{D^k} \cdot \frac{c}{P(a)}$$

$$= e^{ax} \frac{c}{P(a)} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

و با توجه به فرمول (۱۴)، داریم

$$y_p = \frac{x e^x}{1!(1+1)} = \frac{1}{2} x e^x$$

مثال ۰۳. ۶۹. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = e^{2x} - 2$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2 - 4D + 4} e^{2x} - \frac{1}{D^3 - D^2 - 4D + 4} 2$$

$$\frac{1}{D^3 - D^2 - 4D + 4} 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{مطابق فرمول ۱۱})$$

و چون "۲"، یک پار ریشه معادله مفسر می باشد،

$$D^3 - D^2 - 4D + 4 = (D - 2)(D^2 + D - 2)$$

پس $k = 1$ و $P(D) = D^2 + D - 2$ ، لذا با توجه به فرمول (۱۴)

$$\frac{1}{(D - 2)(D^2 + D - 2)} e^{2x} = \frac{e^{2x} x}{1!(4)} = \frac{x e^{2x}}{4}$$

$$y_p = \frac{x e^{2x}}{4} - \frac{1}{2}$$

مثال ۰۳. ۷۰. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D - 1)^2 (D + 1)^3 y = 2e^x + 4e^{-x}$$

را بنویسید

حل.

$$y_p = 2 \frac{1}{(D - 1)^2 (D + 1)^3} e^x + 4 \frac{1}{(D - 1)^2 (D + 1)^3} e^{-x}$$

$$= 2 \frac{x^2 e^x}{2!(1+1)^3} + 4 \frac{x^3 e^{-x}}{3!(-1-1)^3}$$

$$= \frac{x^2 e^x}{8} + \frac{x^3 e^{-x}}{6}$$

اگر در معادله دیفرانسیل $F(D)y = r(x)$ ، طرف دوم یعنی $r(x)$ به فرم یک چند-جمله‌ای از درجه m باشد. در این صورت می‌دانیم $r(x) = \frac{1}{F(D)}$ می‌باشد. برای تعیین y_p ابتدا، "۱" را بر $F(D)$ تقسیم می‌کنیم و تا حمله D^m عمل تقسیم را ادامه می‌دهیم؛ زیرا به‌ازاء هر $k > m$ داریم $D^k x^m = 0$ است.

مثال ۰۳. ۷۱. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^3 - 2D + 4)y = x^2 - 2x + 1$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D + 4} (x^2 - 2x + 1)$$

ابتدا، "۱" را بر $D^3 - 2D + 4$ تقسیم می‌کنیم

$$\begin{array}{r} 1 \qquad \qquad \qquad | \quad 4 - 2D + D^3 \\ \qquad \qquad \qquad \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}D^2 \\ \hline 1 - \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^3 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \quad \frac{1}{2}D - \frac{1}{4}D^3 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \quad \frac{1}{2}D - \frac{1}{4}D^3 + \frac{1}{8}D^3 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \quad \frac{1}{4}D^2 - \frac{3}{8}D^3 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \quad \frac{1}{4}D^2 \dots \dots \dots \end{array}$$

و چون بزرگترین درجه چندجمله‌ای ۲ می‌باشد، عمل تقسیم را تا جمله D^2 ادامه می‌دهیم،

$$\begin{aligned} y_p &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}D^2 \right) (x^2 - 2x + 1) \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - 2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{13}{8}$$

تذکره. در مثال بالا صفر ریشه معادله مفسر نبود یعنی $F(0) \neq 0$ حال اگر صفر ریشه معادله مفسر باشد یعنی $F(D) = D^r P(D)$ و $P(0) \neq 0$ باشد، روش حل به شرح مثال زیر خواهد بود:

مثال ۳.۷۲. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x^2 - 1$$

را بنویسید.

حل. چون صفر، دوبار ریشه معادله مفسر است پس

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2) = D^2(D^2 + 2D - 3)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2} \left[\frac{1}{D^2 + 2D - 3} (x^2 - 1) \right]$$

ابتدا، عبارت داخل کروشه را حساب می‌کنیم و سپس دو بار از آن انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} & \frac{1}{-3 + 2D + D^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \frac{7}{27}D^2}{-1 - \frac{2}{3}D - \frac{1}{3}D^2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}D + \frac{1}{3}D^2}{\frac{2}{3}D - \frac{4}{9}D^2 - \frac{2}{9}D^3} \\ &= \frac{\frac{7}{9}D^2 + \frac{2}{9}D^3}{\frac{7}{9}D^2 + \frac{2}{9}D^3} \\ &= \frac{7}{9}D^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2} \left[\left(-\frac{1}{27} \right) (9 + 6D + 7D^2) (x^2 - 1) \right] \\ &= -\frac{1}{27} \frac{1}{D^2} (9x^2 + 12x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{27} \frac{1}{D} (3x^3 + 6x^2 + 5x) \\ &= -\frac{1}{27} \left(\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \end{aligned}$$

قضیه ۳.۱۳. اگر $F(D)$ یک چند جمله‌ای ابراتورری باشد و فقط شامل توانهای زوج D آنگاه

$$(15) \quad F(D^2) \sin ax = F(-a^2) \sin ax$$

$$(16) \quad F(D^2) \cos ax = F(-a^2) \cos ax$$

اثبات. رابطه (۱۵) را اثبات می‌کنیم. و اثبات (۱۶) مشابه (۱۵) می‌باشد.

$$\begin{aligned} F(D^2) \sin ax &= (D^{2k} + a_1 D^{2k-2} + \dots + a_n) \sin ax \\ &= ((-a^2)^k + a_1 (-a^2)^{k-2} + \dots + a_n) \sin ax \\ &= F(-a^2) \sin ax \end{aligned}$$

و $2k = n$.

قضیه ۳.۱۴. اگر $F(D)$ یک چند جمله‌ای ابراتورری باشد و فقط شامل توانهای زوج D آنگاه

$$(17) \quad \frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{1}{F(-a^2)} \sin ax, \quad F(-a^2) \neq 0$$

$$(18) \quad \frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{1}{F(-a^2)} \cos ax, \quad F(-a^2) \neq 0$$

اثبات. (۱۸) را ثابت می‌کنیم و اثبات (۱۷) مشابه می‌باشد. برای اثبات کافیت ابراتور $F(D^2)$ را به دو طرف اثر داده و نشان می‌دهیم نتایج یکسان دارد.

$$\begin{aligned} F(D^2) \left[\frac{1}{F(D^2)} \cos ax \right] &= \cos ax \\ F(D^2) \left[\frac{1}{F(-a^2)} \cos ax \right] &= \frac{1}{F(-a^2)} F(D^2) \cos ax \\ &= \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \cos ax \\ &= \cos ax \end{aligned}$$

توجه ۲. اگر معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به صورت

$$F(D^2)y = C \cos ax$$

یا

$$F(D^2)y = C \sin ax$$

باشد و ia ریشه معادله مفسر نباشد (یعنی $F(-a^2) \neq 0$ باشد) در این صورت جواب خصوصی را به فرم زیر خواهیم داشت.

$$y_p = \frac{c \cdot 1}{F(-a^2)} \cos ax \quad (19)$$

$$y_p = \frac{c}{F(-a^2)} \sin ax \quad (20)$$

مثال ۳.۷۳. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 - 2)y = \cos 2x$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2} \cos 2x$$

با توجه به فرمول (۱۹) داریم

$$y_p = \frac{-1}{6} \cos 2x$$

مثال ۳.۷۴. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^4 + 2D^2 - 1)y = 2 \sin x$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{2}{D^4 + 2D^2 - 1} \sin x$$

$$= \frac{2}{1 - 2 - 1} \sin x = -\sin x$$

توجه ۳. اگر در معادله دیفرانسیل به فرم زیر

$$(21) \quad F(D)y = C \cos ax, \quad F(D)y = C \sin ax$$

ia ریشه معادله مفسر بوده یا $F(D)$ شامل توانهای فرد D هم باشد، در این صورت

از فرمول "اولر" استفاده می‌کنیم،

$$(22) \quad e^{iQ} = \cos Q + i \sin Q$$

به جای $\sin ax$ یا $\cos ax$ مقدار e^{iax} را قرار می‌دهیم تا معادله به فرم

$$F(D)y = c e^{iax}$$

درآید؛ سپس با استفاده از فرمولهای (۱۳) یا (۱۴) جواب خصوصی را پیدا می‌کنیم که این جواب خصوصی به صورت مختلط بیان می‌شود. حال اگر طرف دوم معادله $\cos ax$ باشد، قسمت حقیقی، و اگر طرف دوم معادله $\sin ax$ باشد، قسمت موهومی، جواب مطلوب می‌باشد.

مثال ۳.۷۵. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad (D^2 + 4)y = \sin 2x$$

(۱)

را بنویسید.

حل. چون $2i$ ریشه معادله مفسر می‌باشد ($-4 + 4 = 0$) در این صورت با استفاده

$$\text{از فرمول} \quad e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$$

به جای معادله (۱)، معادله زیر را حل کرده،

$$(2) \quad (D^2 + 4)y = e^{2ix}$$

(۲)

و قسمت موهومی جواب خصوصی (۲) را به عنوان جواب خصوصی (۱) اختیار می‌کنیم؛

$$y_p = \frac{1}{(D+2i)(D-2i)} e^{2ix}$$

و با توجه به فرمول (۱۴)، $k=1$ ، $P(D) = D+2i$ ،

$$y_p = \frac{x e^{2ix}}{4i}$$

$$= \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{i} (\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{F_1(-a^2) + DF_2(-a^2)} \cos ax \\
 &= \frac{1}{A + DB} \cos ax \\
 &= \frac{A - DB}{A^2 + a^2 B^2} \cos ax
 \end{aligned}$$

مثال ۳. ۷۷. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 + 2D - 2)y = \sin x \quad \text{را بنویسید}$$

حل.

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{D^2 + 2D - 2} \sin x \\
 &= \frac{1}{-3 + 2D} \sin x \\
 &= \frac{-3 - 2D}{9 + 4} \sin x \\
 &= -\frac{1}{13} (3 \sin x + 2 \cos x)
 \end{aligned}$$

مثال ۳. ۷۸. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 + 4D + 5)y = 10e^{-2x} \cos x \quad (1)$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = 10 \frac{1}{D^2 + 4D + 5} e^{-2x} \cos x$$

با توجه به قضیه ۳. ۱۲. داریم

$$\begin{aligned}
 y_p &= 10 e^{-2x} \frac{1}{(D-2)^2 + 4(D-2) + 5} \cos x \\
 &= 10 e^{-2x} \frac{1}{D^2 + 1} \cos x \quad (2)
 \end{aligned}$$

برای محاسبه $\frac{1}{D^2 + 1} \cos x$ ، با توجه به فرمول (۲۲)، $\frac{1}{D^2 + 1} e^{ix}$ را حساب کرده و قسمت حقیقی را به عنوان جواب انتخاب می‌کنیم.

$$= \frac{x}{4} (\sin 2x - i \cos 2x)$$

پس، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y_p = -\frac{x}{4} \cos 2x$$

مثال ۳. ۷۶. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^3 + 1)y = \cos x \quad (1)$$

را بنویسید.

حل. چون $F(D)$ شامل توانهای فرد D می‌باشد، لذا با توجه به فرمول (۲۱)، به‌جای معادله (۱)، معادله زیر را حل کرده،

$$(D^3 + 1)y = e^{ix} \quad (2)$$

و قسمت حقیقی جواب خصوصی (۲) را به‌عنوان جواب خصوصی (۱)، اختیار می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{D^3 + 1} e^{ix} \\
 &= \frac{1}{1 - i} e^{ix} \\
 &= \frac{1 + i}{2} (\cos x + i \sin x) \\
 &= \frac{1}{2} (\cos x - \sin x) + \frac{i}{2} (\cos x + \sin x)
 \end{aligned}$$

پس، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۱) به‌فرم زیر است:

$$y_p = \frac{1}{2} (\cos x - \sin x)$$

توجه ۴. اگر در معادله دیفرانسیل به‌فرم (۲۱)، $F(D)$ شامل توانهای فرد D باشد می‌توان $F(D)$ را به‌فرم زیر بیان کرد:

$$F(D) = F_1(D^2) + DF_2(D^2) \quad (23)$$

و جواب خصوصی معادله را از روش زیر بدست آورد

$$y_p = \frac{1}{F_1(D^2) + DF_2(D^2)} \cos ax$$

را بنویسید.

حل.

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{D^2 + 4} x^2 \sin x \\
 &= x \frac{1}{D^2 + 4} x \sin x - \frac{2D}{(D^2 + 4)^2} x \sin x \\
 &= x \left[x \frac{1}{D^2 + 4} \sin x - \frac{2D}{(D^2 + 4)^2} \sin x \right] - 2D \left[x \frac{1}{(D^2 + 4)^2} \sin x \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4D(D^2 + 4)}{(D^2 + 4)^4} \sin x \right] \\
 &= x \left[\frac{x}{3} \sin x - \frac{2}{9} \cos x \right] - 2D \left[\frac{x}{9} \sin x \right] + \frac{8D^2}{(D^2 + 4)^3} \sin x \\
 &= \frac{x^2}{3} \sin x - \frac{2}{9} x \cos x - \frac{2}{9} \sin x - \frac{2}{9} x \cos x - \frac{8}{27} \sin x \\
 &= \frac{x^2}{3} \sin x - \frac{4}{9} x \cos x - \frac{14}{27} \sin x
 \end{aligned}$$

مثال ۰۳. ۸۱. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 + 2D + 3)y = x e^{2x} \cos x$$

را بنویسید.

حل.

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{D^2 + 2D + 3} x e^{2x} \cos x \\
 &= e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 + 2(D+2) + 3} x \cos x \\
 &= e^{2x} \left[x \frac{1}{D^2 + 6D + 11} \cos x - \frac{2D+6}{(D^2 + 6D + 11)^2} \cos x \right] \\
 &= e^{2x} \left[x \frac{1}{10+6D} \cos x - 2(D+3) \left[\frac{1}{64+120D} \cos x \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(D+i)(D-i)} e^{ix} &= \frac{x e^{ix}}{2i} \\
 &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{i} (\cos x + i \sin x) \\
 &= \frac{x}{2} \sin x - i \frac{x}{2} \cos x
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{D^2 + 1} \cos x = \frac{x}{2} \sin x \quad (۲)$$

و با جایگذاری (۲) در (۲) داریم:

$$y_p = 5x e^{-2x} \sin x$$

قضیه ۰۳. ۱۵. اگر $F(D)$ یک چند جمله‌ای ابرتوری باشد و $u(x)$ تابع دلخواهی از x آنگاه.

$$(۲۴) \quad \frac{1}{F(D)} x u = x \frac{1}{F(D)} u - \frac{F'(D)}{(F(D))^2} u$$

اثبات. تمرین شماره ۱۸.

مثال ۰۳. ۷۹. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 + 9)y = x \cos x$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{1}{(D^2 + 9)} x \cos x$$

با توجه به فرمول (۲۴) داریم:

$$\begin{aligned}
 y_p &= x \frac{1}{D^2 + 9} \cos x - \frac{2D}{(D^2 + 9)^2} \cos x \\
 &= \frac{x}{8} \cos x + \frac{1}{32} \sin x
 \end{aligned}$$

مثال ۰۳. ۸۵. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2 + 4)y = x^2 \sin x$$

$$= e^{2x} \left\{ \left[x \frac{10-6D}{136} \cos x \right] - \frac{2}{8} (D+3) \left(\frac{8-15D}{289} \cos x \right) \right\}$$

$$= e^{2x} \left[\left(\frac{10}{136} x - \frac{39}{1156} \right) \cos x + \left(\frac{6}{136} x - \frac{37}{1156} \right) \sin x \right]$$

مجموعه مسائل ۷.۳

یا استفاده از روش اپراتورهای معکوس، جواب خصوصی معادلات زیر را تعیین کنید.

$$y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x} \quad -1$$

$$y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x} \quad -2$$

$$y'' + 3y' = 3xe^{-3x} \quad -3$$

$$y'' + 2y' + 2y = 1 + x \quad -4$$

$$y'' + y' + y = (x + x^2) e^x \quad -5$$

$$y'' - y = \cosh x \quad -6$$

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} \quad -7$$

$$y'' + y = 4x \cos x \quad -8$$

$$y'' + 4y = \cos^2 x \quad -9$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \quad -10$$

$$y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1 \quad -11$$

$$y'' - y = 4xe^x \quad -12$$

$$y'' - y = e^x \sin 2x \quad -13$$

$$y'' + y = -2 \sin x + 4x \cos x \quad -14$$

$$y'' + y = x^2 \sin x \quad -15$$

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x \quad -16$$

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2} \cos x \quad -17$$

۱۸. قضیه ۷.۳. ۱۵ را اثبات کنید.

۸.۳. روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در حالات خاص

در این بخش، در مورد حل معادلات مرتبه دوم که به فرم خطی با ضرایب ثابت بیان نمی‌شوند بحث می‌کنیم. یادآور می‌شویم که در حالت کلی قادر به حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نیستیم و فقط حالات خاصی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در صورت امکان، در هر حالت بحث را به مراتب بالاتر تعمیم خواهیم داد.

$$F(x, y'') = 0 \quad \text{(الف)}$$

اگر "y" بطور صریح برحسب x بیان شده یعنی $y'' = f(x)$ ، در این صورت یا دوبار انتگرالگیری جواب عمومی بدست می‌آید و چنانچه قادر نباشیم "y" را بطور صریح برحسب x بیان کنیم، از طریق حل "ب" استفاده خواهیم کرد.

مثال ۸.۲.۳. معادله دیفرانسیل

$$y'' = 2x \quad \text{را حل کنید.}$$

حل.

$$y' = x^2 + c_1$$

$$y = \frac{1}{3} x^3 + c_1 x + c_2$$

تذکره ۱. برای حل معادله دیفرانسیل $y^{(n)} = f(x)$ کافی است n بار انتگرال بگیریم و جواب عمومی به فرم

$$(2) \quad y = f \dots \int f(x) dx \dots dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

خواهد بود.

مثال ۳.۳.۸۳. معادله دیفرانسیل

$$y^{(4)} = \sin x$$

را حل کنید.

حل. کافی است چهار بار انتگرال بگیریم، داریم:

$$y = \sin x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

(ب) معادله دیفرانسیل فاقد تابع $F(x, y', y'') = 0$ با فرض $y' = p$ معادله تبدیل به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می شود زیرا،

$$(4) \quad y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = p'$$

با جایگذاری (۴) در (۳) داریم

$$(5) \quad F(x, p, p') = 0$$

که (۵) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می باشد که پس از حل (۵)، ابتدا p را بدست می آوریم

$$(6) \quad p = f(x, c_1)$$

و با انتگرالگیری از (۶)، جواب عمومی بدست می آید.

مثال ۳.۳.۸۴. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad x y'' + y' = 1, x > 0$$

را حل کنید.

حل. معادله فاقد تابع می باشد، و با انتخاب

$$(2) \quad y' = p, y'' = p'$$

معادله (۱) به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می شود.

$$(3) \quad x p' + p = 1$$

معادله (۳)، از نوع خطی مرتبه اول می باشد و

$$p = \frac{1}{x} \left[\int \frac{1}{x} x dx + c_1 \right]$$

$$= 1 + \frac{c_1}{x}$$

$$y' = 1 + \frac{c_1}{x}$$

که با انتگرالگیری، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) بدست می آید.

$$y = x + c_1 \ln x + c_2$$

مثال ۳.۳.۸۵. معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad y'' + x(y')^2 = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله فاقد تابع می باشد، با انتخاب

$$y' = p, y'' = p'$$

معادله (۱)، تبدیل به معادله دیفرانسیل مرتبه اول می شود.

$$p' + x p^2 = 0$$

$$(2) \quad \frac{dp}{p^2} + x dx = 0$$

معادله (۲) از نوع متغیرها از هم جدا می باشد.

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{2} x^2 = c$$

$$p = \frac{2}{x^2 - c_1^2}$$

$$(3) \quad y' = \frac{2}{x^2 - c_1^2}$$

و با انتگرالگیری از (۳)، جواب عمومی معادله (۱) به صورت زیر بدست می آید.

$$y = \frac{1}{c_1} \ln \frac{x - c_1}{x + c_1} + c_2 \cdot e_1 \neq 0$$

تذکر ۲. اگر معادله دیفرانسیل مرتبه n ، فاقد تابع باشد،

$$(۷) \quad F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

با انتخاب

$$y' = p, \quad y'' = p', \dots, y^{(n)} = p^{(n-1)}$$

تبدیل به معادله مرتبه $(n-1)$ می شود.

$$(۸) \quad F(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

و اگر معادله دیفرانسیل مرتبه n ، فاقد تابع و مشتق تا مرتبه $m-1$ باشد،

$$(۹) \quad F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

با انتخاب

$$y^{(m)} = p, \quad y^{(m+1)} = p', \dots, y^{(n)} = p^{(n-m)}$$

معادله (۹) تبدیل به معادله مرتبه $n-m$ می شود.

$$(۱۰) \quad F(x, p, p', \dots, p^{(n-m)}) = 0$$

مثال ۳. ۸۶. معادله دیفرانسیل

$$x y^{(5)} - y^{(4)} = 0 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. با فرض

$$y^{(4)} = p, \quad y^{(5)} = \frac{dp}{dx}$$

معادله (۱) تبدیل به معادله مرتبه یک از نوع متغیرها از هم جدا می شود.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} p$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c \Rightarrow p = cx$$

$$y^{(4)} = cx$$

و با چهار بار انتگرالگیری متوالی داریم:

$$y = c_1 x^5 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$$

مثال ۳. ۸۷. معادله دیفرانسیل

$$x y''' + y'' = x + 1 \quad (۱)$$

را حل کنید.

$$y'' = p, \quad y''' = p'$$

$$x p' + p = x + 1 \Rightarrow p' + \frac{1}{x} p = \frac{x+1}{x} \quad (۲)$$

معادله دیفرانسیل (۲)، خطی مرتبه اول می باشد و

$$p = \frac{1}{x} [\int (x+1) dx + c_1] \quad (۳)$$

$$= \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x}$$

و چون $y'' = p$ ، کافی است دو بار از (۳) انتگرال بگیریم.

$$y' = \int \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x} \right) dx + c_2'$$

$$= \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln x + c_2'$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln x + c_2' \right) dx + c_3$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x \ln x + c_2' x + c_3$$

(ب) معادله دیفرانسیل فاقد متغیر مستقل

$$(۱۱) \quad F(y, y', y'') = 0$$

با انتخاب $y' = p$ و $y'' = \frac{dp}{dy}$ به عنوان تابعی از y ، داریم

$$(۱۲) \quad y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

با جایگذاری (۱۲) در (۱۱) داریم،

$$(۱۳) \quad F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$$

که (۱۳) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می باشد.

تذکره ۳. این روش در مورد مراتب بالاتر هم صادق است.

مثال ۳.۸۸. معادله دیفرانسیل

$$y y'' + (y+1)y'^2 = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با جایگذاری $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ داریم:

$$y p \frac{dp}{dy} + (y+1)p^2 = 0$$

$$p \left(\frac{dp}{p} + \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy \right) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$$

$$\frac{dp}{p} + \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = 0 \quad (2)$$

معادله (۲)، مرتبه اول از نوع متغیرها از هم جدا می باشد و با انتگرالگیری داریم،

$$\ln p + \ln y = c - y$$

$$p y = c_1 e^{-y}$$

$$y \frac{dy}{dx} = c_1 e^{-y}$$

$$y e^y dy = c_1 dx$$

$$\int y e^y dy = \int c_1 dx + c_2$$

$$e^y (y-1) = c_1 x + c_2$$

مثال ۳.۸۹. منحنی $y(x)$ را طوری پیدا کنید که $y'' = 12\sqrt{y}$ و در مبدأ، مماس بر محور x ها باشد.

حل. ابتدا باید معادله دیفرانسیل $y'' = 12\sqrt{y}$ را حل کرد. برای حل فرض می کنیم،

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$$

پس معادله به فرم زیر درمی آید که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول از نوع متغیرها از هم جدا می باشد،

$$p \frac{dp}{dy} = 12 y^{1/2}$$

$$\int p dp = 12 \int y^{1/2} dy$$

$$\frac{1}{2} p^2 = 8 y^{3/2} + c$$

$$y'^2 = 16 y^{3/2} + c$$

چون منحنی در نقطه $(0,0)$ بر محور "x" ها مماس است پس،

$$0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$y' = 4 y^{3/4}$$

$$y^{-3/4} dy = 4 dx$$

$$4 y^{1/4} = 4x + c_1$$

منحنی از نقطه $(0,0)$ عبور می کند.

$$0 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

و جواب مطلوب

$$y = x^4$$

مثال ۳.۹۰. معادله دیفرانسیل

$$y'' - (y')^2 + y y'^3 = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. معادله فاقد متغیر می باشد و با انتخاب

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy} \quad (2)$$

معادله (۱) به یک معادله مرتبه اول تبدیل می شود.

$$p \frac{dp}{dy} - p^2 + y p^3 = 0$$

$$p \left(\frac{dp}{dy} - p + yp^2 \right) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$$

$$\frac{dp}{dy} - p = -yp^2 \quad (۳)$$

معادله (۳) برنولی می‌باشد، با تقسیم طرفین (۳) بر p^2 داریم،

$$p^2 \frac{dp}{dy} - p^{-1} = -y \quad (۴)$$

$$u = p^{-1}, \quad \frac{du}{dy} = -p^{-2} \frac{dp}{dy} \quad (۵)$$

با جایگذاری (۵) در (۴) داریم

$$\frac{du}{dy} + u = y \quad (۶)$$

معادله دیفرانسیل (۶)، از نوع خطی مرتبه اول است

$$u = \frac{1}{p} = e^{-y} \left[\int y e^y dy + c_1 \right] \\ = y - 1 + c_1 e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y - 1 + c_1 e^{-y}}$$

$$(y - 1 + c_1 e^{-y}) dy = dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 - y - c_1 e^{-y} = x + c_2$$

مثال ۹۱.۰۳. معادله دیفرانسیل

$$2y'' - y'^2 + 4 = 0$$

را حل کنید.

حل. این معادله، هم فاقد تابع و هم فاقد متغیر می‌باشد. در چنین حالتی بهتر است

از روش فاقد تابع استفاده شود. با انتخاب $y' = p$ و $y'' = p'$ داریم،

$$2p' - p^2 + 4 = 0$$

$$\frac{2dp}{p^2 - 4} = dx$$

$$\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{p-2}{p+2} = x + c$$

$$\frac{p-2}{p+2} = c_1 e^{2x}$$

$$p = \frac{2(1 + c_1 e^{2x})}{1 - c_1 e^{2x}}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{2c_1 e^{2x}}{1 - c_1 e^{2x}} \right)$$

$$dy = 2 \left(1 + \frac{2c_1 e^{2x}}{1 - c_1 e^{2x}} \right) dx$$

$$y = 2x - 2 \text{Ln}(1 - c_1 e^{2x}) + c_2$$

(ت) اگر معادله

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

نسبت به y و y' و y'' همگن باشد، یعنی داشته باشیم

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n F(x, y, y', y'')$$

با انتخاب

$$y = e^{\int z dx}$$

(۱۵)

(۱۴) تبدیل به معادله مرتبه اول می‌شود. (z تابعی مجهول از x می‌باشد.) *

مثال ۹۲.۰۴. معادله دیفرانسیل

این روش برای مراتب بالاتر هم صادق است.

$$y y'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. معادله (۱) نسبت به y و y' و y'' همگن می باشد. پس فرض می کنیم

$$y = e^{\int z dx}, \quad y' = z e^{\int z dx}, \quad y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx} \quad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$e^{2 \int z dx} [z^2 + z' - z^2 - 6x] = 0$$

$$z' = 6x \Rightarrow z = 3x^2 + c_1$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد

$$y = e^{\int (3x^2 + c_1) dx} + c_2$$

$$= c_2 e^{x^3 + c_1 x}$$

مثال ۹۳.۳. معادله دیفرانسیل

$$2y y'' - 3y'^2 = 4y^2 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. معادله (۱) نسبت به y و y' و y'' همگن می باشد. با جایگذاری

$$y = e^{\int z dx}, \quad y' = z e^{\int z dx}, \quad y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx} \quad (2)$$

در (۱) داریم

$$e^{2 \int z dx} [2z' + 2z^2 - 3z^2 - 4] = 0$$

$$2z' = 4 + z^2$$

$$\frac{2dz}{z^2 + 4} = dx$$

$$\int \frac{2dz}{z^2 + 4} = \int dx + c_1$$

$$\tan^{-1} \frac{z}{2} = x + c_1 \Rightarrow z = 2 \tan(x + c_1)$$

$$\int z dx = 2 \int \tan(x + c_1) dx + c_2'$$

$$= -2 \ln \cos(x + c_1) + C_2'$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y' = e^{-2 \ln \cos(x + c_1) + c_2'}$$

$$= \frac{C_2}{\cos^2(x + C_1)}$$

(ث) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به فرم

$$f(x)y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = Q(x) \quad (16)$$

را کامل گوئیم، اگر بتوان (۱۶) را به فرم زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx} [f(x)y' + (f_1(x) - f'(x))y] = Q(x) \quad (17)$$

در ضمن شرط لازم و کافی برای آنکه (۱۶) کامل باشد، آن است که

$$f''(x) - f_1'(x) + f_2(x) = 0 \quad (18)$$

مثال ۹۴.۳. نشان دهید معادله دیفرانسیل

$$(x^2 - 2x)y'' + 4(x - 1)y' + 2y = e^{2x} \quad (1)$$

کامل است و سپس آنرا حل کنید.

حل. ابتدا شرط (۱۸) را بررسی می کنیم

$$f''(x) = 2, \quad f_1'(x) = 4$$

$$f'' - f_1' + f_2 = 2 - 4 + 2 = 0$$

پس، معادله (۱) کامل است. لذا به فرم (۱۷) نوشته می شود.

$$\frac{d}{dx} [(x^2 - 2x)y' + 2(x - 1)y] = e^{2x}$$

$$(x^2 - 2x)y' + 2(x - 1)y = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1$$

صورت کلی این معادله به فرم

$$(19) \quad x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

یا

$$(20) \quad (ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = f(x)$$

که به ترتیب با استفاده از تغییر متغیرهای $x = e^z$ و $ax+b = e^z$ تبدیل به معادله خطی مرتبه n ، با ضرایب ثابت می‌شوند. درستی مطلب را برای مرتبه دوم اثبات می‌کنیم و طریقه حل این نوع معادلات را ارائه می‌دهیم.

$$(21) \quad x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x)$$

حال نشان می‌دهیم که (۲۱) با استفاده از تغییر متغیر زیر تبدیل به معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت می‌شود.

$$x = e^z \Rightarrow z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$(22) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2}$$

$$(23) \quad = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right)$$

با جایگذاری (۲۲) و (۲۳) در (۲۱) داریم:

$$(24) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + (a_1 - 1) \frac{dy}{dz} + a_2 y = f(e^z)$$

معادله (۲۴) یک معادله خطی با ضرایب ثابت است و معادله مفسر به صورت زیر می‌باشد:

$$(25) \quad t^2 + (a_1 - 1)t + a_2 = 0$$

حال اگر معادله مفسر دارای دو ریشه حقیقی متمایز $t_1 \neq t_2$ باشد، در این صورت

$$y_1 = e^{t_1 z} = e^{t_1 \ln x} = x^{t_1}$$

$$y_2 = e^{t_2 z} = e^{t_2 \ln x} = x^{t_2}$$

$$(2) \quad y' + \frac{2x-2}{x^2-2x} y = \frac{e^{2x}}{2(x^2-2x)} + \frac{c_1}{x^2-2x}$$

معادله (۲)، خطی مرتبه اول می‌باشد و جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y = \frac{1}{x^2-2x} \left[\int \left(\frac{e^{2x}}{2} + c_1 \right) dx + c_2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{2x}}{x^2-2x} + \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x^2-2x}$$

مثال ۳.۹۵. نشان دهید معادله دیفرانسیل

$$x y'' - y' \cos x + y \sin x = 0, \quad x > 0 \quad (1)$$

کامل است و سپس آنرا حل کنید.

حل. ابتدا شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم.

$$f'' = 0, \quad f_1' = \sin x$$

$$f'' - f_1' + f_2 = 0 - \sin x + \sin x = 0$$

لذا معادله (۱) کامل بوده و به فرم (۱۷) نوشته می‌شود.

$$\frac{d}{dx} [x y' - (\cos x + 1) y] = 0$$

$$x y' - (\cos x + 1) y = c_1$$

$$y' - \frac{\cos x + 1}{x} y = \frac{c_1}{x} \quad (2)$$

معادله (۲) خطی مرتبه اول است و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = \frac{1}{F(x)} \left[c_1 \int \frac{F(x)}{x} dx + c_2 \right], \quad F(x) = e^{-\int \frac{\cos x + 1}{x} dx}$$

(ج) معادله کُنی یا معادله اویلر*

و جواب عمومی معادله همگن متناظر به فرم زیر می باشد:

$$y_h = c_1 x^t + c_2 x^{t^2} \quad (26)$$

و اگر معادله، مفسر دارای ریشه مضاعف حقیقی t باشد.

$$y_1 = e^{tx} = e^{t \ln x} = x^t$$

$$y_2 = z e^{tx} = e^{t \ln x} \ln x = x^t \ln x$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر را به فرم زیر خواهیم داشت:

$$y_h = (c_1 + c_2 \ln x) x^t \quad (27)$$

و اگر معادله، مفسر دارای ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد، جواب عمومی معادله همگن متناظر به فرم زیر می شود:

$$y_h = e^{pz} (C_1 \cos qz + C_2 \sin qz) \\ = x^{pz} (C_1 \cos(q \ln x) + C_2 \sin(q \ln x)) \quad (28)$$

و برای بدست آوردن جواب عمومی معادله (۲۱) با توجه به $f(e^z)$ ، y_p را با استفاده از روشهای گفته شده حساب می کنیم و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = y_h + y_p$$

تذکره ۴. می توان برای پیدا کردن جواب عمومی معادله همگن متناظر (۲۱) یعنی

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \quad (29)$$

یک جواب را به فرم $y = x^t$ در نظر گرفت؛ بدین ترتیب که $y = x^t$ و مشتقات آن را در (۲۹) جایگذاری می کنیم

$$y = x^t, y' = t x^{t-1}, y'' = t(t-1)x^{t-2}$$

$$x^t [t^2 + (a_1 - 1)t + a_2] = 0$$

پس $y = x^t$ می تواند یک جواب (۲۹) باشد. اگر t ریشه معادله کمکی زیر

$$t^2 + (a_1 - 1)t + a_2 = 0 \quad (30)$$

انتخاب شده. همانطور که ملاحظه می کنید (۳۰) همان (۲۵) می باشد.

حال اگر (۳۰) دارای دو ریشه متمایز حقیقی $t_1 \neq t_2$ باشد؛ در این صورت

$$y_1 = x^{t_1}, y_2 = x^{t_2}$$

$$y = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2} \quad (31)$$

و اگر (۳۰) دارای ریشه مضاعف حقیقی t باشد؛ در این صورت $y_1 = x^t$ و برای بدست آوردن جواب دوم، از روش تغییر پارامتر استفاده می کنیم. یعنی جواب دوم را به فرم $y_2 = u(x)y_1$ در نظر می گیریم (این روش در قسمت بعد گفته خواهد شد) و با جایگذاری y_2 ، y_2' و y_2'' در (۲۹)، $u(x)$ را حساب می کنیم و جواب دوم به فرم $y_2 = x^t \ln x$ خواهد بود و جواب عمومی (۲۹) عبارت است از:

$$y = (c_1 + c_2 \ln x) x^t$$

و اگر (۳۰) دارای ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد؛ در این صورت

$$y_1 = x^{p+iq}, y_2 = x^{p-iq} \quad (32)$$

و

$$y = x^p (c_1 x^{iq} + c_2 x^{-iq})$$

$$= x^p (c_1 e^{iq \ln x} + c_2 e^{-iq \ln x}) \quad (33)$$

با استفاده از فرمول اولر و انتخاب

$$c_1 = \frac{1}{2}(A - iB), c_2 = \frac{1}{2}(A + iB)$$

و جایگذاری در (۳۳) داریم:

$$y = x^p \left(\frac{1}{2}(A - iB)(\cos(q \ln x)) + \frac{1}{2}(A + iB)(\sin(q \ln x)) \right)$$

$$= x^p (A \cos(q \ln x) + B \sin(q \ln x)) \quad (34)$$

مثال ۳.۹۶. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله کمکی را طبق فرمول (۳۰) تشکیل می دهیم و ریشه های آنرا حساب می کنیم

$$t^2 + 0t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -1$$

پس معادله کمکی دارای دو ریشه حقیقی متمایز می باشد و مطابق فرمول (۳۱)، جواب

عمومی به فرم زیر است:

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1}$$

مثال ۳. ۹۷. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - x y' + y = 0$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله کمکی را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم.

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 1$$

معادله کمکی دارای ریشه مضاعف می‌باشد و با توجه به فرمول (۳۲)، جواب عمومی به‌فرم زیر است:

$$y = (c_1 + c_2 \ln x) x$$

مثال ۳. ۹۸. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله کمکی را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم.

$$t^2 + 2t + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm 2i$$

و مطابق فرمول (۳۴) جواب عمومی را به‌فرم زیر خواهیم داشت:

$$y = x^{-1} (A \cos(2 \ln x) + B \sin(2 \ln x))$$

مثال ۳. ۹۹. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = \ln^2 x - \ln x^2 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با استفاده از تغییر متغیر $x = e^z$ و با توجه به فرمول (۳۴) داریم.

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - 3 \frac{dy}{dz} + 2y = z^2 - 2z \quad (2)$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر (۲) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y_h = c_1 e^z + c_2 e^{2z}$$

$$= c_1 x + c_2 x^2$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله (۲)، از روش ضرایب نامعینی استفاده کرده.

$$y_p = Az^2 + Bz + C$$

y_p و y_p' و y_p'' را در (۲) جایگذاری می‌کنیم و ضرایب را بدست می‌آوریم و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4}$$

مثال ۳. ۱۰۰. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^3 \cos x \quad (1)$$

را حل کنید.*

حل. ابتدا معادله را بر ضریب y'' تقسیم نموده و از روش عمومی (روش تغییر پارامترها) استفاده می‌کنیم.

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x \cos x \quad (2)$$

حال جواب عمومی معادله همگن متناظر را بدست می‌آوریم

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0 \Rightarrow x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0 \quad (3)$$

(۳) یک معادله دیفرانسیل کنشی می‌باشد و معادله کمکی را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم.

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2$$

$$y_h = c_1 x + c_2 x^2$$

* به‌روش حل این مثال دقت بیشتری شود چون با این روش مسأله ساده‌تر حل می‌شود. البته می‌توان از روشی هم که در مثال قبل گفته شد مسأله را حل نمود.

با فرض

$$y_1 = x, y_2 = x^2$$

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$y_p = -x \int \frac{x^2 (x \cos x)}{x^2} dx + x^2 \int \frac{x (x \cos x)}{x^2} dx$$

$$= -x^2 \sin x - x \cos x + x^2 \sin x = -x \cos x$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 x + c_2 x^2 - x \cos x.$$

مثال ۱۰۳.۱۰۱. معادله دیفرانسیل

$$(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 2 \cos \ln(1+x) \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با استفاده از تغییر متغیر زیر، معادله را تبدیل به یک معادله با ضرایب ثابت می کنیم

$$1+x = e^z \Rightarrow z = \ln(1+x), \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x} \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right)$$

با جایگذاری مقادیر بالا در (۱) داریم،

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + y = 2 \cos z \quad (2)$$

$$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$$

$$y_h = C_1 \cos z + C_2 \sin z$$

و با استفاده از روش ضرایب نامعین

$$y_n = z(A \cos z + B \sin z)$$

برای تعیین ضرایب A و B ، y_p'' و y_p' را در (۲) قرار می دهیم. جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = C_1 \cos \ln(1+x) + C_2 \sin \ln(1+x) + \ln(1+x) \sin \ln(1+x)$$

(ج) در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر

$$(25) \quad y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f_3(x)$$

که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابعی پیوسته هستند، و یک جواب خصوصی معادله همگن متناظر موجود باشد، در این صورت با استفاده از روش تغییر پارامتر، جواب عمومی را به فرم $y = u(x)y_1$ در نظر می گیریم و برای تعیین $u(x)$ و y' و y'' را در (۲۵) جایگذاری می کنیم.

$$(26) \quad y = u y_1, \quad y' = u' y_1 + u y_1', \quad y'' = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$$

$$(27) \quad u(y_1'' + y_1' f_1 + y_1 f_2) + u'(2y_1' + y_1 f_1) + u'' y_1 = f_3$$

برانتز اول سمت چپ عبارت بالا صفر است (چون y_1 یک جواب معادله همگن متناظر می باشد) و با تقسیم طرفین (۲۷) بر y_1 داریم:

$$(28) \quad u'' + u' \left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1 \right) = \frac{f_3}{y_1}$$

و با فرض

$$u' = p, \quad u'' = p'$$

$$(29) \quad p' + p \left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1 \right) = \frac{f_3}{y_1}$$

(۳۹) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشد که از حل آن p بدست می آید و گرفتن انتگرال از p بدست $u(x)$ می آید. و اگر $f_3(x) \equiv 0$ باشد، آنگاه (۳۹) به فرم زیر می باشد:

$$(40) \quad p' + p \left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1 \right) = 0$$

$$\frac{p'}{p} + \frac{2y_1'}{y_1} = -f_1$$

$$\ln p + \ln y_1^2 = -\int f_1 dx$$

$$p = \frac{1}{y_1^2} e^{\int f_1 dx}$$

$$(۴۱) \quad u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{\int f_1 dx} dx$$

تذکره ۰۵. وقتی (۳۵) همگن باشد می توان (۴۱) را بدون منظور کردن ثابتهای انتگرالگیری بدست آورد. و در این صورت $y_2 = u(x)y_1$ و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال ۰۳. ۱۰۲. معادله دیفرانسیل

$$y'' - y' + y e^{2x} = x e^{2x} - 1 \quad (۱)$$

را حل کنید، اگر $y_1 = \sin e^x$ باشد.

حل. جواب عمومی به فرم $y = u(x) \sin e^x$ می باشد و برای محاسبه u ، طبق فرمول (۳۸) داریم:

$$u'' + u' \left(\frac{2e^x \cos e^x}{\sin e^x} - 1 \right) = \frac{x e^{2x} - 1}{\sin e^x} \quad (۲)$$

و با فرض $u' = p'$ ، $u' = p$

$$p' + p \left(\frac{2e^x \cos e^x}{\sin e^x} - 1 \right) = \frac{x e^{2x} - 1}{\sin e^x} \quad (۳)$$

(۳) یک معادله خطی مرتبه اول می باشد و

$$p = e^{-2 \int \frac{\cos e^x}{\sin e^x} dx} \left[\int \frac{x e^{2x} - 1}{\sin e^x} e^{2 \int \frac{\cos e^x}{\sin e^x} dx} dx + c_1 \right]$$

$$= \frac{e^x}{\sin^2 e^x} \left[\int (x e^x - e^x) \sin e^x dx + c_1 \right]$$

$$= \frac{e^x}{\sin^2 e^x} \left[-x \cos e^x + \frac{\sin e^x}{e^x} + c_1 \right]$$

$$= \frac{-x e^x \cos e^x}{\sin^2 e^x} + \frac{1}{\sin e^x} + \frac{c_1 e^x}{\sin^2 e^x}$$

۳

$$u(x) = \int \frac{-x e^x \cos e^x}{\sin^2 e^x} dx + \int \frac{dx}{\sin e^x} + c_1 \int \frac{e^x}{\sin^2 e^x} dx + c_2$$

$$= \frac{x}{\sin e^x} - \int \frac{dx}{\sin e^x} + \int \frac{dx}{\sin e^x} + c_1 \frac{\cos e^x}{\sin e^x} + c_2$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = x + C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x.$$

در حالات زیر قادر هستیم $y_1(x)$ را تعیین کنیم

ا. اگر $f_1 + x f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = x$

ب. اگر $1 + f_1 + f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = e^x$

پ. اگر $1 - f_1 + f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = e^{-x}$

ت. اگر $a^2 + a f_1 + f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = e^{ax}$ (یک عدد می باشد)

مثال ۰۳. ۱۰۳. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را بر ضریب y'' تقسیم می کنیم.

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = 0 \quad (۲)$$

$y_1 = x$ یک جواب معادله (۲) می باشد، زیرا

$$f_1 + x f_2 = -\frac{x+2}{x} + \frac{x+2}{x} = 0$$

و چون معادله (۱) همگن می باشد، طبق فرمول (۴۱)، $u(x)$ را ابتدا می کنیم

$$u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{\int (a + \frac{2}{x}) dx} dx.$$

$$= \int \frac{1}{x^2} x^2 e^x dx$$

$$= e^x$$

و $y_2 = x e^x$ و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 x + c_2 x e^x$$

مثال ۳.۱۰۴. معادله دیفرانسیل

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را بر $(1+x^2)$ تقسیم می کنیم

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = \frac{2}{1+x^2} \quad (2)$$

زیرا $y_1 = x$ یک جواب معادله همگن متناظر (۲) می باشد. زیرا

$$f_1 + x f_2 = -\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

و جواب عمومی به فرم $y = x u(x)$ می باشد. و برای محاسبه $u(x)$ مطابق فرمول (۳۹)، ابتدا p را محاسبه می کنیم و سپس با گرفتن انتگرال از p ، $u(x)$ بدست می آید.

$$p' + p \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \right) = \frac{2}{x(1+x^2)}$$

$$p = \frac{1+x^2}{x^2} \left[\int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2}{x(1+x^2)} dx + c_1 \right]$$

$$= \frac{1+x^2}{x^2} \left[-\frac{1}{1+x^2} + c_1 \right]$$

$$= -\frac{1}{x^2} + c_1 \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$u = -\int \frac{dx}{x^2} + c_1 \int \frac{1+x^2}{x^2} dx + c_2$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{c_1}{x} + c_1 x + c_2$$

و $y = x u(x)$

$$y = 1 - c_1 + c_1 x^2 + c_2 x$$

مثال ۳.۱۰۵. معادله دیفرانسیل

$$(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را بر $(x+1)$ تقسیم می کنیم

$$y'' - \frac{2x+3}{x+1} y' + \frac{x+2}{x+1} y = 0 \quad (2)$$

زیرا $y_1 = e^x$

$$1 + f_1 + f_2 = 1 - \frac{2x+3}{x+1} + \frac{x+2}{x+1} = 0$$

و $y_2 = e^x u(x)$ ، برای محاسبه $u(x)$ از فرمول (۴۱) استفاده می کنیم

$$u(x) = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \frac{2x+3}{x+1} dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{e^{2x}} e^{2x + \ln(x+1)} dx$$

$$= \int (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$y_2 = \frac{e^x}{2} (x+1)^2$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x (x+1)^2$$

مثال ۳.۱۰۶. معادله دیفرانسیل

$$y'' - \frac{3x+4}{x+1} y' + \frac{3}{x+1} y = \frac{3x+2}{x+1} e^{3x}$$

را حل کنید.

حل.

$$a^2 + af_1 + f_2 = a^2 - \frac{3ax + 4a}{x+1} + \frac{3}{x+1}$$

$$= \frac{a^2x + a^2 - 3ax - 4a + 3}{x+1}$$

شرط آنکه عبارت فوق برابر صفر باشد، آن است که صورت مساوی صفر باشد.

$$x(a^2 - 3a) + a^2 - 4a + 3 = 0$$

حال باید a را طوری پیدا کنیم که به ازای آن هم ضرب x صفر شود و هم مقدار ثابت صفر شود.

$$a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a = 0, a = 3$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3, 1$$

پس $y_1 = e^{3x}$ و $y_2 = e^{3x}u(x)$ که برای محاسبه $u(x)$ ، ابتدا p را از فرمول (۳۹) بدست می آوریم

$$p' + p\left(6 - \frac{3x+4}{x+1}\right) = \frac{3x+2}{x+1}$$

$$p = e^{-3x}(x+1) \left[\int \frac{3x+2}{(x+1)^2} e^{3x} dx + c_1 \right]$$

$$= e^{-3x}(x+1) \left[\int \frac{3}{x+1} e^{3x} dx - \int \frac{e^{3x}}{(x+1)^2} dx + c_1 \right]$$

$$= 1 + c_1 e^{-3x}(x+1)$$

$$u = \int (1 + c_1 e^{-3x}(x+1)) dx + c_2$$

$$= x + \frac{c_1}{9} (-4 - 3x) e^{-3x} + c_2$$

و جواب عمومی:

$$y = e^{3x}(x + c_2) + \frac{c_1}{9} (-4 - 3x)$$

(ح) جواب به فرم $y = uv$

اگر در معادله، دیفرانسیل به فرم

$$(۴۲) \quad y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$$

 y_1 بسادگی محاسبه نشود، جواب عمومی را به فرم $y = uv$ در نظر می گیریم

$$(۴۳) \quad y = uv, y' = u'v + uv', y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

با جایگذاری (۴۳) در (۴۲) داریم

$$(۴۴) \quad v(u'' + f_1u' + f_2u) + v'(2u' + f_1u) + v''u = f_3$$

حال می خواهیم شرایط ساده کننده ای برای حل (۴۴) بسازیم. ضرب v را نمی توانیم صفر اختیار کنیم، زیرا در این صورت قادر به حل ضرب v نیستیم و ضرب v'' را هم نمی توان صفر اختیار کرد زیرا با انتخاب $u = 0$ ، جواب صفر می شود. پس باید ضرب v' را صفر اختیار کنیم.

$$2u' + f_1u = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} = -\frac{f_1}{2}$$

$$\ln u = -\frac{1}{2} \int f_1 dx$$

$$(۴۵) \quad u = e^{-\frac{1}{2} \int f_1 dx}$$

حال این u و u' و u'' را در (۴۴) جایگذاری می کنیم

$$u' = -\frac{1}{2} f_1 u, u'' = -\frac{1}{2} f_1' u + \frac{1}{4} f_1^2 u$$

$$(۴۶) \quad v\left(f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2\right) + v'' = \frac{f_3}{u}$$

و در حالات زیر می توانیم (۴۶) را حل نموده و v را بدست آوریم۱. اگر $f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2 = a$ ، در این صورت (۴۶) تبدیل به یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می شود.۲. اگر $f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2 = \frac{a}{x^2}$ ، در این صورت (۴۶) تبدیل به یک معادله کتی می شود.

اگر $f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1'' = \frac{a}{(\alpha x + \beta)^2}$ در این صورت (۴۶) تبدیل به یک معادله کتی می شود.

پس ابتدا عبارت $f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1''$ را تشکیل می دهیم، چنانچه این مقدار برابر با a یا $\frac{a}{x^2}$ یا $\frac{a}{(\alpha x + \beta)^2}$ باشد، آنگاه u را از فرمول (۴۵) بدست آورده و سپس v را از یکی از معادلات زیر بدست می آوریم.

$$(47) \quad v'' + av = \frac{f_3}{u}$$

$$(48) \quad x^2 v'' + av = \frac{f_3}{u} x^2$$

$$(49) \quad (\alpha x + \beta)^2 v'' + av = \frac{f_3}{u} (\alpha x + \beta)^2$$

تذکره ۶. u را بدون ثابت انتگرالگیری محاسبه می کنیم و در محاسبه v دو پارامتر منظور می شود.

مثال ۳. ۱۰۷. معادله دیفرانسیل

$$y'' - 2y' \tan x - 10y = 0$$

را حل کنید.

حل.

$$f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1'' = -10 + 1 + \tan^2 x - \tan^2 x = -9$$

$$u = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

و با توجه به فرمول (۴۷) داریم.

$$v'' - 9v = 0$$

$$t^2 - 9 = 0 \Rightarrow t = \pm 3$$

$$v = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

و جواب عمومی به فرم $y = uv$ می باشد:

$$y = \frac{1}{\cos x} (c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x})$$

مثال ۳. ۱۰۸. معادله دیفرانسیل

$$y'' - \frac{2}{x} y' + (1 + \frac{2}{x^2}) y = x e^x$$

را حل کنید.

حل.

$$f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1'' = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1$$

$$u = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$$

و با توجه به فرمول (۴۷) داریم:

$$v'' + v = e^x$$

$$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$$

$$v_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$v_p = \frac{1}{2} e^x$$

$$v = v_h + v_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

و جواب عمومی به فرم $y = uv$ می باشد:

$$y = x (C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x)$$

مثال ۳. ۱۰۹. معادله دیفرانسیل

$$y'' + x y' + (\frac{x^2 + 1}{2x}) y = 0$$

- ۰۵ $x y'' = y' \ln \frac{y'}{x}$
- ۰۶ $y'' + y' \tan x = \sin 2x$
- ۰۷ $x y'' + y' = y'^2$
- ۰۸ $y'' + y'^2 = 0$
- ۰۹ $x y'' - y' = x^2 e^x$
- ۱۰ $y' y'' = -x$
- ۱۱ $x y'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0$
- ۱۲ $2y y'' = 1 + y'^2$
- ۱۳ $y y'' = -y'^2$
- ۱۴ $y y'' = y^2 y' + y'^2$
- ۱۵ $(y-1)y'' = 2y'^2$
- ۱۶ $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$
- ۱۷ $2y y'' - 3y'^2 = 4y^2$
- ۱۸ $y y'' + y'^2 = x$

را حل کنید .

حل .

$$f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1'' = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4x^2}$$

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int x dx} = e^{-\frac{1}{4} x^2}$$

و با توجه به فرمول (۴۸) داریم .

$$x^2 v'' + \frac{1}{4} v = 0$$

که یک معادله کشی می باشد . معادله کمکی را تشکیل می دهیم و ریشه های آنرا حساب می کنیم .

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$$

$$v = (c_1 + c_2 \ln x) x^{1/2}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد :

$$y = x^{1/2} e^{-\frac{x^2}{4}} (c_1 + c_2 \ln x)$$

مجموعه مسائل ۸.۳

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید .

۰۱ $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$

۰۲ $y'' = x + \sin x$

۰۳ $y^{(4)} = \frac{1}{x}$

۰۴ $x^2 y'' = y'^2$

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2 + x - 1)e^{2x} \quad \cdot ۳۴$$

$$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0 \quad \cdot ۳۵$$

$$y'' - 4xy' + 4x^2y = xe^{x^2} \quad \cdot ۳۶$$

$$x^2y'' + (x-4x^2)y' + (1-2x+4x^2)y = (x^2 - x + 1)e^x \quad \cdot ۳۷$$

$$x^2y'' = y - xy' \quad \cdot ۱۹$$

$$x^2yy'' = (y - xy')^2 \quad \cdot ۲۰$$

$$y'' + xy' + y = 0 \quad \cdot ۲۱$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad \cdot ۲۲$$

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0 \quad \cdot ۲۳$$

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0 \quad \cdot ۲۴$$

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2 \quad \cdot ۲۵$$

$$(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0 \quad \cdot ۲۶$$

$$x^2y'' - 6y = 12 \ln x \quad \cdot ۲۷$$

$$x^2y'' + xy' - y = 4 \quad \cdot ۲۸$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4 \quad \cdot ۲۹$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{1}{x^2} \quad \cdot ۳۰$$

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = \frac{1-x^2}{x} \quad \cdot ۳۱$$

$$(x^2+4)y'' - 2xy' + 2y = 8 \quad \cdot ۳۲$$

$$(x \sin x + \cos x)y'' - x \cos x y' + y \cos x = x \quad \cdot ۳۳$$

فصل چهارم

۴

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سربها

در فصل گذشته حالات بسیار خاصی از معادلات خطی با ضرایب متغیر را بررسی نمودیم؛ و اکنون در این فصل به بحث گسترده‌تری درباره این نوع معادلات می‌پردازیم و بیشترین صحبت را به حل معادله‌ای به شکل

$$(1) \quad f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$$

که f_1 ، f_2 و f_3 سه چندجمله‌ای بر حسب x می‌باشند، اختصاص می‌دهیم تا تواناییهای لازم برای حل دو معادله بسیار مهم:

$$(2) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad \text{معادله لژاندر}$$

$$(3) \quad x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \text{معادله بسل}$$

را کسب کرده باشیم.

بدیهی است روشی که ارائه می‌شود، برای حل معادلات با ضرایب ثابت هم می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد؛ با این تفاوت که بسیار مشکلتر از روش گفته شده در فصل قبل خواهد بود. در این روش، جواب را به‌صورت سری توانی در نظر می‌گیریم و به‌همین علت هم آن را روش سری توانی می‌نامیم. لازم می‌دانیم قبل از آنکه به بحث در مورد حل معادلات به‌کمک سری توانی بپردازیم، بخش اول را به بحث مختصری درباره سربها اختصاص دهیم.

۱۰۴ سری

تعریف ۱۰۴. مجموع جمله‌های یک دنباله بی‌نهایت را یک سری می‌نامیم

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

u_1, u_2, \dots, u_n و \dots را جمله‌های سری و u_n را جمله عمومی سری می‌گوییم. اگر تمام جمله‌های یک سری اعداد باشند، چنین سری را یک سری عددی، و اگر جمله‌های سری توابعی از x باشند، سری را سری تابع می‌نامیم.

مثال ۱۰۴. سری زیر یک سری عددی می‌باشد

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

مثال ۲۰۴. سری زیر یک سری تابع می‌باشد

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

مطالعه خود را با سری عددی شروع می‌کنیم و سپس در مورد سری تابع بحث خواهیم کرد. همگرایی و واگرایی سریها

مجموع n جمله اول سری (۱) را با S_n نمایش می‌دهیم

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

اگر حد S_n وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند موجود و برابر L باشد، آنگاه سری را همگرا می‌گوییم و L را مجموع سری (۱) می‌نامیم و اگر حد S_n وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند موجود نباشد، سری را واگرا می‌گوییم.

مثال ۳۰۴. سری زیر را بررسی می‌کنیم

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

می‌دانیم که یک سری هندسی با قدرنسبت q می‌باشد و

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

از طرفی می‌دانیم در یک سری هندسی

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

که a جمله اول می‌باشد، پس

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2$$

پس سری همگرا می‌باشد.

مثال ۴۰۴. سری

$$t + t + \dots + t + \dots, \quad t \neq 0$$

را بررسی می‌کنیم،

$$s_n = nt$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} nt = \infty$$

و سری واگرا می‌باشد.

مثال ۵۰۴. سری

$$1 - t + t - t + \dots + (-1)^{n-1} t + \dots$$

را بررسی می‌کنیم

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر زوج باشد} \\ t & \text{اگر فرد باشد} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ موجود نیست}$$

و سری واگرا می‌باشد.

قضیه ۱۰۴. اگر تعدادی از جمله‌های یک سری را حذف کنیم، نوع سری تغییر نمی‌کند.

قضیه ۳.۴. اگر تمام جمله‌های یک سری را در عددی مخالف صفر ضرب کنیم، نوع سری تغییر نمی‌کند یعنی دو سری یا جمله‌های عددی u_n و au_n هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند.

قضیه ۳.۴. اگر دو سری زیر به ترتیب به L_1 و L_2 همگرا باشند.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

آنگاه سری‌های زیر به ترتیب به $L_1 + L_2$ و $L_1 - L_2$ همگرا می‌باشند.

$$\begin{aligned} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots \\ (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_n - v_n) + \dots \end{aligned}$$

قضیه ۴.۴. (شرط لازم همگرایی)

اگر سری $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

اثبات. فرض کنید S_n مجموع n جمله اول سری و S_{n-1} مجموع $n-1$ جمله اول سری باشد، پس

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

و چون سری همگراست، لذا وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند S_n و S_{n-1} هر دو به سمت L میل می‌کنند و داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= L - L = 0 \end{aligned}$$

نوجه ۱. اگر در یک سری $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ باشد، آن سری واگرا می‌باشد. و اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ باشد دلیل بر همگرایی سری نیست.

مثال ۴.۶. نوع سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+4}$$

حل.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+4} \\ &= \frac{3}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

پس سری واگرا می‌باشد.

برای تعیین نوع یک سری، از دستوره‌های زیر استفاده می‌کنیم:

دستور دالامبر. در سری با جمله‌های مثبت

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

نسبت جمله $n+1$ به جمله n ام را تشکیل می‌دهیم و حد این نسبت را وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم، اگر این حد موجود و برابر L باشد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$$

آنگاه

(آ) اگر $0 < L < 1$ ، سری همگرا می‌باشد.

(ب) اگر $L > 1$ ، سری واگرا می‌باشد.

(پ) اگر $L = 1$ ، از این دستور نمی‌توان نوع سری را مشخص کرد.

مثال ۴.۷. نوع سری

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

را مشخص کنید.

حل.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)2^n}{2^{n+1}(2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

پس سری همگرا می باشد .

مثال ۰۸ . ۰۴ نوع سری

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

را مشخص کنید .

حل

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

پس سری همگرا می باشد .

دستور کوشی . در سری ؛ جمله های مثبت

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ریشه n ام جمله عمومی را حساب کرده و سپس حد آن را ، وقتی n بدست بی نهایت میل می کند ، پیدا می کنیم ، اگر این حد موجود و برابر L باشد .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$$

آنگاه

(۱) اگر $0 \leq L < 1$ سری همگرا می باشد .

(-) اگر $L > 1$ ، سری واگرا می باشد

(۲) اگر $L = 1$ ، از این دستور نمی توان نوع سری را مشخص کرد .

مثال ۰۹ . ۰۴ نوع سری

$$\frac{2}{1} + (\frac{3}{3})^2 + (\frac{4}{5})^3 + \dots + (\frac{n+1}{2n-1})^n + \dots$$

را تعیین کنید .

حل .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$$

پس سری همگرا می باشد .

تعریف ۰۲ . ۰۴ . سری متناوب ، سری ای می باشد که جمله های آن یکی در میان مثبت و منفی است .

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots , u_i > 0$$

قضیه ۰۵ . ۰۴ . (قضیه لایبنتز*) اگر در یک سری متناوب

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n > u_{n+1} > \dots$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

آنگاه سری همگرا می باشد و مقدار آن از جمله اول بیشتر نیست .

مثال ۰۱۰ . ۰۴ نوع سری

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

را مشخص کنید .

حل . سری (۱) متناوب می باشد و

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \dots$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

پس سری همگراست .

مثال ۰۱۱.۰۴ . نوع سری

$$1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5} + \dots \quad (1)$$

را مشخص کنید .

حل . سری (۱) متناوب است و

$$1 > \frac{2}{7} > \frac{3}{13} > \dots$$

ولی

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} \\ &= \frac{1}{6} \neq 0 \end{aligned}$$

پس سری واگرا می باشد .

سری با جمله‌های مثبت و منفی

اگر در یک سری ، هم جمله مثبت و هم جمله منفی داشته باشیم ، آن را یک سری با جمله‌های مثبت و منفی می‌گوئیم . و چون برای مثبت و منفی بودن ، جمله‌های ترتیبی نداریم ، لذا برای همگرایی سری نمی‌توان دستوری بیان کرد که شامل کلیه حالات مختلف آن باشد . لذا فقط شرط کافی برای همگرایی این سری را بیان می‌کنیم .

قضیه ۰۴ . ۶ . شرط کافی برای همگرایی سری با جمله‌های مثبت و منفی آن است که سری حاصل از قدر مطلق جمله‌ها ، همگرا باشد .

تذکر ۰۱ . این شرط لازم نیست ، یعنی سربهایی با جمله‌های مثبت و منفی وجود دارند که همگرا هستند ولی سری حاصل از قدر مطلق جمله‌ها ، واگرا می باشد .

تعریف ۰۳ . ۰۴ . سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ را همگرایی مطلق می‌نامیم ، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ همگرا

باشد .

تعریف ۰۴ . ۰۴ . اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا باشد ، ولی سری $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ واگرا . سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ را همگرایی مشروط می‌نامیم .

مثال ۰۱۲ . ۰۴ . همگرایی سری زیر را بررسی کنید .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{3} n \pi}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{\cos \frac{1}{3} n \pi}{n^2} + \dots$$

حل . سری قدر مطلق را بررسی می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos \frac{1}{3} n \pi|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

از طرفی می‌دانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری P می باشد ، با $P=2$ پس همگراست . لذا سری

قدر مطلق نیز همگرا است و در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{3} n \pi}{n^2}$ همگرا می باشد .

سری تابع

سری است که جمله‌های آن توابعی از متغیر x باشند ، مانند :

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

واضح است که وقتی به x مقادیر مختلف را نسبت دهیم ، سربهای عددی متفاوتی خواهیم داشت که برخی از آنها همگرا و برخی ممکن است واگرا باشند . مجموعه تمام مقادیر x را که به‌ازای آنها سری همگرا باشد ، میدان همگرایی سری می‌نامیم .

سری توانی

از مهمترین انواع سربهای تابع ، سری توانی است که به‌فرم

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2)$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots \quad (3)$$

می باشد که بر حسب توانهای صعودی و صحیح و مثبت x یا $x - a$ مرتب شده اند.

و $(x - a)^0 = 1$ ، حتی اگر $x = a$ باشد. ضرایب c_0 و c_1 و ... ، مقادیر ثابت هستند و a نیز عدد ثابتی است. چون x متغیر می باشد، پس ممکن است مقادیر منفی را نیز اختیار کند و همین طور چون c_i ها مقادیر ثابت هستند ممکن است بعضی از آنها مثبت و بعضی منفی باشند. لذا در حالت کلی، سری به فرم یک سری با جمله های مثبت و منفی درمی آید و باید برای تعیین همگرایی آن، سری جمله های قدر مطلق را در نظر بگیریم و در واقع همگرایی مطلق را تعیین کنیم که معمولاً از دستور دالامبر استفاده می کنیم. طرز عمل به شرح زیر می باشد:

برای فرمول (۲)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} x \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

و طبق دستور دالامبر این سری وقتی همگرا می باشد که

$$|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$$

با فرض اینکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R}$$

داریم:

$$|x| \left| \frac{1}{R} \right| < 1 \Rightarrow |x| < R \quad (۵)$$

یعنی فاصله $(-R, R)$ ، میدان همگرایی می باشد. یعنی بازای x های متعلق به این فاصله، سری (۲) همگرا و بازای x های خارج از این فاصله واگرا می باشد.

تذکر ۲. بازای $x = R$ و $x = -R$ ممکن است سری، همگرا و یا واگرا باشد که باید مستقیماً بررسی شود.

تعریف ۵.۴. عدد مثبت R در فرمول (۴) را شعاع همگرایی می نامیم.

مثال ۱۳.۴. شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

حل. با توجه به فرمول (۴) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = 1$$

$$R = 1$$

مثال ۱۴.۴. شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + \dots$$

حل. با توجه به فرمول (۴) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| = \infty$$

و $R = 0$ ، یعنی سری فقط بازای $x = 0$ همگرا می باشد.

قضیه ۷.۴. اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برابر $R > 0$ باشد، آنگاه سری های $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ نیز همگرا و شعاع همگرایی آنها نیز برابر R می باشد. *

قضیه ۸.۴. اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برابر $R > 0$ باشد، آنگاه شعاع همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n$ نیز برابر R می باشد. **

حال اگر سری به فرم (۳) باشد، برای تعیین شعاع همگرایی فرض می کنیم

$$x - a = T \quad (۶)$$

پس سری (۳) به فرم زیر بیان می شود،

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \dots$$

** و ** اثبات در کتاب

و با توجه به (۵) داریم

$$|T| < R \Rightarrow -R < T < R$$

$$-R < x - a < R \Rightarrow a - R < x < a + R$$

یعنی فاصله همگرایی $(a - R, a + R)$ می باشد.

مثال ۰۴.۱۵. فاصله همگرایی سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \quad (1)$$

حل. با فرض $x-1 = T$ سری (۱) به فرم زیر بیان می شود،

$$\sum_{n=1}^{\infty} T^n$$

و با توجه به فرمول (۴) داریم

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$-1 < T < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

سری تیلور* و سری ماک لورن**

فرض کنیم تابع $f(x)$ تابعی باشد که خود و تمام مشتقاتش درناصله‌ای اطراف $x = x_0$ موجود باشند. می‌خواهیم این تابع را نسبت به قوای صعودی $x - x_0$ بدفرم سری توانی بنویسیم

$$(7) f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n + \dots$$

حال می‌خواهیم ضرایب c_0 و c_1 و c_2 و \dots و c_n و \dots را پیدا کنیم. برای این کار

* Taylor Serie

** Maclaurin Serie

در (۷) به جای x مقدار x_0 را می‌گذاریم، داریم

$$(8) f(x_0) = c_0$$

برای تعیین بقیه ضرایب، مشتقات متوالی $f(x)$ را می‌گیریم

$$(9) \begin{cases} f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \dots + nc_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \\ f''(x) = 2c_2 + 3 \times 2c_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} + \dots \\ f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2c_n + (n+1)n(n-1) \\ \quad (n-2)\dots 3c_{n+1}(x-x_0) + \dots \end{cases}$$

در دستگاه (۹) به جای x مقدار x_0 را قرار می‌دهیم، داریم

$$c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

و بطور کلی

$$(10) c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

قضیه ۰۹.۰۴. فرض کنیم $f(x)$ تابعی باشد بطوری که $f(x)$ و تمام مشتقاتش در فاصله $(x_0 - R, x_0 + R)$ موجود باشند، آنگاه بسط تیلور تابع $f(x)$ برای تمام x هایی که $|x - x_0| < R$ است به فرم زیر

$$(11) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

خواهد بود، اگر و فقط اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0$$

که ξ_n بین x و x_0 قرار دارد.

اگر در سری تیلور (۱۱)، $x = 0$ انتخاب شود، داریم

(۱۲)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

که به آن سری ماک لورن می‌گوییم .

مثال ۰۴ . ۱۶ . سری ماک لورن تابع e^x را بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

حل .

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$$

و طبق فرمول (۱۲) داریم

$$e^x = f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots$$

$$(13) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

و برای تعیین شعاع همگرایی

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$$

و $R = \infty$ ، یعنی به ازای جمع مقادیر x ، همگرای باشد .

مثال ۰۴ . ۱۷ . سری ماک لورن تابع $\cos x$ را بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

حل . مشتقات متوالی تابع $f(x) = \cos x$ و مقادیر آنها را در $x=0$ پیدا می‌کنیم

$$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, \dots$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots$$

و با توجه به فرمول (۱۲) داریم

$$(14) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

و برای تعیین شعاع همگرایی

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \right| = 0 \Rightarrow R = \infty$$

و به ازای جمع مقادیر x ، همگرای باشد .

مثال ۰۴ . ۱۸ . سری ماک لورن تابع $\sin x$ را بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, \dots \quad \text{حل .}$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, \dots$$

و

$$(15) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

و برای تعیین شعاع همگرایی

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \right| = 0 \Rightarrow R = \infty$$

و به ازای جمع مقادیر x ، همگرای می‌باشد .

مثال ۰۴ . ۱۹ . فرمول اولر

می‌دانیم

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

حال اگر در فرمول فوق به جای x ، قرار دهیم ix ، داریم :

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)$$

و با توجه به بسط $\cos x$ و $\sin x$ ، داریم :

$$(16) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

و اگر در فرمول (۱۶) به جای x ، قرار دهیم $-x$ ، داریم :

$$(17) \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ذیلاً "فرمول بسط ماک لورن چند تابع مهم را معرفی می‌کنیم .

$$(18) \quad (a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} a^{n-m}x^m + \dots$$

مجموعه مسائل ۱۰۴

در مورد همگرایی سربهای زیر تحقیق کنید و در صورت همگرا بودن، شعاع

همگرایی را بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} = 1 + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{5} \cos 2x + \dots \quad -1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{nx} = 1 + e^x + 2! e^{2x} + \dots \quad -2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \dots \quad -3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots \quad -4$$

شعاع همگرایی سربهای زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad -5$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n} x^n \quad -6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n-1}}{2n-1} \quad -7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} x^n \quad -8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n \quad -9$$

که به ازای جمع مقادیر n و در فاصله همگرایی $(-a, a)$ درست است.

تذکره ۰۳. در فرمول (۱۸) اگر n عدد صحیح و مثبت باشد، بسط محدود بوده و با جمله x^n تمام می شود.

$$(19) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad R=1$$

$$(20) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots, \quad R=1$$

$$(21) \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad R=1$$

$$(22) \quad \sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad R=\infty$$

$$(23) \quad \cos hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad R=\infty$$

$$(24) \quad \sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \frac{x^7}{7} + \dots, \quad R=1$$

$$(25) \quad \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \dots \right), \quad R=1$$

$$(26) \quad \tan^{-1} x = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, & R=1 \\ \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots, & \end{cases}$$

اگر $x \geq 1$ و $x \leq -1$

$$(27) \quad \tan h^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots, \quad R=1$$

$$(28) \quad \cot h^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots, \quad |x| > 1$$

حل. چون توابع موجود در این معادله یعنی x و $3x$ - چند جمله‌ای هستند و از طرفی هر چند جمله‌ای، خود بسط ماک لورن می‌باشد، لذا لازم نیست که توابع را به فرم سری توانی بنویسیم. حال جواب معادله را به فرم

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2)$$

در نظر گرفته و y' را حساب می‌کنیم و در معادله (۱) بجای y و y' مقدار قرار می‌دهیم

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots \quad (3)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در (۱) داریم

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + (n+1)c_{n+1} x^n + \dots$$

$$- 3c_0 x - 3c_1 x^2 - \dots - 3c_{n-1} x^n + \dots = x$$

و با مساوی قرار دادن x های هم توان داریم

$$c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$2c_2 - 3c_0 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}(3c_0 + 1) \quad \text{ضریب } x$$

$$c_3 = c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$c_{n+1} = \frac{3}{n+1} c_{n-1}, \quad n \geq 2 \quad (4) \quad \text{ضریب } x^n$$

رابطه (۴) را رابطه بازگشتی می‌نامیم و با توجه به این رابطه، بقیه ضرایب تعیین می‌شوند

$$c_6 = c_7 = c_8 = \dots = c_{2k+1} = 0$$

یعنی تمام ضرایب فرد صفر می‌باشند.

$$c_4 = \frac{3}{4} c_2 = \frac{3}{2 \times 4} (3c_0 + 1)$$

$$c_6 = \frac{3}{6} c_4 = \frac{3^2}{2 \times 4 \times 6} (3c_0 + 1)$$

$$c_{2n} = \frac{3^{n-1}}{2^n n!} (3c_0 + 1)$$

۱۰- بسط تیلور تابع $f(x) = \ln x$ را در نقطه $x = 2$ بنویسید.

۱۱- بسط ماک لورن تابع $f(x) = \ln(1+x)$ را بنویسید.

۱۲- بسط ماک لورن تابع $f(x) = \sin^2 x$ را بنویسید.

۱۳- بسط ماک لورن تابع $f(x) = \cos^2 x$ را بنویسید.

۱۴- بسط تیلور تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه $x = 1$ بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید.

۱۵- بسط تیلور تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $x = 4$ بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید.

۴.۴. حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی

در این بخش می‌خواهیم در مورد حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر صحبت کنیم. برای حل این معادلات، جواب را به فرم سری توانی

$$(1) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

یا

$$(2) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

در نظر می‌گیریم. ابتدا باید تمام توابع موجود در معادله دیفرانسیل را به فرم سری توانی بنویسیم و سپس y' و مشتقاتش را در معادله دیفرانسیل قرار دهیم و آنگاه با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم توان، ضرایب سری توانی را بدست آوریم. قبل از آنکه بحث دیگری در این مورد داشته باشیم، با ارائه چند مثال این روش را تشریح می‌کنیم

مثال ۴.۴. معادله دیفرانسیل

$$y' - 3xy = x, \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = c_0 + (3c_0 + 1) \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2 \times 4}x^4 + \frac{3^2}{2 \times 4 \times 6}x^6 + \dots \right)$$

و با توجه به اینکه $y(0) = 1$ ، پس $c_0 = 1$ و جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$y = 1 + 4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2 \times 4}x^4 + \dots \right).$$

مثال ۲۱.۴. معادله دیفرانسیل

$$xy' - 3y = 3 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. جواب را به فرم سری توانی

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (2)$$

در نظر می گیریم و y' را حساب می کنیم

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots \quad (3)$$

حال (۲) و (۳) را در (۱) قرار می دهیم داریم:

$$c_1x + 2c_2x^2 + 3c_3x^3 + \dots + nc_nx^n + \dots$$

$$- 3c_0 - 3c_1x - 3c_2x^2 - 3c_3x^3 - \dots - 3c_nx^n - \dots = 3$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم توان داریم

$$-3c_0 = 3 \Rightarrow c_0 = -1 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$c_1 - 3c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x$$

$$2c_2 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{ضریب } x^2$$

$$3c_3 - 3c_3 = 0 \neq c_3 = 0 \quad \text{ضریب } x^3$$

یعنی رابطه بالا به ازای جمع مقادیر c_3 برقرار است، لذا به عنوان پارامتر مساله می ماند.

$$(n-3)c_n = 0 \quad \text{ضریب } x^n$$

پس تمام ضرایب c_4 ، c_5 و c_6 ... صفر می باشند و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = -1 + cx^3$$

مثال ۲۲.۴. معادله دیفرانسیل

$$xy' - (x+2)y = -2x^2 - 2x \quad (1)$$

را حل کنید

حل. جواب را به فرم سری توانی

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (2)$$

در نظر می گیریم و y' را حساب می کنیم

$$y' = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots \quad (3)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در (۱) داریم

$$c_1x + 2c_2x^2 + \dots + nc_nx^n + \dots$$

$$- c_0x - c_1x^2 - \dots - c_{n-1}x^n - \dots$$

$$- 2c_0 - 2c_1x - 2c_2x^2 - \dots - 2c_nx^n - \dots = -2x^2 - 2x$$

ضرایب x های هم توان را مساوی قرار دهیم، داریم

$$c_0 = 0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$-c_1 - c_0 = -2 \Rightarrow c_1 = 2 \quad \text{ضریب } x$$

$$(2-2)c_2 - c_1 = -2 \quad \text{ضریب } x^2$$

و رابطه بالا به ازای جمع مقادیر c_2 درست می باشد و c_2 محاسبه نمی شود، لذا c_2 به عنوان پارامتر مسئله می باشد.

$$(n-2)c_n - c_{n-1} = 0 \quad \text{ضریب } x^n$$

رابطه بازگشتی

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n-2}, \quad n > 2$$

$$c_3 = \frac{c_2}{1}, \quad c_4 = \frac{c_3}{2} = \frac{c_2}{1 \times 2} = \frac{c_2}{2!}$$

$$c_5 = \frac{c_4}{3} = \frac{c_2}{3!}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{c_2}{(n-2)!}, \quad n > 2$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد:

$$y = 0 + 2x + c_2x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) \\ = 2x + c_2x^2 e^x$$

توجه ۱. در مثالهای بالا شرط اولیه به صورت $y(0) = y_0$ فرض شده بود و به همین دلیل جواب را به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ در نظر می‌گرفتیم. ولی اگر بخواهیم جواب را به صورت سری توانی برحسب توانهای $x-a$ بنویسیم، یعنی اگر شرط اولیه به صورت $y(a) = y_0$ باشد، در این صورت جواب را به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ در نظر می‌گیریم. و با تغییر متغیر

$$X = x - a, \quad dX = dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dX^2}$$

جواب به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ می‌باشد و روش حل همان است که در مثالهای بالا ارائه شد و بعد از آنکه جواب عمومی برحسب X بدست آمد، بد جای X قرار می‌دهیم $x-a$

مثال ۲۳.۴. جواب معادله دیفرانسیل

$$xy' - y = x \quad (1)$$

را به صورت سری توانی برحسب توانهای $x-1$ بدست آورید.

حل. با استفاده از تغییر متغیر

$$X = x - 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \quad (2)$$

و جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$(X+1) \frac{dy}{dX} - y = X+1 \quad (3)$$

حال جواب را به فرم

$$y = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots + c_n X^n + \dots \quad (4)$$

در نظر می‌گیریم و $\frac{dy}{dX}$ را حساب می‌کنیم

$$\frac{dy}{dX} = c_1 + 2c_2 X + \dots + nc_n X^{n-1} + \dots \quad (5)$$

با جایگذاری (۴) و (۵) در (۳) داریم:

$$c_1 X + 2c_2 X^2 + 3c_3 X^3 + \dots + nc_n X^n + \dots$$

$$+ c_1 + 2c_2 X + 3c_3 X^2 + 4c_4 X^3 + \dots + (n+1)c_{n+1} X^n + \dots$$

$$- c_0 - c_1 X - c_2 X^2 - c_3 X^3 - \dots - c_n X^n - \dots = 1 + X$$

با مساوی قرار دادن ضرایب X های هم‌توان، داریم:

$$c_1 - c_0 = 1 \Rightarrow c_1 = c_0 + 1 \quad \text{ضریب } X^0$$

$$c_1 + 2c_2 - c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{ضریب } X$$

$$3c_3 + c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{c_2}{3} = -\frac{1}{6} \quad \text{ضریب } X^2$$

$$(n+1)c_{n+1} + (n-1)c_n = 0 \quad \text{ضریب } X^n$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1} c_n, \quad n \geq 2$$

$$c_4 = -\frac{2}{4} c_3 = \frac{1}{12}$$

$$c_5 = -\frac{3}{5} c_4 = -\frac{1}{20}, \dots$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_0 + (c_0 + 1)X + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{12}X^4 - \frac{1}{20}X^5 + \dots$$

و چون $X = x - 1$

$$y = c_0 x + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} + \dots$$

و اگر بخواهیم شعاع همگرایی را تعیین کنیم، با توجه به رابطه بازگشتی*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n-1}{n+1} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

* شعاع همگرایی را همیشه از رابطه بازگشتی بدست می‌آوریم.

$$-1 < X < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2.$$

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا جواب یک معادله دیفرانسیل همیشه قابل نمایش به سری توانی می‌باشد؟ به مثال زیر توجه کنید!

مثال ۲۴.۴. آیا می‌توان جواب معادله زیر را به فرم سری توانی برحسب توانهای x نوشت؟

$$y' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

حل. فرض می‌کنیم معادله دارای جوابی به فرم

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

باشد y' را محاسبه می‌کنیم و در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots \quad (2)$$

(۲) را در (۱) قرار داده

$$x y' = 1$$

$$c_1 x + 2c_2 x^2 + \dots = 1$$

اگر ضرایب x های هم توان را مساوی قرار دهیم خواهیم داشت

$$x^0 \quad \begin{cases} 1 = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{ضرب } x^0$$

البته این معادله دارای جواب است زیرا

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \ln x + c$$

ولی این جواب قابل نمایش به فرم سری توانی برحسب قوای x نمی‌باشد.

اکنون به بررسی این مطلب می‌پردازیم که چه وقت یک معادله دیفرانسیل دارای جوابی است که قابل نمایش به فرم سری توانی می‌باشد. فضایی مربوطه را در مورد معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۶. تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ تحلیلی نامیم، اگر $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای بسط تلور $R > 0$ باشد.

قضیه ۴.۱۰. اگر در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = p_3(x) \quad (3)$$

توابع $p_1(x)$ ، $p_2(x)$ و $p_3(x)$ هر سه در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب این معادله در نقطه $x=a$ تحلیلی خواهد بود.

همان‌طور که در مقدمه این فصل گفته شد، هدف اصلی در این فصل حل دو

معادله بسیار مهم

$$\text{معادله لژاندر} \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$$

$$\text{معادله بسل} \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

می‌باشد. لذا قضیه زیر را که بسیار ضعیف‌تر از قضیه فوق بوده، ولی جوابگوی حل دو

معادله لژاندر و بسل می‌باشد، بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۷. در معادله دیفرانسیل

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$$

که در آن f_1 ، f_2 و f_3 سه چندجمله‌ای برحسب x می‌باشند، نقطه $x=a$ را یک نقطه معمولی گوئیم اگر $f_1(a) \neq 0$ باشد، در غیراینصورت نقطه $x=a$ را یک نقطه منفرد می‌نامیم.

قضیه ۴.۱۱. اگر $x=a$ یک نقطه معمولی معادله دیفرانسیل

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0 \quad (4)$$

باشد، آنگاه معادله دارای جوابی به فرم سری توانی برحسب توانهای $x-a$ خواهد بود و جواب عمومی را به فرم:

$$(5) \quad y = c(x-a) \quad (\text{یک سری توانی برحسب توانهای } x-a)$$

$$+ c^*(x-a)^2 \quad (\text{یک سری توانی برحسب توانهای } x-a)$$

خواهیم داشت و هر دو سری مستقل خطی بوده و هر دو در یک ناحیه اطراف a همگرا خواهند بود.

تذکر ۱. در تمام مسائل، a را صفر اختیار می‌کنیم مگر آنکه مقدار دیگری برای آن داده شده باشد.

مثال ۲۵.۴. معادله دیفرانسیل

$$y'' - xy' + y = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با توجه به قضیه ۱۱.۴ ضرایب y'' و y' و y سه چند جمله‌ای هستند و $f_1(0) = 1 \neq 0$ پس یک نقطه معمولی می‌باشد، لذا معادله (۱) دارای

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (2)$$

جوابی به فرم سری توانی به فرم

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots \quad (3)$$

$$y'' = 2c_2 + 3 \times 2c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots \quad (4)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) و (۴) در (۱) داریم

$$2c_2 + 3 \times 2c_3x + 4 \times 3c_4x^2 + \dots + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \dots - c_1x - 2c_2x^2 - \dots - nc_nx^n - \dots = 0$$

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = 0$$

حال ضرایب x های هم‌توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$$2c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2} \quad \text{ضریب } x^0$$

$$3 \times 2c_3 - c_1 + c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \quad \text{ضریب } x$$

رابطه بالا به‌ازای جمع مقادیر c_1 برقرار است پس c_1 به‌عنوان پارامتر مساله می‌باشد

$$4 \times 3c_4 - c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{c_2}{4 \times 3} = -\frac{c_0}{4!} \quad \text{ضریب } x^2$$

.....

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n-1)c_n = 0 \quad \text{ضریب } x^n$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = \frac{n-1}{(n+2)(n+1)} c_n$$

و با توجه به رابطه بازگشتی چون $c_3 = 0$ است پس کلیه ضرایب فرد صفر می‌باشد.

$$c_5 = c_7 = \dots = c_{2k+1} = 0$$

$$c_6 = \frac{3}{6 \times 5} c_4 = -\frac{3}{6!} c_0$$

$$c_8 = \frac{5}{8 \times 7} c_6 = -\frac{15}{8!} c_0$$

و جواب عمومی را به فرم زیر خواهیم داشت:

$$y = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{3}{6!} x^6 - \frac{15}{8!} x^8 - \dots \right) + c_1 x$$

توجه کنید که در این مثال، شعاع همگرایی هریک از سریها با توجه به رابطه بازگشتی بدست می‌آید.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+2}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n-1}{(n+2)(n+1)} \right| = 0 \quad *$$

و $R = \infty$ ، لذا به‌ازای جميع مقادیر x جواب درست می‌باشد.

مثال ۲۶.۴. معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2x^2y = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. با توجه به قضیه ۱۱.۴، داریم $f_1(0) = 1 \neq 0$ یعنی $x=0$ یک نقطه معمولی است و معادله (۱) دارای جوابی به فرم سری توانی می‌باشد.

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (2)$$

* دقت کنید که به‌جای $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ نوشته‌ایم $\frac{c_{n+2}}{c_n}$. علت آن است که در دستور دالامبر نسبت دو جمله متوالی نوشته می‌شود و در این مثال، c_n و c_{n+2} دو جمله متوالی هریک از سریها می‌باشند.

$$y'' = 2c_2 + 3 \times 2c_3x + \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots \quad (۳)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$2c_2 + 3 \times 2c_3x + 4 \times 3c_4x^2 + 5 \times 4c_5x^3 + \dots + (n+4)(n+3)c_{n+4}x^{n+2} + \dots$$

$$+ 2c_0x^2 + 2c_1x^3 + \dots + 2c_n x^{n+2} + \dots = 0$$

ضرایب x های هم توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$$c_2 = 0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$c_3 = 0 \quad \text{ضریب } x$$

$$12c_4 + 2c_0 = 0 \Rightarrow c_4 = -\frac{c_0}{6} \quad \text{ضریب } x^2$$

$$20c_5 + 2c_1 = 0 \Rightarrow c_5 = -\frac{c_1}{10} \quad \text{ضریب } x^3$$

$$\dots \dots \dots \quad \text{ضریب } x^{n+2}$$

$$(n+4)(n+3)c_{n+4} + 2c_n = 0 \quad \text{رابطه بازگشتی}$$

$$c_{n+4} = -\frac{2}{(n+4)(n+3)} c_n$$

با توجه به رابطه بازگشتی داریم

$$c_6 = -\frac{2}{6 \times 5} c_2 = 0$$

$$c_7 = -\frac{2}{7 \times 6} c_3 = 0$$

$$c_8 = -\frac{2}{8 \times 7} c_4 = \frac{c_0}{168}$$

$$c_9 = -\frac{2}{9 \times 8} c_5 = \frac{c_1}{360}$$

و به همین ترتیب بقیه ضرایب محاسبه می‌شوند و جواب عمومی بدفهم زیر می‌باشد:

$$y = c_0 \left(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{168} - \dots \right) + c_1 \left(x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{360} - \dots \right)$$

و با توجه به رابطه بازگشتی، شعاع همگرایی هر یک از سریهای جواب عمومی

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+4}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{(n+4)(n+3)} \right| = 0$$

و $R = \infty$ می‌باشد

مثال ۲۷.۴. معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. با توجه به قضیه ۱۱.۴، داریم $f_1(0) = (1-0) = 1 \neq 0$ ، لذا $x=0$ یک

نقطه معمولی است و معادله (۱) دارای جوابی بدفهم سری توانی می‌باشد، و داریم:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y' = c_1 + 2c_2x + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 3 \times 2c_3x + \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots$$

با جایگذاری y ، y' ، y'' در (۱) داریم:

$$2c_2 + 3 \times 2c_3x + 4 \times 3c_4x^2 + \dots + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \dots$$

$$- 2c_2x^2 - \dots - n(n-1)c_n x^n - \dots$$

$$- 2c_1x - 2 \times 2c_2x^2 - \dots - 2nc_n x^n - \dots$$

$$2c_0 + 2c_1x + 2c_2x^2 + \dots + 2c_n x^n + \dots = 0$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب x های هم توان، داریم:

$$c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$6c_3 - 2c_1 + 2c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \quad \text{ضریب } x$$

و رابطه بالا به‌ازای جمع مقادیر c_1 برقرار می‌باشد، لذا c_1 بعنوان پارامتر مساله

است

$$12c_4 - 4c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{c_2}{3} = -\frac{c_0}{3} \quad \text{ضریب } x^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n-1)(n+2)c_n = 0 \quad \text{ضریب } x^n$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = \frac{(n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} c_n$$

و با توجه به رابطه بازگشتی، چون $c_3 = 0$ است پس تمام ضرایب فرد صفر می‌باشند و

$$c_6 = \frac{3}{5} c_4 = -\frac{c_0}{5}$$

$$c_8 = \frac{5}{7} c_6 = -\frac{c_0}{7}$$

و جواب عمومی به فرم زیر خواهد بود:

$$y = c_0 \left(1 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} - \dots \right) + c_1 x$$

و شعاع همگرایی با توجه به رابطه بازگشتی

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+2}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n-1}{n+1} \right| = 1$$

می‌باشد. $R=1$

برای پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل به فرم سری توانی، می‌توان از روش

زیر که به روش لیبنتیز - ماک لورن* موسوم است و به آن روش مشتقات متوالی می‌گوییم

استفاده نمود بخصوص وقتی که معادله با شرایط اولیه داده شده باشد. در این روش

جواب را به فرم

$$(۶) \quad y = y(a) + \frac{(x-a)}{1!} y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} y''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} y^{(n)}(a) + \dots$$

در نظر می‌گیریم

مثال ۲۸.۴. معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2)y'' - 5xy' - 3y = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1 \quad (۱)$$

* Leibnitz - Maclaurin

را حل کنید.

حل. با توجه به شرایط اولیه

$$(1-0)y''(0) - 0 - 3y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = 3 \quad (۲)$$

با مشتگیری از (۱) داریم:

$$-2xy'' + (1-x^2)y''' - 5y' - 5xy'' - 3y' = 0 \quad (۳)$$

برای محاسبه $y'''(0)$ در (۳) مقدار می‌گذاریم.

$$y'''(0) - 5 - 3 = 0 \Rightarrow y'''(0) = 8$$

و مشتق مرتبه n ام را حساب می‌کنیم (طبق فرمول لیبنتیز) داریم:

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - x(2n+5)y^{(n+1)} - (n+1)(n+3)y^{(n)} = 0 \quad (۴)$$

و

$$y^{(4)}(0) - 15y^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 45$$

$$y^{(5)}(0) - 24y^{(3)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(5)}(0) = 192$$

و به همین ترتیب بقیه ضرایب را حساب می‌کنیم. جواب معادله (۱) به فرم زیر می‌باشد:

$$y = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!} y''(0) + \frac{x^3}{3!} y'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} y^{(n)}(0) + \dots$$

$$y = 1 + x + \frac{3}{2!} x^2 + \frac{8}{3!} x^3 + \frac{45}{4!} x^4 + \frac{192}{5!} x^5 + \dots$$

مثال ۲۹.۴. معادله دیفرانسیل

$$y'' = yy' - x^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$y''(0) = y(0)y'(0) - 0$$

$$y''(0) = 1 \quad (۲)$$

با مشتگیری از (۱) داریم

$$y''' = (y')^2 + yy'' - 2x$$

$$y'''(0) = 1 + 1 = 2 \quad (۳)$$

با مشتگیری از (۳) داریم

$$y^{(4)} = 3y'y'' + yy''' - 2 \quad (۴)$$

$$y^{(4)}(0) = 3 + 2 - 2 = 3$$

و بسط ماک لورن جواب تا جمله چهارم را می توان به صورت زیر نوشت :

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{3}{4!} x^4 + \dots$$

مثال ۴. ۳۰. معادله دیفرانسیل

$$y'' + y' \sin x + e^x y = 0 \quad (۱)$$

را حل کنید .

حل .

$$y''(0) + y'(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = -y'(0)$$

با مشتگیری از (۱) داریم :

$$y''' + y'' \sin x + y' \cos x + e^x y + e^x y' = 0 \quad (۲)$$

$$y'''(0) + 2y'(0) + y(0) = 0 \Rightarrow y'''(0) = -2y'(0) - y(0)$$

و با مشتگیری از (۲) داریم

$$y^{(4)} + y''' \sin x + 2y'' \cos x - y' \sin x + e^x y + 2e^x y' + e^x y'' = 0 \quad (۳)$$

$$y^{(4)}(0) + 3y''(0) + y(0) + 2y'(0) = 0$$

$$y^{(4)}(0) = 2y'(0) - 2y(0)$$

و به همین ترتیب عمل مشتگیری را ادامه می دهیم و جواب عمومی به فرم زیر می باشد :

$$y = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!} y''(0) + \frac{x^3}{3!} y'''(0) + \frac{x^4}{4!} y^{(4)}(0) + \dots$$

$$= y(0) + xy'(0) - \frac{x^2}{2} y(0) + \frac{x^3}{6} (-2y'(0) - y(0)) +$$

$$\frac{x^4}{24} (2y'(0) - 2y(0)) + \dots$$

$$y = y(0) \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots \right) + y'(0) \left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \dots \right)$$

مجموعه مسائل ۲۰۴

جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را به فرم سری توانی بر حسب توانهای

تا جمله k ام بنویسید .

$$y'' - xy' + 2y = 0, \quad k=7, \quad a=0 \quad .۱$$

$$2(x^2 + 8)y'' + 2xy' + (x+2)y = 0, \quad k=4, \quad a=0 \quad .۲$$

$$y'' - xy' - y = \sin x, \quad k=5, \quad a=0 \quad .۳$$

$$xy'' + x^2 y' - 2y = 0, \quad k=4, \quad a=1 \quad .۴$$

$$y'' - xy' - y = 0, \quad k=4, \quad a=1 \quad .۵$$

$$(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad k=4, \quad a=0 \quad .۶$$

$$y'' - xy' + x^2 y = 0, \quad k=4, \quad a=0 \quad .۷$$

$$y'' + x^2 y = 1 + x + x^2, \quad k=8, \quad a=0 \quad .۸$$

$$y'' + 2x^2 y = 0, \quad k=3, \quad a=0 \quad .۹$$

$$y' = \ln xy, \quad k=5, \quad y(1)=1 \quad .۱۰$$

$$y' = \cos x + \sin y, \quad k=5, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad .۱۱$$

$$y'' - y = \sin x, \quad k=7, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2 \quad .۱۲$$

$$y'' - 2y = e^{2x}, \quad k=7, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2 \quad .۱۳$$

۱۴. $y'' + 2y'y' = 0, k=7, y(0)=0, y'(0)=1$

۱۵. $y'' = \sin xy, k=5, y(-\frac{\pi}{2})=1, y'(\frac{\pi}{2})=1$

۱۶. $y'' = \cos xy, k=5, y(-\frac{\pi}{2})=1, y'(\frac{\pi}{2})=1$

۳.۴. معادله لزاندر. چند جمله‌ایهای لزاندر
معادله دیفرانسیل

(۱) $(1-x^2)y'' - 2xy' + v(v+1)y = 0$

که در آن v عددی حقیقی می‌باشد، در مسائل فیزیکی، بخصوص در مسائل با مقدار مرزی مربوط به کره و مربوط به توزیع حرارت در هادی کروی شکل مطرح می‌شود.

معادله دیفرانسیل لزاندر (۱) در شرایط قضیه ۴.۱۱ صدق می‌کند و $x=0$

یک نقطه معمولی است، لذا معادله دارای جوابی به فرم

(۲) $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots$

می‌باشد. حال مشتق اول و دوم y را می‌گیریم و در معادله (۱) قرار می‌دهیم و ضرایب c_i را بدست می‌آوریم

$$2c_2 + 3 \times 2c_3x + 4 \times 3c_4x^2 + \dots + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \dots - 2c_2x^2 - \dots - n(n-1)c_nx^n - \dots - 2c_1x - 2 \times 2c_2x^2 - \dots - 2nc_nx^n - \dots$$

$$v(v+1)c_0 + v(v+1)c_1x + v(v+1)c_2x^2 + \dots + v(v+1)c_nx^n + \dots = 0$$

ضرایب x های هم‌توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا c_i ها پیدا شوند

ضریب x^0 $c_2 = -\frac{v(v+1)}{2}c_0$

ضریب x $c_3 = -\frac{(v-1)(v+2)}{3!}c_1$

.....

ضریب x^n $(n+2)(n+1)c_{n+2} + [-n(n-1) - 2n + v(v+1)]c_n = 0$

$(n+2)(n+1)c_{n+2} + [v^2 - n^2 + v - n]c_n = 0$

رابطه بازگشتی

(۳) $c_{n+2} = -\frac{(v-n)(v+n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n, n \geq 0$

با توجه به رابطه بازگشتی، تمام ضرایب فرد بر حسب c_1 و تمام ضرایب زوج بر حسب c_0 محاسبه می‌شوند و c_0 و c_1 ثابتهای دلخواه هستند. و داریم:

$$c_4 = -\frac{(v-2)(v+3)}{4 \times 3}c_2 = \frac{(v-2)v(v+1)(v+3)}{4!}c_0$$

$$c_5 = -\frac{(v-3)(v+4)}{5 \times 4}c_3 = \frac{(v-3)(v-1)(v+2)(v+4)}{5!}c_1$$

و به همین ترتیب بقیه ضرایب محاسبه می‌شوند. با جایگذاری این ضرایب در (۳) داریم:

(۴) $y = c_0(1 - \frac{v(v+1)}{2!}x^2 + \frac{(v-2)v(v+1)(v+3)}{4!}x^4 - + \dots)$

$+ c_1(x - \frac{(v-1)(v+2)}{3!}x^3 + \frac{(v-3)(v-1)(v+2)(v+4)}{5!}x^5 - + \dots)$

و ملاحظه می‌شود که جواب عمومی به فرم

(۵) $y(x) = c_0R_v(x) + c_1S_v(x)$

می‌باشد و $R_v(x)$ و $S_v(x)$ دو جواب مستقل خطی هستند، و با توجه به (۳) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+2}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(v-n)(v+n+1)}{(n+2)(n+1)} \right| = 1$$

یعنی سربهای $R_v(x)$ و $S_v(x)$ به ازای $|x| < 1$ همگرا می‌باشند.

در اغلب مسائل کاربردی، پارامتر v یک عدد درست نامفی می‌باشد. حال

بررسی خود را در حالتی که $v = n$ (عدد درست نامفی) ادامه می‌دهیم. در این

صورت با توجه به رابطه بازگشتی داریم:

$$c_{n+2} = c_{n+4} = \dots = 0$$

در نتیجه، هنگامی که n زوج باشد، سری $R_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n خواهد

بود و $S_n(x)$ به صورت یک سری می‌باشد و هنگامی که n فرد باشد، سری $S_n(x)$ یک

چندجمله‌ای از درجه n و $R_n(x)$ به صورت یک سری خواهد بود. پس برای هر n

و با فرض اینکه v یک عدد درست نامفنی مانند n می باشد. جواب بدست آمده از معادله لزاندر را چندجمله‌ای لزاندر از درجه n می نامیم و آنرا با $P_n(x)$ نمایش می دهیم و با توجه به ضرایب بدست آمده در (۸) داریم:

$$(9) \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

و با توجه به فرمول (۹) داریم:

$$P_0(x) = 1$$

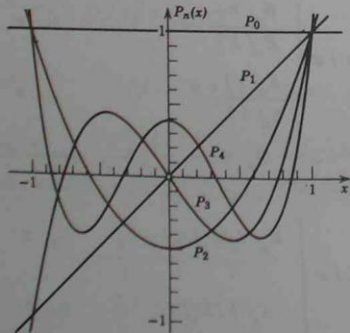
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



شکل ۱۰۴

پس جواب عمومی یک معادله لزاندر با $v=n$ به صورت زیر است:

(۱۰)

$$y = a_1 P_n(x) + a_2 Q_n(x)$$

درست نامفنی. $R_n(x)$ یا $S_n(x)$ (نه هر دو) یک چندجمله‌ای از درجه n می باشد. این چندجمله‌ایها را که در مقادیر ثابتی ضرب شده‌اند چندجمله‌ایهای لزاندر می نامیم. به علت اهمیت بسیار زیاد این چندجمله‌ایها، در زیر به تفصیل به بررسی آنها می پردازیم. ابتدا رابطه بازگشتی (۳) را به فرم

$$(6) \quad c_n = -\frac{(n+2)(n+1)}{(v-n)(v+n+1)} c_{n+2}, \quad n \leq v-2$$

می نویسیم و سپس تمام ضرایب غیرصفر را بر حسب c_v (ضریب بزرگترین توان x در چند جمله‌ای) بدست می آوریم (در این حالت v یک عدد درست غیرمفنی است). در این صورت ضریب c_v ثابت دلخواه می باشد و مرسوم است که $c_0 = 1$ انتخاب می شود و

$$(7) \quad c_v = \frac{(2v)!}{2^v (v!)^2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2v-1)}{v!}, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

تذکره ۱. با انتخاب این مقدار برای c_v ، تمام چندجمله‌ایها به ازای $x=1$ برابر ۱ می شوند.

حال با توجه به (۶) داریم:

$$\begin{aligned} c_{v-2} &= -\frac{v(v-1)}{2(2v-1)} c_v = -\frac{v(v-1)(2v)!}{2(2v-1)2^v(v!)^2} \\ &= -\frac{v(v-1)(2v)(2v-1)(2v-2)!}{2(2v-1)2^v v(v-1)!v(v-1)(v-2)!} \\ &= -\frac{(2v-2)!}{2^n (v-1)!(v-2)!} \end{aligned}$$

و به طریق مشابه داریم

$$\begin{aligned} c_{v-4} &= -\frac{(v-2)(v-3)}{4(2v-3)} c_{v-2} \\ &= \frac{(2v-4)!}{2^v 2!(v-2)!(v-4)!} \end{aligned}$$

و در حالت کلی، برای $v-2k \geq 0$ داریم

$$(8) \quad c_{v-2k} = (-1)^k \frac{(2v-2k)!}{2^k k!(v-k)!(v-2k)!}$$

که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n می‌باشد که با فرمول (۹) محاسبه می‌شود و $Q_n(x)$ یک سری نامحدود می‌باشد و $P_n(x)$ ها را چند جمله‌ای‌های لژاندر و $Q_n(x)$ ها را توابع لژاندر نوع دوم می‌نامیم و فاصله همگرایی $P_n(x)$ ، $[-1, 1]$ و فاصله همگرایی $Q_n(x)$ ، $(-1, 1)$ می‌باشد.

توجه ۱. جواب عمومی معادله لژاندر با v دلخواه که با فرمول (۴) بیان شد در حالت کلی به فرم

$$y(x) = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k v(v-2) \dots (v-2k+2)(v+1)(v+3) \dots (v+2k-1)}{(2k)!} x^{2k} \right] + c_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (v-1)(v-3) \dots (v-2k+1)(v+2)(v+4) \dots (v+2k)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right] = c_0 R_v(x) + c_1 S_v(x) \quad (11)$$

می‌باشد و وقتی که $v=n$ (عدد درست نامنتقی) باشد، $R_v(x)$ یا $S_v(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n هستند و همان‌طور که قبلاً بیان شد این چند جمله‌ایها را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم و می‌توان آنها را از رابطه زیر نیز بدست آورد:

$$P_n(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x)}{R_n(1)} & \text{زوج } n \\ \frac{S_n(x)}{S_n(1)} & \text{فرد } n \end{cases} \quad (12)$$

و سری دیگر را که نامحدود است و آنرا با $Q_n(x)$ نشان دادیم، می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$Q_n(x) = \begin{cases} R_n(1)S_n(x) & \text{زوج } n \\ -S_n(1)R_n(x) & \text{فرد } n \end{cases} \quad (13)$$

مثال ۴.۳۱. با استفاده از (۱۲) و $P_2(x)$ و $P_3(x)$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا $R_2(x)$ و $S_3(x)$ را با توجه به (۱۱) محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه

می‌دانیم که سری اول (۱۱) فقط شامل دو جمله‌ای باشد. لذا

$$R_2(x) = 1 + (-1)^1 \frac{2 \times 3}{2!} x^2 = 1 - 3x^2$$

و برای محاسبه $S_3(1)$ از سری دوم فرمول (۱۱) داریم

$$S_3(x) = x + (-1)^1 \frac{2 \times 5}{3!} x^3 = x - \frac{5}{3} x^3$$

$$R_2(1) = 1 - 3 = -2, \quad S_3(1) = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

و با توجه به (۱۲) داریم

$$P_2(x) = \frac{R_2(x)}{R_2(1)} = \frac{1}{-2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{S_3(x)}{S_3(1)} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} (5x^3 - 3x)$$

مثال ۴.۳۲. با استفاده از (۱۳) و $Q_0(x)$ و $Q_1(x)$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا $R_0(1)$ و $S_0(x)$ و $R_1(x)$ و $S_1(1)$ را محاسبه می‌کنیم

$$R_0(1) = 1$$

$$S_0(x) = x + \frac{1 \times 2}{3!} x^3 + \frac{1 \times 3 \times 2 \times 4}{5!} x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$S_1(1) = 1$$

$$R_1(x) = 1 - \frac{1 \times 2}{2!} x^2 + \frac{1 \times (-1) \times 2 \times 4}{4!} x^4 - \frac{1 \times (-1) \times (-3) \times 2 \times 4 \times 6}{6!} x^6 + \dots$$

و با توجه به (۱۳) داریم:

$$Q_0(x) = R_0(1)S_0(x)$$

با توجه به (a) و (b)

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

و با توجه به فرمول (۹)

$$= P_n(x)$$

مثال ۳۳.۰۴. با استفاده از فرمول (۱۴) $P_2(x)$ را حساب کنید.

حل.

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2$$

$$= \frac{1}{8} (12x^2 - 4)$$

$$= \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

ب. تابع مولد چند جمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ ضرایب t^n در بسط ماک لورن چند جمله‌ایهای لژاندر $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ می‌باشند، یعنی

$$(15) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

اثبات. می‌دانیم

$$(a) (1+z)^k = 1 + kz + \frac{k(k-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$Q_1(x) = -S_1(1)R_1(x)$$

$$= -1 + x\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

چند جمله‌ایهای لژاندر را می‌توان با استفاده از روابط و فرمولهایی که ذیلاً معرفی می‌شوند محاسبه نمود
الف: فرمول رد ریگس*

$$(14) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

اثبات می‌دانیم

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}$$

بنابراین

$$(a) \quad (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

از طرفی

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2k}) = (2n-2k)(2n-2k-1)\dots(n-2k+1)x^{n-2k}, \quad 2k \leq n$$

$$= 0, \quad n < 2k$$

رابطه بالا را می‌توان به‌فرم زیر نوشت

$$(b) \quad \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2k}) = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad 2k \leq n$$

$$= 0, \quad n < 2k$$

از طرفی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = [1+t(-2x+t)]^{-1/2}$$

حال با توجه به (a) و فرض اینکه $k = -\frac{1}{2}$ و $z = t(-2x+t)$ ، داریم:

$$[1+t(-2x+t)]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2} t^2(2x-t)^2 + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} t^n (2x-t)^n + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2xt-t^2) + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2}(4x^2t^2 - 4xt^3 + t^4) + \dots$$

$P_0(x) = 1$ یعنی t^0 برابر است با ضریب

$P_1(x) = x$ یعنی t برابر است با ضریب

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ یعنی t^2 برابر است با ضریب

و بطور کلی ضریب t^n به فرم زیر می باشد:

$$(16) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} [x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots]$$

مثال ۳۴.۴. با استفاده از فرمول (۱۶)، $P_3(x)$ را حساب کنید.

حل.

$$P_3(x) = \frac{1 \times 3 \times 5}{3!} [x^3 - \frac{3(3-1)}{2(6-1)} x]$$

$$= \frac{5}{2} [x^3 - \frac{3}{5} x]$$

$$= \frac{1}{2} [5x^3 - 3x]$$

مثال ۳۵.۴. مطلوبست $P_n(1)$

حل. با استفاده از فرمول (۱۵) به ازای $x=1$ ، داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1$$

در نتیجه برای هر n داریم $P_n(1) = 1$

مثال ۳۶.۴. مطلوبست $P_n(-1)$

حل. با استفاده از فرمول (۱۵) به ازای $x=-1$ داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{(1+t)^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad |t| < 1$$

در نتیجه برای هر n داریم $P_n(-1) = (-1)^n$

مثال ۳۷.۴. مطلوبست $P_n(0)$

حل. با استفاده از فرمول (۱۵) به ازای $x=0$ داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n$$

از طرفی

$$(1+t^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} t^4 - \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} t^{2n} + \dots, \quad |t| < 1$$

$$P_{2n-1}(0) = 0$$

در نتیجه

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$$

ب. روابط بارکستی

$$(17) \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad , n \geq 1$$

$$(18) \quad P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x) \quad , n \geq 1$$

$$(19) \quad (x^2 - 1) P'_n(x) = n x P_n(x) - n P_{n-1}(x) \quad , n \geq 1$$

$$(20) \quad n P_n(x) + P'_{n-1}(x) - x P'_n(x) = 0 \quad , n \geq 1$$

$$(21) \quad P'_{n+1}(x) = x P'_n(x) + (n+1) P_n(x) \quad , n \geq 0$$

اثبات فرمول (17)

می‌دانیم

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به t مشتق می‌گیریم.

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}$$

طرفین را در $1-2xt+t^2$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2xt+t^2) n P_n(x) t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-t) P_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2xt+t^2) n P_n(x) t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} 2nx P_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n+1}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب t های هم‌توان داریم:

$$x P_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1) P_{n+1}(x) - 2nx P_n(x) + (n-1) P_{n-1}(x)$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{1+2n}{1+n} x P_n(x) - \frac{n}{1+n} P_{n-1}(x) \quad , n \geq 1$$

اثبات فرمول ۲۰. از طرفین فرمول (17) نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$(a) \quad P'_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} P_n(x) + \frac{2n+1}{n+1} x P'_n(x) - \frac{n}{n+1} P'_{n-1}(x)$$

حال از طرفین فرمول (15) نسبت به x مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n$$

طرفین رابطه بالا را در $(1-2xt+t^2)$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2xt+t^2) P'_n(x) t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} x P'_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n+2}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب t های هم‌توان داریم:

$$(b) \quad P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2x P'_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

یا

$$(c) \quad P'_{n+1}(x) = P_n(x) + 2x P'_n(x) - P'_{n-1}(x)$$

با توجه به روابط (a) و (c) داریم

$$\left(\frac{2n+1}{n+1} - 1\right) P_n(x) + \left(\frac{2n+1}{n+1} - 2\right) x P'_n(x) - \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) P'_{n-1}(x) = 0$$

$$n P_n(x) - x P'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0.$$

اثبات فرمول (18). از فرمول (b) داریم:

$$(d) \quad 2x P'_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x)$$

و از فرمول (a) داریم:

$$(e) \quad x P'_n(x) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) P'_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P'_{n-1}(x) - P_n(x)$$

با توجه به (d) و (e) داریم:

$$\left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right) P'_{n+1}(x) + \left(\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right) P'_{n-1}(x) - \frac{1}{2} P'_n(x) = 0$$

$$\frac{1}{2(2n+1)} P'_{n+1}(x) - \frac{1}{2(2n+1)} P'_{n-1}(x) = \frac{1}{2} P'_n(x)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P'_n(x).$$

اینجا بقیه روابط به طریق مشابه می‌باشد.

مثال ۴. ۳۸. با توجه به اینکه می‌دانیم $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$ ، با استفاده از فرمول (۱۷) $P_2(x)$ را حساب کنید.

حل. ابتدا به ازای $n = 1$ $P_2(x)$ را حساب کرده.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{3}{2} x P_1(x) - \frac{1}{2} P_0(x) \\ &= \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

حال به ازای $n = 2$ $P_3(x)$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{5}{3} x P_2(x) - \frac{2}{3} P_1(x) \\ &= \frac{5}{3} x \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} x \\ &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

مثال ۴. ۳۹. با استفاده از فرمول (۱۸) $P_3(x)$ را حساب کنید.

حل. ابتدا به ازای $n = 1$ $P'_0(x)$ را حساب می‌کنیم

$$P'_0(x) = 1, \quad P'_1(x) = 0$$

$$P'_2(x) - 0 = 3P_1(x)$$

$$P'_2(x) = 3x$$

و با انتگرالگیری داریم

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 + C$$

از طرفی می‌دانیم برای هر عدد درست نامفرد $P_n(1) = 1$ پس

$$P_2(1) = \frac{3}{2} + C = 1, \quad C = \frac{-1}{2}$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

حال به ازای $n = 2$ $P'_3(x)$ را حساب می‌کنیم

$$P_1(x) = x, \quad P'_1(x) = 1$$

$$P'_3(x) - P'_1(x) = 5P_2(x)$$

$$P'_3(x) = \frac{15}{2} x^2 - \frac{3}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x + C$$

و با توجه به مثال ۴. ۳۷ می‌دانیم $P_{2n-1}(0) = 0$

$$P_3(0) = C = 0$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x).$$

مثال ۴. ۴۰. نشان دهید

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

حل. می‌دانیم

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

سوخه به فرمول بالا

$$P_n(-x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} (-x)^n (-x)^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} (-1)^n x^{n-2k}$$

$$= (-1)^n P_n(x).$$

تذکره ۲. در مثال ۴. ۴۰ نشان دادیم که

$$(۲۲) \quad P_{2n}(-x) = P_{2n}(x), \quad P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x)$$

یعنی $P_n(x)$ برای n های زوج، یک تابع زوج و برای n های فرد، یک تابع فرد می باشد.

تعریف ۴. ۸. یک مجموعه از توابع f_1 و f_2 و f_3 و ... را در فاصله $[a, b]$ متعامد گوئیم، اگر برای هر دو تابع متفاوت از این مجموعه داشته باشیم

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

تعامد چند جمله ایهای لژاندر

مجموعه چند جمله ایهای لژاندر در فاصله $[-1, 1]$ متعامد هستند، یعنی

$$(۲۳) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

اثبات می دانیم $P_m(x)$ و $P_n(x)$ جوابهای معادله لژاندر با $v=m$ و $v=n$ می باشد پس داریم

$$(a) \quad (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$$(b) \quad (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

با ضرب معادله (a) در $P_n(x)$ و معادله (b) در $P_m(x)$ داریم

$$(1-x^2)P_n(x)P_m''(x) - 2xP_n(x)P_m'(x) + m(m+1)P_n(x)P_m(x) = 0$$

$$(1-x^2)P_m(x)P_n''(x) - 2xP_m(x)P_n'(x) + n(n+1)P_m(x)P_n(x) = 0$$

با کم کردن در معادله فوق از یکدیگر داریم:

$$(c) \quad (1-x^2)[P_n(x)P_m''(x) - P_m(x)P_n''(x)] - 2x[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)]$$

$$= [n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n'(x)$$

رابطه (c) را می توان بدفرم زیر نوشت

$$(1-x^2) \frac{d}{dx} [P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)] - 2x[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)]$$

$$= [n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n'(x)$$

و یا

$$(d) \quad \frac{d}{dx} (1-x^2) [P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)] = [n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n'(x)$$

و با انتگرالگیری از طرفین رابطه (d) داریم

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_m(x)P_n'(x) dx = (1-x^2)P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x) \Big|_{-1}^1 = 0$$

و چون $m \neq n$ می باشد، بنابراین

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n'(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

مثال ۴. ۴۱. نشان دهید.

$$(۲۴) \quad \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

حل. با استفاده از تابع مولد داریم:

$$(a) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$(b) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) t^m$$

با ضرب (a) در (b) داریم

$$(c) \quad \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x) t^{m+n}$$

با انتگرالگیری از طرفین (c) از -1 تا 1 داریم

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-2xt+t^2} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx \right) t^{m+n}$$

و با توجه به رابطه (۲۳) داریم

$$-\frac{1}{2t} \ln(1-2xt+t^2) \Big|_{-1}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \right) t^{2n}$$

$$-\frac{1}{2t} [\ln(1-t)^2 - \ln(1+t)^2] = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}$$

پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \right) t^{2n}$$

و در نتیجه

$$\frac{2}{2n+1} = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

قضیه ۴.۱۲. اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دیرکله* صدق کند، آنگاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ ، در فاصله $-I < x < I$ داریم

$$(۲۵) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

که

$$(۲۶) \quad C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

و در هر نقطه ناپیوستگی سری بالا، به $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ همگرا می‌باشد.

مثال ۴.۲۰۴. چند جمله‌ای

$$(۱) \quad f(x) = 5x^3 - 3x^2 - x - 1$$

را بر حسب چند جمله‌ایهای لژاندر بیان کنید.

* Dirichlet

حل. چون چند جمله‌ای (۱) از درجه ۳ می‌باشد، لذا

$$5x^3 - 3x^2 - x - 1 = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x)$$

روش اول: با استفاده از فرمول (۲۶) داریم

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (5x^3 - 3x^2 - x - 1)(1) dx$$

$$= \frac{1}{2}(-2 - 2) = -2$$

$$C_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (5x^3 - 3x^2 - x - 1)(x) dx$$

$$= \frac{3}{2} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = 2$$

$$C_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 (5x^3 - 3x^2 - x - 1) \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \frac{5}{2} \left(-\frac{9}{5} + 1 \right) = -2$$

$$C_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 (5x^3 - 3x^2 - x - 1) \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) dx$$

$$= 2$$

در نتیجه

$$5x^3 - 3x^2 - x - 1 = 2(-P_0(x) + P_1(x) - P_2(x) + P_3(x))$$

مثال ۴.۳۰۴. چند جمله‌ای

$$(۱) \quad f(x) = x^4$$

را بر حسب چند جمله‌ایهای لژاندر بیان کنید.

حل. چون چند جمله‌ای (۱) از درجه ۴ می‌باشد، لذا

$$x^4 = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x) + C_4 P_4(x)$$

روش دوم:

$$x^4 = C_0 + C_1 x + C_2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) + C_3 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right)$$

$$+ C_4 \left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8} \right)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم توان داریم

ضرب x^4 $\frac{35}{8} C_4 = 1, C_4 = \frac{8}{35}$

ضرب x^3 $\frac{5}{2} C_3 = 0, C_3 = 0$

ضرب x^2 $\frac{3}{2} C_2 - \frac{30}{8} C_4 = 0, C_2 = \frac{4}{7}$

ضرب x $C_1 - \frac{3}{2} C_3 = 0, C_1 = 0$

ضرب x^0 $C_0 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{3}{8} C_4 = 0, C_0 = \frac{1}{5}$

پس

$$x^4 = \frac{1}{5} P_0(x) + \frac{4}{7} P_2(x) + \frac{8}{35} P_4(x)$$

مثال ۴.۴۴. چند جمله اول بسط $f(x)$ را بر حسب چند جمله ایهای لژاندر، بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

حل. با توجه به قضیه ۴.۱۲ داریم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_0(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x(1) dx$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$C_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 0 dx + \int_0^1 x(x) dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \frac{5}{16}$$

.....

۳

$$f(x) = \frac{1}{4} P_0(x) + \frac{1}{2} P_1(x) + \frac{5}{16} P_2(x) + \dots$$

توجه ۲. قبل بیان کردیم که جواب عمومی معادله لژاندر با n که عدد درست نامنتقی باشد به فرم زیر خواهد بود.

$$y = a_1 P_n(x) + a_2 Q_n(x)$$

و $Q_n(x)$ را که توابع لژاندر نوع دوم نامیده می شود، توسط فرمول (۱۳) بیان نمودیم. حال برای سادگی در محاسبات، فرمول زیر را برای تعیین $Q_n(x)$ معرفی می کنیم. برای n زوج

$$(۲۷) \quad Q_n(x) = \frac{(-1)^{n/2} 2^n \left[\left(\frac{n}{2} \right)! \right]^2}{n!} \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right]$$

و برای n فرد

$$(۲۸) \quad Q_n(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2} 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times n} \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right]$$

و رابطه بازگشتی به فرم زیر می باشد:

$$(۲۹) \quad Q_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x Q_n(x) - \frac{n}{n+1} Q_{n-1}(x)$$

مثال ۴.۴.۵. با استفاده از فرمول (۲۹)، $Q_2(x)$ را حساب کنید.

حل. با انتخاب $n=1$ داریم

$$Q_2(x) = \frac{3}{2} x Q_1(x) - \frac{1}{2} Q_0(x) \quad (۱)$$

و با توجه به نتایج مثال ۴.۳۲.۴ داریم:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1 \quad (۲)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= \frac{3x^2}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \left(\frac{3x^2-1}{4}\right) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

معادله مهم دیگری که در ریاضیات مهندسی بخصوص در فیزیکی کوانتومی نقش مهمی دارد، معادله وابسته لژاندر می باشد که صورت کلی آن به فرم

$$(۳۰) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$$

می باشد که در آن m یک عدد صحیح است. و معادله (۳۰) مستقل از علامت جبری m می باشد. اگر $m=0$ باشد معادله (۳۰) همان معادله لژاندر (۱) است

حوابهای معادله (۳۰) را توابع وابسته لژاندر می نامیم.

دو حالت را برای حل معادله (۳۰) در نظر می گیریم:

حالت اول $m \geq 0$. با استفاده از تغییر متغیر

$$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u, \quad |x| < 1$$

$$y' = -mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u + (1-x^2)^{\frac{m}{2}}u'$$

$$y'' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}u'' - 2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u' - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u$$

$$+ 2m\left(\frac{m}{2}-1\right)x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}u$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله (۲۹) داریم

$$(۳۱) \quad (1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + (n-m)(n+m+1)u = 0$$

حال اگر m بار از معادله لژاندر

$$(۳۲) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

مشتق بگیریم به رابطه‌ای مشابه با رابطه (۳۱) می رسیم. پس جواب عمومی معادله (۳۰) بوسیله رابطه زیر داده می شود

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Y(x)}{dx^m}$$

که

$$Y(x) = a_1 P_n(x) + a_2 Q_n(x)$$

جواب عمومی معادله لژاندر (۳۲) می باشد. و جوابهای مستقل حقی معادله دیفرانسیل

(۳۰) که به توابع وابسته لژاندر نوع اول و نوع دوم موسوم هستند، عبارتند از

$$(۳۳) \quad P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

و

$$(۳۴) \quad Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}$$

تذکر ۳.

$$P_n^0(x) = P_n(x)$$

$$Q_n^0(x) = Q_n(x)$$

$$P_n^m(x) = 0, \quad m > n$$

$P_n^m(x)$ و $Q_n^m(x)$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$(۳۵) \quad P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^0(x), \quad m \geq 0$$

$$(۳۶) \quad Q_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^0(x), \quad m \geq 0$$

مشابه با چند جمله ایهای لژاندر، $P_n^m(x)$ ها نیز در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ متعامد هستند و داریم

$$(۳۷) \quad \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0, \quad n \neq k$$

و

$$(۳۸) \quad \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

تذکره ۴. $P_n^m(x)$ به ازای هر x در فاصله $[-1, 1]$ همگراست و $Q_n^m(x)$ به ازای هر x در فاصله $(-1, 1)$ همگرا می باشد.

مثال ۴.۴۶. توابع وابسته لژاندر $P_1^1(x)$ و $P_2^1(x)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به فرمول (۳۳) داریم

$$\begin{aligned} P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{dP_2(x)}{dx} \\ &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= 3x(1-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{dP_1(x)}{dx} \\ &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} x \\ &= (1-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

مثال ۴.۴۷. درستی فرمول (۳۸) را برای $P_1^1(x)$ نشان دهید.

حل.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_1^1(x)]^2 dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

از طرفی

$$\frac{2}{2 \times 1 + 1} \cdot \frac{(1+1)!}{(1-1)!} = \frac{4}{3}$$

مجموعه مسائل ۳.۴

۱. جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید

ا. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

ب. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$

۲. چند جمله ایهای زیر را به صورت ترکیب خطی از چند جمله ایهای لژاندر بیان کنید.

ا. $x^4 - 3x^2 + x$

ب. $x^3 + x - 2$

۳. مقدار انتگرالهای زیر را بدست آورید.

ا. $\int_{-1}^1 x^2 P_3(x) dx$

ب. $\int_{-1}^1 x^3 P_2(x) dx$

پ. $\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2) P_3(x) dx$

۴. چند جمله اول بسط توابع زیر را بر حسب توابع لژاندر بیان کنید.

ا. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

ب. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

۵. $Q_3(x)$ را پیدا کنید.

۶. $P_4^3(x)$ و $P_4^2(x)$ را حساب کنید.

۷. $Q_1'(x)$ و $Q_2^2(x)$ را حساب کنید.

۸. محدوده‌های $f(x) = x^2 - 1$ را به صورت مرکب خطی از چند جمله‌ای‌های نژادتر بیان کرده سپس دارای مقادیر مختلف m انتگرال زیر را بررسی کنید.

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx$$

۴.۴. روش توسعه یافته سری نوایی، روش فروبنیوس*

سازاری از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم که کاربردهای زیادی نیز دارند. دارای ضرایبی هستند که در نقطه $x=0$ تحلیلی نمی‌باشند. ولی جاسند که قصبه زیر را می‌توان در مورد آنها به کار برد.

تصه ۴.۱۳. هر معادله دیفرانسیل به فرم

$$(1) \quad y'' + \frac{g(x)}{x} y' + \frac{h(x)}{x^2} y = 0$$

که توابع $g(x)$ و $h(x)$ در نقطه $x=0$ تحلیلی باشند، لااقل دارای یک جواب به فرم

$$(2) \quad y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad c_0 \neq 0$$

خواهد بود و r می‌تواند عددی حقیقی و یا موهومی باشد و طوری انتخاب می‌شود که $C_0 \neq 0$ است.

تذکره ۱. در قصبه فوق می‌توان به جای $x-a$ نیز قرار داد

روشی که برای حل معادله (۱) به کار می‌رود به روش فروبنیوس معروف است برای حل (۱) ابتدا (۱) را به فرم زیر می‌نویسیم

$$(2) \quad x^2 y'' + x g(x) y' + h(x) y = 0$$

از طرفی

$$g(x) = g(0) + \frac{x}{1!} g'(0) + \frac{x^2}{2!} g''(0) + \dots$$

* Frobenius

$$h(x) = h(0) + \frac{x}{1!} h'(0) + \frac{x^2}{2!} h''(0) + \dots$$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r}$$

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^{m+r-2}$$

با جایگذاری روابط بالا در (۳) داریم:

$$x^r \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^m \left[g(0) + \frac{x}{1!} g'(0) + \dots \right] + \dots \right\}$$

$$(4) \quad + \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \right) \left(h(0) + \frac{x}{1!} h'(0) + \dots \right) = 0$$

حال ضرایب x های هم توان را مساوی قرار می‌دهیم تا r و C_0 ها بدست آید. چون کمترین توان x در (۴)، r می‌باشد لذا ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$[r(r-1) + r g(0) + h(0)] C_0 = 0 \quad \text{ضریب } x^r$$

و چون $C_0 \neq 0$ است پس باید

$$(5) \quad r^2 + (g(0) - 1)r + h(0) = 0$$

معادله (۵) را معادله شاخصی* می‌نامیم. با حل معادله شاخصی r بدست می‌آید و با جایگذاری r در (۴) و با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم توان C_1 ها بدست می‌آیند. ولی یکی از جوابهای معادله (۱) همیشه به فرم (۲) می‌باشد و برای بدست آوردن جواب دیگر که با جواب اول مستقل خطی باشد. - ما توجه به آنکه معادله شاخصی یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی است - سه حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول. معادله شاخصی دارای دو ریشه متمایز باشد که تعاضل آنها عدد صحیح نباشد**

* Indicial equation

** این حالت شامل ریشه‌های مختلط مزدوج نیز هست چون در این صورت تعاضل

حالت دوم. معادله شاخصی ریشه مضاعف داشته باشد.
حالت سوم. معادله شاخصی دارای دو ریشه متمایز باشد، ولی تفاضل آنها عدد صحیح باشد.

تعریف ۹.۴. در معادله دیفرانسیل

$$(6) \quad f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$$

که f_1 و f_2 و f_3 سه چندجمله‌ای می‌باشند، نقطه $x=a$ را مفرد گوئیم اگر $f_1(a) \neq 0$ باشد و چنانچه طرفین (۶) را بر ضرب y تقسیم کنیم و آنرا به فرم زیر بنویسیم

$$(7) \quad y'' + \frac{g(x)}{x-a}y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2}y = 0$$

و $g(x)$ و $h(x)$ هر دو در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند، در اینصورت نقطه $x=a$ را یک نقطه مفرد منظم گوئیم و در غیر این صورت مفرد نامنظم.

قضیه ۹.۴.۱۴. اگر در معادله دیفرانسیل (۶)، نقطه $x=0$ یک نقطه مفرد منظم باشد آنگاه معادله لااقل دارای یک جواب به فرم زیر می‌باشد.

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \quad C_0 \neq 0$$

مثال ۹.۴.۴۸. در معادله دیفرانسیل

$$(x-2)^3 x^2 y'' + 4(x-2)xy' - 3y = 0$$

$x=0$ یک نقطه مفرد منظم و $x=2$ یک نقطه مفرد نامنظم و بقیه نقاط x معمولی می‌باشند.

روش حل معادله در حالت اول.

اگر تفاضل ریشه‌های معادله شاخصی عدد صحیح نباشد، ابتدا به جای r ، r_1 را در (۴) قرار می‌دهیم و سپس با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، c_i ها را

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi, \quad r_1 - r_2 = 2bi$$

زیر می‌باشد.

پیدا می‌کنیم و جواب اول معادله به فرم

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

خواهد بود و سپس در (۴) به جای r ، r_2 قرار می‌دهیم و مجدداً با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، c_i ها را پیدا می‌کنیم و جواب دوم به فرم

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

خواهد بود و y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی هستند و جواب عمومی به فرم زیر می‌شود

$$y = Ay_1 + By_2$$

مثال ۹.۴.۴۹. معادله دیفرانسیل

$$4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. $x=0$ یک نقطه مفرد می‌باشد ($f_1(0)=0$) لذا طرفین معادله را بر ضرب y

تقسیم می‌کنیم و به فرم (۷) می‌نویسیم

$$y'' + \frac{1}{x} \cdot \frac{1-x}{2} y' - \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x^2} y = 0$$

توابع $\frac{1-x}{2}$ و $-\frac{x}{4}$ هر دو در نقطه $x=0$ تحلیلی می‌باشند، لذا $x=0$ یک نقطه مفرد منظم می‌باشد پس معادله دارای جوابی به فرم

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \quad C_0 \neq 0$$

می‌باشد با جایگذاری y و y' و y'' در معادله (۱) داریم

$$4 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^{m+r-1} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r-1}$$

$$- 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(4m+4r-2) C_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+2r+1) C_m x^{m+r} = 0 \quad (2)$$

ابتدا ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادله؛ شاخصی بدست آید.

$$r(4r-2)C_0=0$$

و چون $C_0 \neq 0$ است پس $r(4r-2)=0$ ، $r_1 = \frac{1}{2}$ ، $r_2 = 0$

حال در (۲) بجای r مقدار $\frac{1}{2}$ گذارده.

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m + \frac{1}{2})(4m)C_m x^{m-\frac{1}{2}} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+2)C_m x^{m+\frac{1}{2}} = 0$$

برای پیدا کردن c_i ها، ضرایب x های هم توان را مساوی قرار می‌دهیم.

$$4(1 + \frac{1}{2})C_1 - 2C_0 = 0 \quad , \quad C_1 = \frac{C_0}{3} \quad x^{1/2}$$

$$8(2 + \frac{1}{2})C_2 - (2+2)C_1 = 0 \quad , \quad C_2 = \frac{C_1}{5} = \frac{C_0}{3 \times 5} \quad x^{1+1/2}$$

$$12(3 + \frac{1}{2})C_3 - (4+2)C_2 = 0 \quad , \quad C_3 = \frac{C_2}{7} = \frac{C_0}{3 \times 5 \times 7} \quad x^{2+1/2}$$

.....
ضریب $x^{n+1/2}$

$$(n+1 + \frac{1}{2})[4(n+1)]C_{n+1} - 2(n+1)C_n = 0$$

رابطه؛ بازگشتی

$$C_{n+1} = \frac{C_n}{2n+3}$$

و جواب اول معادله بدترم

$$y_1 = x^{1/2} C_0 (1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3 \times 5} + \frac{x^3}{3 \times 5 \times 7} + \dots)$$

و شعاع همگرایی این سری

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = 0 \quad , \quad R_1 = \infty$$

برای بدست آوردن جواب دوم، در (۲) بجای r مقدار $r=0$ قرار می‌دهیم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(4m-2)c_m x^{m-1} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)c_m x^m = 0$$

$$1 \times 2 c_1 - c_0 = 0 \quad , \quad c_1 = \frac{c_0}{1 \times 2} \quad x^0$$

$$2(8-2)c_2 - (2+1)c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = \frac{c_1}{2^2} = \frac{c_0}{2^2 \times 2!} \quad x$$

$$3 \times 10 c_3 - 5c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = \frac{c_2}{2 \times 3} = \frac{c_0}{2^3 \times 3!} \quad x^2$$

.....
ضریب x^n

$$(n+1)[4(n+1)-2]c_{n+1} - (2n+1)c_n = 0$$

رابطه؛ بازگشتی

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{2(n+1)}$$

و جواب دوم معادله بدترم

$$y_2 = x^0 C_0 (1 + \frac{x}{2 \times 1!} + \frac{x^2}{2^2 \times 2!} + \frac{x^3}{2^3 \times 3!} + \dots)$$

و شعاع همگرایی y_2

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0 \quad , \quad R_2 = \infty$$

و جواب عمومی بدترم

$$y = Ay_1 + By_2$$

می‌باشد و به‌ارای تمام مقادیر x همگراست.*

روش حل معادله در حالت دوم:

اگر معادله، شاخصی دارای ریشه مضاعف باشد یعنی

* شعاع همگرایی جواب عمومی $R_1 \cap R_2$ می‌باشد.

$$+\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r+2} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 C_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r+2} = 0 \quad (۲)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریب کمترین توان x ، معادله شاخصی را پیدا می‌کنیم

$$(r-1)^2 C_0 = 0 \quad \text{ضریب } x^r$$

$$r_1 = r_2 = 1 \quad \text{چون } C_0 \neq 0 \text{ است پس}$$

برای بدست آوردن جواب اول معادله در (۲) بهای r ، مقدار $r=1$ را قرار می‌دهیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 C_m x^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+3} = 0$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، c_i ها را بدست می‌آوریم

$$1^2 c_1 = 0, \quad c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^2$$

$$2^2 c_2 + c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{2^2} \quad \text{ضریب } x^3$$

$$3^2 c_3 + c_1 = 0, \quad c_3 = 0 \quad \text{ضریب } x^4$$

.....

$$(n+2)^2 c_{n+2} + c_n = 0 \quad \text{ضریب } x^{n+3}$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)^2}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{(4)^2} = -\frac{c_0}{2^2 \times 4^2}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 \times 4^2 \times 6^2}$$

و تمام ضرایب فرد صفر می‌باشد، و با انتخاب $c_0 = 1$ داریم

$$y_1 = x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \right)$$

$$(g(0)-1)^2 = 4h(0), \quad r_1 = r_2 = \frac{1-g(0)}{2} = r$$

جواب اول معادله مشابه با حالت قبل محاسبه می‌شود و به‌فرم

$$y_1(x) = x^{\frac{1-g(0)}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \quad C_0 \neq 0$$

می‌باشد و برای پیدا کردن جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم یعنی جواب

دوم را به‌فرم $y_2 = u y_1$ در نظر می‌گیریم و با جایگذاری y_2 در معادله دیفرانسیل u

را تعیین می‌کنیم و فرم جواب دوم به‌صورت زیر می‌باشد

$$(۸) \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\frac{1-g(0)}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m \quad x > 0$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر است:

$$y = A y_1 + B y_2$$

مثال ۴.۵۰. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' - x y' + (x^2 + 1)y = 0 \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. چون $f_1(0) = 0$ است پس $x=0$ یک نقطه منفرد می‌باشد، لذا طرفین معادله را

بر ضریب y^n تقسیم می‌کنیم و به‌فرم (۷) می‌نویسیم

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 + 1}{x^2} y = 0$$

توانع -1 و $x^2 + 1$ در $x=0$ تحلیلی می‌باشد، پس $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است و

معادله دیفرانسیل (۱) دارای جوابی به‌فرم زیر است

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \quad C_0 \neq 0$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل (۱) داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r}$$

برای بدست آوردن جواب دوم y_2 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + x \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

y_2' و y_2'' را حساب می‌کنیم

$$y_2' = y_1' \operatorname{Ln} x + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) a_m x^m$$

$$y_2'' = y_1'' \operatorname{Ln} x + 2y_1' \frac{1}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) a_m x^{m-1}$$

با جایگذاری y_2 ، y_2' و y_2'' در معادله دیفرانسیل (۱) داریم:

$$(x^2 y_2'' - x y_2' + (x^2 + 1) y_2) \operatorname{Ln} x + 2x y_2' - 2y_2$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0$$

و چون y_1 جواب معادله است لذا ضرب $\operatorname{Ln} x$ مساوی صفر می‌باشد و داریم

$$2x \left(1 - \frac{3x^2}{2^2} + \frac{5x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{7x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \right)$$

$$- 2 \left(x - \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^7}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، ضرایب a_i را بدست می‌آوریم

$$2 - 2 = 0 \quad x \text{ ضریب}$$

$$1^2 a_1 = 0, \quad a_1 = 0 \quad x^2 \text{ ضریب}$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2^2 a_2 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2^2} \quad x^3 \text{ ضریب}$$

$$3^2 a_3 + a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \quad x^4 \text{ ضریب}$$

$$\frac{2}{2^2 \times 4^2} (5-1) + 4^2 a_4 + a_2 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{2^2 \times 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) x^6 \text{ ضریب}$$

و تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشند و جواب دوم به‌فرم زیر است

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + x \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \dots \right)$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = A y_1 + B y_2$$

مثال ۵۱.۴. معادله دیفرانسیل

$$x y'' + (1 - 2x) y' + (x - 1) y = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. نقطه $x = 0$ یک نقطه منفرد می‌باشد و معادله را به‌فرم استاندارد می‌نویسیم

$$y'' + \frac{1-2x}{x} y' + \frac{x(x-1)}{x^2} y = 0$$

توانع $1 - 2x$ و $x(x-1)$ در $x = 0$ تحلیلی می‌باشند، پس $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است.

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}$$

$$- 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+2r+1) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)^2 c_m x^{m+r-1} = 0 \quad (2)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادله شاخصی بدست آید

$$r^2 c_0 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0 \quad \text{ضریب } x^{r-1}$$

در (۲) به‌جای r مقدار صفر قرار می‌دهیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m x^{m-1} = 0$$

با تساوی قرار دادن ضرایب x های هم توان داریم

$$-c_0 + 1^2 c_1 = 0, \quad c_1 = \frac{c_0}{1!} \quad \text{ضریب } x^0$$

$$c_0 - 3c_1 + 2^2 c_2 = 0, \quad c_2 = \frac{c_0}{2!} \quad \text{ضریب } x$$

$$c_1 - 5c_2 + 3^2 c_3 = 0, \quad c_3 = \frac{c_0}{3!} \quad \text{ضریب } x^2$$

$$c_2 - 7c_3 + 4^2 c_4 = 0, \quad c_4 = \frac{c_0}{4!} \quad \text{ضریب } x^3$$

و بدقیسه معلوم است که $c_n = \frac{c_0}{n!}$ و جواب اول با انتخاب $c_0 = 1$ بدفرم زیر می باشد:

$$y_1 = x^0 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = e^x$$

در چنین مسائلی که جواب اول بدفرم سری شناخته شده ای می باشد می توان برای تعیین جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده کرد یعنی جواب دوم را بدفرم

$$y_2 = u e^x \quad (3)$$

در نظر گرفت و در معادله دیفرانسیل (۱) بجای y و y' و y'' مقادیر y_2 و y_2' و y_2'' را قرار داد و u را حساب کرد

$$e^x x u'' + 2e^x x u' + e^x x u + (1 - 2x) e^x u' + (1 - 2x) e^x u + (x - 1) e^x u = 0$$

$$x u'' + u' = 0 \quad (4)$$

و (۴) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فاقد تابع می باشد. با فرض

$$u' = z, \quad u'' = z'$$

$$x z' + z = 0$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln z + \ln x = \ln c$$

$$z = \frac{c}{x}$$

و با انتگرالگیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$u = c \ln x + \lambda \quad (5)$$

با جایگذاری (۵) در (۳) داریم

$$y_2 = c e^x \ln x + \lambda e^x$$

و جواب عمومی بدفرم زیر است:

$$y = A e^x + B e^x \ln x$$

روش حل معادله در حالت سوم:

اگر تفاضل ریشه های معادله شاخصی عدد صحیح باشد، یعنی اگر $r_1 > r_2$ ریشه های معادله شاخصی باشند $r_1 - r_2 = n$ و $n \in \mathbb{N}$ در این صورت جواب اول را متناظر با ریشه بزرگتر حساب می کنیم

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad c_0 \neq 0$$

و برای تعیین جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده می کنیم و فرم جواب دوم به صورت زیر می باشد

$$y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \quad x > 0$$

و جواب عمومی بدفرم زیر است:

$$y = A y_1 + B y_2$$

مثال ۳.۴.۵۳. معادله دیفرانسیل

$$x y'' - 2 y' + y = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. $x = 0$ یک نقطه مفرد است، لذا با تقسیم طرفین (۱) بر ضریب y'' و نوشتن

آن به فرم استاندارد داریم

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{x}{x^2} y = 0$$

توابع 2- و x در نقطه $x=0$ تحلیلی می باشند پس $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است. با جایگذاری y' و y'' در (1) داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-3)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \quad (2)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می دهیم تا معادله شاخص بدست آید.

$$r(r-3)c_0 = 0, \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 0$$

چون تفاضل ریشه ها عدد صحیح می باشد، لذا جواب اول را متناظر با ریشه بزرگتر بدست می آوریم برای این کار در (2) بجای r مقدار 3 را می گذاریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+3)m c_m x^{m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+3} = 0$$

$$4c_1 + c_0 = 0, \quad c_1 = -\frac{c_0}{4} \quad \text{ضریب } x^3$$

$$10c_2 + c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{c_0}{40} \quad \text{ضریب } x^4$$

$$18c_3 + c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{c_0}{720} \quad \text{ضریب } x^5$$

$$(n+4)(n+1)c_{n+1} + c_n = 0$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+1} = -\frac{c_n}{(n+4)(n+1)}$$

و جواب اول معادله با انتخاب $c_0 = 1$ به فرم زیر می باشد:

$$y_1 = x^3 \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{720} + \dots \right)$$

جواب دوم را به فرم زیر در نظر می گیریم

$$y_2 = k y_1 \ln x + x^0 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

و y_2' و y_2'' را حساب می کنیم

$$y_2' = k y_1' \ln x + k y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = k y_1'' \ln x + 2k y_1' \frac{1}{x} - \frac{k y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

با جایگذاری y_2 و y_2' و y_2'' در معادله دیفرانسیل (1) داریم

$$(x y_1'' - 2 y_1' + y_1) k \ln x + 2k y_1' - 3 \frac{k y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-3) a_m x^{m-1}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

ضریب $k \ln x$ برابر صفر است چون y_1 جواب معادله می باشد. پس

$$2k \left(3x^2 - x^3 + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{120} + \dots \right) - 3k \left(x^2 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} - \frac{x^5}{720} + \dots \right)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} m(m-3) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$0 a_0 = 0$$

ضریب x^{-1}

رابطه بالا به ازای جمیع مقادیر a_0 برقرار است پس a_0 به عنوان پارامتر دلخواه مساله می باشد.

$$1(1-3)a_1 + a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{a_0}{2} \quad \text{ضریب } x^0$$

$$2(2-3)a_2 + a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{a_0}{4} \quad \text{ضریب } x$$

$$6k - 3k + 0a_3 + a_2 = 0, \quad k = -\frac{a_0}{12} \quad \text{ضریب } x^2$$

رابطه بالا به ازای جمع مقادیر a_0 درست است پس a_0 نیز به عنوان پارامتر دلخواه می باشد ولی از آنجایی که جواب عمومی معادله مرتبه دوم به دو پارامتر دلخواه بستگی دارد و یک پارامتر دلخواه در جواب اول است، پس جواب دوم فقط باید به یک پارامتر دلخواه بستگی داشته باشد، لذا a_0 پارامتر اضافی است و می توان آنرا صفر اختیار کرد. ولی اگر این پارامتر اضافی را صفر اختیار نکنیم، اضافی بودن آن در جواب کاملاً مشخص می شود و خود ناپیدی بر صحت محاسبات می باشد

$$\text{ضریب } x^3 \quad -2k + \frac{3}{4}k + 4a_4 + a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{a_3}{4} - \frac{5a_0}{192}$$

$$\text{ضریب } x^4 \quad \frac{k}{4} - \frac{3k}{40} + 10a_5 + a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{a_3}{40} + \frac{13a_0}{3200}$$

و به همین ترتیب بقیه ضرایب را حساب می کنیم و

$$y_2 = -\frac{a_0}{12} y_1 \ln x + a_0 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{192} + \frac{13x^5}{3200} - \dots \right)$$

$$+ a_3 x^3 \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \dots \right)$$

همان طور که ملاحظه می کنیم ضریب a_3 همان y_1 است و چون جواب عمومی به فرم

$$y = Ay_1 + By_2$$

می باشد، لذا می توانستیم a_3 را صفر اختیار کنیم.

مثال ۴.۵۳. معادله دیفرانسیل

$$xy'' - 3y' + xy = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. نقطه $x=0$ یک نقطه منفرد می باشد، لذا معادله دیفرانسیل (۱) را به فرم استاندارد می نویسیم

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0$$

نوع ۳- و x^2 در نقطه $x=0$ تحلیلی می باشد پس $x=0$ یک نقطه منفرد منظم

است. با جایگذاری y و y' و y'' در (۱) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - 3 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-4)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0 \quad (2)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می دهیم تا معادله ناخاصی بدست آید

$$\text{ضریب } x^{r-1} \quad r(r-4)c_0 = 0, \quad r_1 = 4, \quad r_2 = 0$$

برای بدست آوردن جواب اول در (۲) به جای r مقدار ۴ را می گذاریم و سپس c_1 ها را حساب می کنیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m+4)c_m x^{m+3} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+5} = 0$$

$$1 \times 5 c_1 = 0, \quad c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^4$$

$$2 \times 6 c_2 + c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{12} \quad \text{ضریب } x^5$$

.....

$$(n+2)(n+6)c_{n+2} + c_n = 0 \quad \text{ضریب } x^{n+5}$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+6)}$$

$$c_3 = c_5 = \dots = c_{2k+1} = 0$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4 \times 8} = \frac{c_0}{4 \times 8 \times 12}$$

تمام ضرایب فرد صفر می باشد و ضرایب زوج را می توان با توجه به رابطه بازگشتی محاسبه نمود و جواب اول معادله با انتخاب $c_0 = 1$ به فرم زیر است

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$y_1 = x^4 \left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{4 \times 8 \times 12} - + \dots \right)$$

جواب دوم را به فرم

$$y_2 = k y_1 \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

در نظر می‌گیریم و y_2 ، y_2' و y_2'' را در معادله (۱) جایگذاری می‌کنیم

$$y_2' = k y_1' \ln x + k y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = k y_1'' \ln x + 2k y_1' \frac{1}{x} - \frac{k y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

$$(x y_1'' - 3 y_1' + x y_1) k \ln x + 2k y_1' - 4 \frac{k y_1}{x^2} +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-4) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

ضریب $\ln x$ مساوی صفر است زیرا y_1 جواب معادله می‌باشد پس

$$2k \left(4x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{4 \times 12} - + \dots \right) - 4k \left(x^3 - \frac{x^5}{12} + \frac{x^7}{4 \times 8 \times 12} \right.$$

$$\left. - + \dots \right) + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-4) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

$$0 a_0 = 0 \quad \text{ضریب } x^{-1}$$

که بازای جمع مقادیر a_0 رابطه بالا برقرار است پس a_0 پارامتر دلخواه می‌باشد

$$-3a_1 = 0 \quad , \quad a_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$-4a_2 + a_0 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{a_0}{4} \quad \text{ضریب } x$$

$$-3a_3 + a_1 = 0 \quad , \quad a_3 = 0 \quad \text{ضریب } x^2$$

$$4k + 0 a_4 + a_2 = 0 \quad , \quad k = \frac{-a_2}{16} \quad \text{ضریب } x^3$$

رابطه فوق بازای جمع مقادیر a_4 برقرار است پس a_4 نیز پارامتر دلخواه می‌باشد و

معادلات دیفرانسیل معمولی

مشابه با بحثی که در مثال قبل شد، این پارامتر اضافی اضافی است. و می‌توان آن را صفر اختیار کرد

$$5a_5 + a_3 = 0 \quad , \quad a_5 = 0 \quad \text{ضریب } x^4$$

و تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشند.

$$-\frac{2k}{3} + 12a_6 + a_4 = 0 \quad , \quad a_6 = -\frac{a_4}{12} - \frac{a_0}{24} \quad \text{ضریب } x^5$$

بقیه ضرایب نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شود و جواب دوم به فرم زیر می‌باشد.

$$y_2 = -\frac{a_0}{16} y_1 \ln x + a_0 \left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{24} + \dots \right) + a_4 \left(x^4 - \frac{x^6}{12} + \dots \right)$$

ملاحظه می‌کنید که ضریب a_4 همان y_1 می‌باشد لذا می‌توان a_4 را صفر اختیار نمود.

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = A y_1 + B y_2$$

مثال ۵۴.۴. معادله دیفرانسیل

$$x y'' + 2 y' + x y = 0 \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. $x=0$ یک نقطه مفرد منظم می‌باشد، با جایگذاری y ، y' و y'' در معادله

دیفرانسیل (۱) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r+1)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0 \quad (2)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادله شاخصی بدست آید

$$r(r+1)c_0 = 0 \quad , \quad r_1 = 0 \quad , \quad r_2 = -1 \quad \text{ضریب } x^{r-1}$$

برای تعیین جواب اول در (۲) به جای r مقدار صفر را می‌گذاریم و سپس c_i ها را حساب می‌کنیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)c_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} = 0$$

$$2c_1 = 0, \quad c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$6c_2 + c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{3!} \quad \text{ضریب } x$$

$$(n+2)(n+3)c_{n+2} + c_n = 0 \quad \text{ضریب } x^{n+1}$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+3)}$$

$$c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \dots$$

تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشند.

$$c_4 = -\frac{c_2}{5 \times 4} = -\frac{c_0}{5!}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{7 \times 6} = -\frac{c_0}{7!}$$

.....

و جواب اول با انتخاب $c_0 = 1$ به فرم زیر می‌باشد

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

جواب دوم را به فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$y_2 = k y_1 \ln x + x^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

y_2' و y_2'' را حساب می‌کنیم و در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$y_2' = k y_1' \ln x + k y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1) a_m x^{m-2}$$

$$y_2'' = k y_1'' \ln x + 2k y_1' \frac{1}{x} - \frac{k y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2) a_m x^{m-3}$$

در معادله (۱) جایگذاری می‌کنیم

$$(x y_1'' + 2 y_1' + x y_1) k \ln x + 2k y_1' + \frac{k y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

چون y_1 جواب معادله است، لذا ضریب $k \ln x$ برابر صفر می‌باشد و داریم

$$2k \left(-\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5 \times 3 \times 2} - \frac{x^5}{7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} + \dots \right)$$

$$+ k x^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$0 a_0 = 0 \quad \text{ضریب } x^{-2}$$

و a_0 به عنوان پارامتر دلخواه است

$$k + 0 a_1 = 0, \quad k = 0 \quad \text{ضریب } x^{-1}$$

و چون رابطه بالا به ازای جمیع مقادیر a_1 برقرار است لذا a_1 نیز پارامتر دلخواه می‌باشد ولی پارامتر اضافی است.

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2} \quad \text{ضریب } x^0$$

$$3 \times 2 a_3 + a_1 = 0, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3!} \quad \text{ضریب } x$$

$$4 \times 3 a_4 + a_2 = 0, \quad a_4 = \frac{a_0}{4!} \quad \text{ضریب } x^2$$

.....

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0 \quad \text{ضریب } x^n$$

رابطه بازگشتی

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \times 4} = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \times 5} = -\frac{a_0}{6!}$$

و بقیه ضرایب به همین ترتیب محاسبه می شوند و جواب دوم به فرم زیر می باشد

$$y_2 = x^{-1} a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right)$$

$$+ x^{-1} a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)$$

و ملاحظه می کنیم که ضریب a_1 مشابه با y_1 است و لذا می توانستیم آنرا صفر اختیار کنیم و جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y = Ay_1 + By_2$$

تذکر ۲. هرگاه ریشه های معادله شاخصی مضاعف باشند در این صورت y_2 حتماً دارای جمله لگاریتمی می باشد. ولی در حالت سوم ممکن است y_2 دارای جمله لگاریتمی نباشد مانند مثال بالا.

مجموعه مسائل ۴.۴

در مسائل زیر نشان دهید که $x=0$ یک نقطه منفرد منظم می باشد و سپس جواب عمومی هر یک را بدست آورید.

۱. $(2x^2 + x^3)y'' + (x + 3x^2)y' - (1 + 4x)y = 0$

۲. $3x^2y'' + x(2-x)y' - (2+x^2)y = 0$

۳. $5x^2y'' + xy' - (1-x^3)y = 0$

۴. $2xy'' + 5y' + xy = 0$

معادلات دیفرانسیل معمولی

۵. $3x(2+3x)y'' - 4y' + 4y = 0$

۶. $x^2(4+x)y'' + 7xy' - y = 0$

۷. $xy'' + y' + 2y = 0$

۸. $xy'' + y' + 2xy = 0$

۹. $x^2y'' - 3xy' + 4(1+x)y = 0$

۱۰. $x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0$

۱۱. $x^2y'' - x(2x+3)y' + 4y = 0$

۱۲. $x^2y'' + x(x^2-1)y' + (1-x^2)y = 0$

۱۳. $x^2y'' + x(2x-1)y' + x(x-1)y = 0$

۱۴. $x^2y'' - x^2y' + (x^2-2)y = 0$

۱۵. $x^2y'' + x(3-x^2)y' - 3y = 0$

۱۶. $x^2(x+1)y'' + x(x-4)y' + 4y = 0$

۵.۴ تابع گاما

تعریف ۴.۱۰. تابع گامای α را که با نماد $\Gamma(\alpha)$ نشان داده می شود به صورت زیر

(۱)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

تعریف می کنیم

محاسبه انتگرال بالا به ازای α های مختلف مشکل می باشد و برای α متعلق به $[1, 2]$ جدول موجود است و با استفاده از رابطه ای که در زیر اثبات می شود، $\Gamma(\alpha)$ برای $\alpha \notin [1, 2]$ را بر حسب $\Gamma(\beta)$ که $\beta \in [1, 2]$ می باشد، بیان می کنیم. با توجه به رابطه (۱) داریم،

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء.

$$u = x^{\alpha} \Rightarrow du = \alpha x^{\alpha-1} dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

و می دانیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$$

در نتیجه داریم:

$$(۲) \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

مثال ۵۵.۴. مقدار $\bar{\Gamma}(1)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطه (۱) به ازای $\alpha=1$ داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

مثال ۵۶.۴. مقدار $\Gamma(4)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \Gamma(3)$$

$$\begin{aligned} &= 3 \times 2 \Gamma(2) \\ &= 3 \times 2 \times 1 \times \Gamma(1) \\ &= 3! \end{aligned}$$

مثال ۵۷.۴. مقدار $\Gamma(5.3)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma(5.3) &= (4.3) \Gamma(4.3) \\ &= (4.3)(3.3) \Gamma(3.3) \\ &= (4.3)(3.3)(2.3) \Gamma(2.3) \\ &= (4.3)(3.3)(2.3)(1.3) \Gamma(1.3) \end{aligned}$$

و با توجه به جدول ضمیمه

$$\Gamma(1.3) = 0.897471$$

تعریف ۱۱.۴.

$$(۳) \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha!$$

مثال ۵۸.۴. مقدار $0!$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطه (۳) و مثال ۵۵.۴ داریم:

$$0! = \bar{\Gamma}(1) = 1$$

مثال ۵۹.۴. مقدار $\Gamma(3.1)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{aligned} (3.1)! &= \bar{\Gamma}(3.1+1) = (3.1) \Gamma(3.1) \\ &= (3.1)(2.1) \Gamma(2.1) \\ &= (3.1)(2.1)(1.1) \bar{\Gamma}(1.1) \end{aligned}$$

و با مراجعه به جدول داریم

$$\Gamma(1.1) = 0.951351$$

مثال ۰۴. ۶۰. مقدار $(-1.6)!$ را حساب کنید.

حل. با توجه به روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{aligned} (-1.6)! = \Gamma(-0.6) &= \frac{\Gamma(0.4)}{(-0.6)} = \frac{\Gamma(1.4)}{(-0.6)(0.4)} \\ &= \frac{0.887264}{(-0.6)(0.4)} \end{aligned}$$

مثال ۰۴. ۶۱. نشان دهید.

$$(4) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

حل. با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

با فرض

$$x = X^2 \Rightarrow dx = 2X dX$$

داریم

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-X^2} dX$$

و

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left[2 \int_0^{\infty} e^{-X^2} dX\right] \left[2 \int_0^{\infty} e^{-Y^2} dY\right]$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(X^2+Y^2)} dX dY$$

و با انتخاب

$$X = r \cos Q, \quad Y = r \sin Q, \quad dX dY = r dr dQ$$

انتگرال دوگانه فوق به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr dQ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} dQ \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dQ = \pi \end{aligned}$$

و

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال ۰۴. ۶۲. مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^4} dx \quad (1)$$

حل. با فرض

$$2x^4 = t, \quad 8x^3 dx = dt$$

انتگرال (۱) به فرم زیر نوشته می شود

$$\frac{1}{8} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-t} \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{4}}} dt = \frac{1}{4 \times 2^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

مثال ۰۴. ۶۳. مقدار انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 x^2 (\ln x)^3 dx \quad (1)$$

با فرض

$$x = e^t, \quad dx = -e^t dt$$

انتگرال (۱) به فرم زیر بیان می شود

$$-\int_0^{\infty} e^{3t} t^3 dt$$

و با انتخاب $3t = y$ داریم:

$$-\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{3}\right)^3 e^{-y} dy = -\frac{1}{3^4} \int_0^{\infty} y^{3+1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{-1}{3^4} \Gamma(4)$$

$$= \frac{-(3!)}{3^4}$$

مثال ۴.۴. با توجه به رابطه (۲) و به ازای $\alpha=0$ داریم

$$\Gamma(1) = 0 \times \Gamma(0)$$

$$1 = 0 \times \Gamma(0) = 0 \times (-1)!$$

پس $(-1)! = \infty$ و بطور کلی فاکتوریل اعداد صحیح منفی برابر ∞ می باشد.

مجموعه مسائل ۵.۴

۱. مطلوب است مقدار

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) : (A)$$

$$\frac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)} : (B)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) : (C)$$

مقدار انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 x \ln^3 x \, dx \quad . ۳۴$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \ln x \, dx \quad . ۳۵$$

$$\int_0^1 x^{\frac{5}{2}} \ln^2 x \, dx \quad . ۴۳$$

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-4x} \, dx \quad . ۵۸$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-3x^2} \, dx \quad . ۰۶$$

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{5}} e^{-2\sqrt{x}} \, dx \quad . ۰۷$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} \, dx \quad . ۰۸$$

۰۶.۴. معادله بسل، تابع بسل نوع اول

هر معادله دیفرانسیل به فرم

$$(1) \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

که در (۱) ν عددی است داده شده، یک معادله بسل نامیده می شود. ملاحظه می شود که $x=0$ یک نقطه منفرد منظم می باشد، لذا معادله (۱) دارای جوابی به فرم

$$(2) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}, \quad c_0 \neq 0$$

خواهد بود. با جایگذاری y و y' و y'' در معادله (۱) داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2}$$

$$- \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$(3) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r+\nu)(m+r-\nu) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} = 0$$

ضرب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه های معادله شاخصی را حساب می کنیم

$$(r+\nu)(r-\nu) = 0, \quad r_1 = \nu, \quad r_2 = -\nu$$

یعنی ریشه های معادله شاخصی، همیشه ν و $-\nu$ هستند و با توجه به این ریشه ها تنها وقتی $\nu=0$ باشد معادله شاخصی دارای ریشه مضاعف است و هنگامی که ν یک عدد

صحیح باشد، تفاضل ریشه‌های معادله، شاخصی عدد صحیح است و درحالی که $v \neq 0$ و عدد صحیح نباشد، تفاضل ریشه‌های معادله، شاخصی عدد صحیح نیست (بجز وقتی که v مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ باشد). همان‌طور که در بخش ۴.۴ گفته شد، در هر سه حالت، جواب اول معادله، (۱) به فرم (۲) می‌باشد و اختلاف در جواب دوم خواهد بود. حال جواب اول معادله (۱) را بدست می‌آوریم با جایگذاری $r = v$ در (۳) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2v) m c_m x^{m+v} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+v+2} = 0$$

$$(1+2v)c_1 = 0, \quad c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^{1+v}$$

$$(n+2+2v)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0 \quad \text{ضریب } x^{n+v+2}$$

رابطه بازگشتی

$$(۴) \quad c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2+2v)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

و با توجه به رابطه بازگشتی داریم:

$$c_3 = c_5 = \dots = 0$$

یعنی تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشند و برای محاسبه ضرایب زوج با فرض $n = 2k$

$(k \in \mathbb{N})$ در رابطه بازگشتی داریم:

$$c_{2k+2} = -\frac{c_{2k}}{2^2(k+1)(k+1+v)}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(1+v)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \times 2(2+v)} = \frac{c_0}{2^4 \times 2!(1+v)(2+v)}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2 \times 3(3+v)} = -\frac{c_0}{2^6 \times 3!(1+v)(2+v)(3+v)}$$

و جواب اول معادله (۱) به فرم زیر می‌باشد.

$$(۵) \quad y_1(x) = c_0 x^v \left(1 - \frac{x^2}{2^2(1+v)} + \frac{x^4}{2^4 \times 2!(1+v)(2+v)} - \frac{x^6}{2^6 \times 3!(1+v)(2+v)(3+v)} + \dots \right)$$

و چون c_0 پارامتر اختیاری است، مرسوم است که

$$c_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$$

انتخاب شود، با این انتخاب داریم:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(1+v)} = -\frac{1}{2^{2+v} \times 1! \Gamma(v+2)}$$

$$c_4 = \frac{1}{2^{4+v} \times 2! \Gamma(v+3)}$$

$$\dots$$

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+v} \times k! \Gamma(v+k+1)}$$

حال اگر این ضرایب را در (۲) قرار دهیم (یا در ۵)، یک جواب خصوصی معادله بسط بدست می‌آید و این جواب را با $J_0(x)$ نمایش می‌دهیم

$$(۶) \quad J_0(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)} x^{2m}$$

این جواب معادله، بسط، معروف به تابع بسط نوع اول از مرتبه v بوده و به ازای تمام مقادیر x همگراست، زیرا با توجه به رابطه بازگشتی (۴) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+2}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+2)(n+2+2v)} \right| = 0$$

و در نتیجه $R = \infty$ می‌باشد.

توجه. حال جواب متناظر با $r_2 = -v$ را حساب می‌کنیم، با جایگذاری $r = -v$ در (۳)

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-2v)c_m x^{m-v} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+2-v} = 0 \quad \text{داریم}$$

ضرب x^{1-v} $(1-2v)c_1 = 0, c_1 = 0$

ضرب x^{n+2-v} $(n+2)(n+2-2v)c_{n+2} + c_n = 0$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2-2v)}$$

و چون $c_1 = 0$ است پس تمام ضرایب فرد مساوی صفر می باشد و برای محاسبه ضرایب زوج

$$c_{2k+2} = -\frac{c_{2k}}{2^2(k+1)(k+1-v)}$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(1-v)}$$

$$c_4 = -\frac{c_0}{2^2 \times 2!(2-v)} = -\frac{c_0}{2^4 \times 2!(1-v)(2-v)}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2(2+1)(3-v)} = -\frac{c_0}{2^6 \times 3!(1-v)(2-v)(3-v)}$$

.....

و جواب دوم معادله (۱) به فرم

$$y_2(x) = c_0 x^{-v} \left(1 - \frac{x^2}{2^2(1-v)} + \frac{x^4}{2^4 \times 2!(1-v)(2-v)} - \frac{x^6}{2^6 \times 3!(1-v)(2-v)(3-v)} + \dots \right) \quad (۷)$$

ملاحظه می شود که وقتی v یک عدد صحیح غیرمنفی است، یکی از مخرجهای (۷) صفر می شود و y_2 بی معنی است لذا وقتی که v عدد صحیح باشد همواره مقدار k در جواب دوم فرمول

$$y_2 = ky_1 \ln x + x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

مخالف صفر خواهد بود.

حال اگر در فرمول (۶) به جای v مقدار $-v$ قرار دهیم، داریم

$$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m-v} m! \Gamma(m-v+1)} x^{2m}$$

قضیه ۰۴.۱۵. جواب عمومی معادله بسل (۱) به ازای $v \neq 0$ مخالف عدد صحیح به فرم زیر می باشد.

$$(۸) \quad y(x) = AJ_v(x) + BJ_{-v}(x), \quad x \neq 0.$$

قضیه ۰۴.۱۶. هرگاه $v = n$ (عدد صحیح) باشد، آنگاه

$$(۹) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

اثبات. با توجه به فرمول (۶) و به ازای $v = -n$ داریم

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m-n} m! \Gamma(m-n+1)} x^{2m-n}$$

و می دانیم

$$\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$$

و چون فاکتوریل اعداد صحیح منفی، برابر بی نهایت است پس جمع بندی از $m=n$ شروع می شود و

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m-n} m! (m-n)!} x^{2m-n}$$

حال با فرض $k = m - n$ داریم

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{2^{2k+n} (k+n)! k!} x^{2k+n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} (k+n)! k!} x^{2k+n} = (-1)^n J_n(x).$$

قضیه فوق نشان می دهد که وقتی v مساوی صفر یا عددی صحیح باشد در این صورت $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ بستگی خطی دارند و جواب عمومی معادله بسل (۱) را نمی توان به فرم (۸) نوشت. در بخش بعد در مورد جواب عمومی معادله بسل به ازای $v = n$ صحبت خواهیم کرد. در زیر بعضی از روابط مهم بین توابع بسل را که در کاربردهای

مهندسی اهمیت دارند بیان داشته و اثبات می‌کنیم.

(آ) : نشان دهید.

$$(10) \quad [x^v J_0(x)]' = x^v J_{v-1}(x)$$

اثبات. با توجه به فرمول (۶) داریم

$$x^v J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)} x^{2m+2v}$$

$$[x^v J_0(x)]' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2(m+v)}{2^{2m+v} m! \Gamma(m+v)} x^{2m+2v-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^v}{2^{2m+v-1} m! \Gamma(v-1+m+1)} x^{2m+v-1}$$

$$= x^v J_{v-1}(x)$$

(ب) : نشان دهید

$$(11) \quad [x^{-v} J_0(x)]' = -x^{-v} J_{v+1}(x)$$

اثبات. تمرین شماره ۱

(ب) : روابط بازگشتی

$$(12) \quad J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x)$$

$$(13) \quad J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) = 2J'_v(x)$$

اثبات. با توجه به فرمولهای (۱۰) و (۱۱) داریم

$$(a) \quad v x^{v-1} J_0(x) + x^v J'_0(x) = x^v J_{v-1}(x)$$

$$(b) \quad -v x^{v-1} J_0(x) + x^v J'_0(x) = -x^v J_{v+1}(x)$$

طرفین (a) را در x^{-v} و طرفین (b) را در x^v ضرب می‌کنیم، داریم

$$(a') \quad J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x)$$

$$(b') \quad J'_v(x) = -J_{v+1}(x) + \frac{v}{x} J_v(x)$$

با کم کردن دو رابطه (a') و (b') داریم

$$J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x)$$

و با جمع کردن دو رابطه (a') و (b') داریم

$$J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) = 2J'_v(x).$$

مثال ۰۴، ۰۶۵، ۰۴. $J_4(x)$ را برحسب $J_1(x)$ و $J_0(x)$ بنویسید.

حل. با استفاده از فرمول (۱۲)، ابتدا $J_4(x)$ را برحسب $J_3(x)$ و $J_2(x)$ نوشته

$$J_4(x) = \frac{6}{x} J_3(x) - J_2(x)$$

حال مجدداً از فرمول (۱۲) استفاده می‌کنیم و $J_3(x)$ را برحسب $J_2(x)$ و $J_1(x)$

می‌نویسیم

$$J_4(x) = \frac{6}{x} \left[\frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x) \right] - J_2(x)$$

$$= \left(\frac{24}{x^2} - 1 \right) J_2(x) - \frac{6}{x} J_1(x)$$

و بالاخره $J_2(x)$ را برحسب $J_1(x)$ و $J_0(x)$ می‌نویسیم و داریم

$$J_4(x) = \left(\frac{24}{x^2} - 1 \right) \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x) \right] - \frac{6}{x} J_1(x)$$

$$= \left(\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x} \right) J_1(x) - \left(\frac{24}{x^2} - 1 \right) J_0(x).$$

(ت) : نشان دهید

$$(14) \quad \int x^v J_{v-1}(x) dx = x^v J_0(x) + c$$

اثبات. از فرمول (۱۰) داریم

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x)$$

با انتگرالگیری داریم

$$\int x^v J_{v-1}(x) dx = x^v J_v(x) + c$$

(ث) : نشان دهید

$$(۱۵) \quad \int x^v J_{v+1}(x) dx = -x^v J_v(x) + c.$$

اثبات. از فرمول (۱۱) داریم

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = -x^v J_{v+1}(x)$$

با انتگرالگیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\int x^v J_{v+1}(x) dx = -x^v J_v(x) + c$$

(ج) : نشان دهید

$$(۱۶) \quad \int J_{v+1}(x) dx = \int J_{v-1}(x) dx - 2J_v(x)$$

اثبات. کافیست از طرفین رابطه (۱۳)، انتگرال بگیریم.

مثال ۴.۶۶. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int J_3(x) dx$$

حل. با توجه به فرمول (۱۶) داریم

$$\int J_3(x) dx = \int J_1(x) dx - 2J_2(x)$$

از طرفی با انتخاب $v=0$ در فرمول (۱۵) داریم

$$\int J_1(x) dx = -J_0(x) + c$$

$$\int J_3(x) dx = -J_0(x) - 2J_2(x) + c$$

پس

مثال ۴.۶۷. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int x^3 J_0(x) dx$$

حل.

$$\int x^3 J_0(x) dx = \int x^2 (x J_0(x)) dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء و با فرض

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$x J_0(x) dx = dv \Rightarrow v = x J_1(x)$$

و

$$\int x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) - 2 \int x^2 J_1(x) dx$$

$$= x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x)$$

$$= x^3 J_1(x) - 2x^2 \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x) \right]$$

$$= (x^3 - 4x) J_1(x) + 2x^2 J_0(x)$$

مثال ۴.۶۸. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int x^2 J_2(x) dx$$

حل.

$$\int x^2 J_2(x) dx = \int x^3 (x^{-1} J_2(x)) dx$$

با استفاده از فرمول (۱۵) و روش جزء به جزء داریم

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$$

$$x^{-1} J_2(x) dx = dv \Rightarrow v = -x^{-1} J_1(x)$$

و

$$\int x^2 J_2(x) dx = -x^2 J_1(x) + 3 \int x J_1(x) dx$$

و برای محاسبه انتگرال $\int x J_1(x) dx$ مجدداً از فرمول (۱۵) و روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$J_1(x) dx = dv \Rightarrow v = -J_0(x)$$

و در نتیجه

$$\int x^2 J_2(x) dx = -x^2 J_1(x) - 3x J_0(x) + 3 \int J_0(x) dx$$

مجموعه مسائل ۰۴

۱. فرمول (۱۱) را اثبات کنید.

۲. نشان دهید

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

۳. نشان دهید

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right)$$

۳

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x} \right)$$

۴. نشان دهید

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{(3-x^2) \sin x - 3x \cos x}{x^2} \right)$$

$$J_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3x \sin x + (3-x^2) \cos x}{x^2} \right)$$

۵. $J_3(x)$ را برحسب $J_0(x)$ و $J_1(x)$ بنویسید.

۶. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف $\int x^3 J_3(x) dx$

ب $\int_0^1 x^3 J_0(x) dx$

ب $\int x^2 J_0(x) dx$

۰۷. $J_0(x)$ را برحسب $J_0(x)$ و $J_1(x)$ بنویسید.

۰۷.۴ تابع بسل نوع دوم

در این بخش می‌خواهیم جواب دوم معادله بسل، وقتی $v = n$ باشد را بدست آوریم. بر طبق قضیه ۰۴.۱۶ می‌دانیم $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ بستگی خطی دارند، لذا پایه‌ای برای جواب عمومی تشکیل نمی‌دهند. برای بدست آوردن جواب دوم که با جواب اول $(J_n(x))$ مستقل خطی باشد از روش توسعه یافته سری توانی استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $n = 0$ است، در این صورت $J_0(x)$ یک جواب است و جواب دیگر که با $J_0(x)$ مستقل خطی باشد به‌فرم زیر خواهد بود.*

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

برای پیدا کردن ضرایب a_m ، y_2 و y_2' و y_2'' را حساب کرده و در معادله بسل با اندیس صفر قرار می‌دهیم.

$$y_2'(x) = J_0'(x) \ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y_2''(x) = J_0''(x) \ln x + 2 \frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

با جایگذاری در معادله:

$$x y'' + y' + x y = 0$$

داریم:

$$(1) \quad x J_0''(x) \ln x + 2 J_0'(x) + J_0'(x) \ln x + x J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

چون $J_0(x)$ جواب معادله می‌باشد، پس

$$\ln x (x J_0''(x) + J_0'(x) + x J_0(x)) = 0$$

* در این حالت معادله، شاخصی دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = 0$ بوده و معادله بسل به‌فرم $x y'' + y' + x y = 0$ می‌باشد.

حال مشتق $J_0(x)$ را حساب می‌کنیم

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}m!(m-1)!} x^{2m-1}$$

یا جایگذاری در (۱) داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m-2}m!(m-1)!} x^{2m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

حال ضرایب x های هم توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$a_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$-1 + 4a_2 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad \text{ضریب } x$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(2n+1)^2 a_{2n+1} + a_{2n-1} = 0 \quad \text{ضریب } x^{2n}$$

و چون $a_1 = 0$ است پس $a_3 = 0$ و $a_5 = 0$... تمام ضرایب فرد صفر می‌باشند.
حال ضریب x^{2n+1} را حساب می‌کنیم

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n+1)!n!} + (2n+2)^2 a_{2n+2} + a_{2n} = 0$$

بازای $n=1$

$$\frac{1}{4 \times 2} + 16a_4 + a_2 = 0, \quad a_4 = -\frac{3}{128}$$

و بطور کلی داریم

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

و با فرض

$$I_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$y_2(x) = J_0(x) L_n x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} L_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

توجه. اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی باشند در این صورت $c_1 y_1 + c_2 y_2$ مقدار ثابت \neq

$$\frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{y_1} = c_1 + c_2 \frac{y_2}{y_1} \neq \text{مقدار ثابت}$$

حال اگر به‌حای جواب دوم، ترکیب خطی از جواب‌های اول و دوم به‌صورت $a(y_2(x) + bJ_0(x))$ را در نظر بگیریم، با $a = \frac{2}{\pi}$ و $b = \gamma - Ln2$ که γ ثابت اولر* می‌باشد و این جواب را با $Y_0(x)$ نمایش می‌دهیم

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} (y_2(x) + J_0(x)) (\gamma - Ln2) \quad \text{یا}$$

$$(۲) Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [J_0(x) (Ln \frac{x}{2} + \gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} L_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}]$$

این جواب معادلهٔ بسل به تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ صفر یا تابع نیومن مرتبهٔ صفر معروف است حال اگر $v=n$ یک عدد صحیح و مخالف صفر باشد، در این صورت $J_n(x)$ جواب اول معادلهٔ بسل خواهد بود و جواب دوم که با جواب اول مستقل خطی باشد را به‌فرد زیر در نظر می‌گیریم **

$$y_2(x) = kJ_n(x) L_n x + x^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

برای پیدا کردن ضرایب k و a_m باید y_2 و y_2' را در معادلهٔ بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

جایگذاری کرد و سپس به‌حای جواب y_2 ، جواب زیر را که با $J_n(x)$ مستقل خطی است

در نظر گرفته

$$Y_n(x) = a(y_2 + bJ_n(x))$$

که در آن $a = \frac{2}{\pi}$ و $b = \gamma - Ln2$ و این جواب به‌صورت زیر می‌باشد

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} (Ln \frac{x}{2} + \gamma) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m-n}$$

$$(۳) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (L_m + L_{m+n})}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n}$$

* $\gamma = 0.57721566490$

معادلات دیفرانسیل معمولی

۱) $L_0 = 0, L_p = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}, P = 1, 2, \dots$

اما بطوری که ملاحظه کردیم، جواب دوم با توجه به اینکه v یک عدد صحیح باشد یا غیر صحیح به دو فرم متفاوت بیان شد، حال می‌خواهیم شکلی از جواب دوم را ارائه دهیم که به ازای تمام مقادیر v برقرار باشد.

۲) $Y_v(x) = \frac{1}{\sin v\pi} [J_v(x) \cos v\pi - J_v(x)]$, $v \neq 0, 1, 2, \dots$
 ۳) $(Y_n(x)) = \lim_{v \rightarrow n} Y_v(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

این جواب معادلهٔ بسل به تابع بسل نوع دوم از مرتبهٔ v یا تابع نیومن مرتبهٔ v معروف است.

تذکره در حالتی که v یک عدد غیر صحیح باشد $Y_v(x)$ ترکیب خطی از $J_v(x)$ و $J_{-v}(x)$ می‌باشد پس با $J_v(x)$ مستقل خطی است و می‌تواند به عنوان جواب دوم تلقی گردد. و اگر $v = 0$ باشد در این صورت $Y_0(x)$ به صورت $\frac{0}{0}$ درآمده که با استفاده از قاعدهٔ هسپیتال، فرمول (۲) بدست می‌آید و اگر v یک عدد صحیح باشد در این صورت $\sin n\pi$ مساوی صفر است و اگر $n = 2k$ باشد در این صورت $\cos 2k\pi$ مساوی یک است و از طرفی $J_{-2k}(x) = (-1)^{2k} J_{2k}(x)$ پس $Y_{2k}(x)$ به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و اگر $v = 2k + 1$ باشد، $\cos(2k + 1)\pi$ مساوی منهای یک خواهد بود. و $J_{-(2k+1)}(x) = -J_{2k+1}(x)$ که $Y_{2k+1}(x)$ نیز به فرم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و در هر حال با استفاده از قاعدهٔ هسپیتال فرمول (۳) را خواهیم داشت. البته با توجه به

روابط زیر $\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma$ (۵)

(۶) $\lim_{p \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - \ln p) = 0.57721566490 \dots$

(۷) $\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} - \gamma$

* در این حالت ریشه‌های معادلهٔ شاخصی عبارتند از $r_1 = n, r_2 = -n$ و معادلهٔ بسل به فرم $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$ می‌باشد.

معادلات دیفرانسیل معمولی

قضیهٔ ۱۷.۰۴. جواب عمومی معادلهٔ بسل

$x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2) y = 0$

به فرم زیر می‌باشد

$y(x) = A J_v(x) + B Y_v(x)$

مثال ۱۷.۰۴.۶۹. جواب عمومی معادلهٔ زیر را بر حسب توابع بسل بنویسید.

(۱) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 4) y = 0$

حل. معادله (۱)، معادله بسل با اندیس ۲ می‌باشد، لذا بر طبق قضاوت ۱۷.۰۴ داریم

$y(x) = A J_2(x) + B Y_2(x)$

مثال ۱۷.۰۴.۷۰. جواب عمومی معادلهٔ زیر را بر حسب توابع بسل بنویسید.

(۱) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \frac{1}{9}) y = 0$

حل. معادله (۱)، معادله بسل با اندیس $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

$y(x) = A J_{1/3}(x) + B Y_{1/3}(x)$

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ بسل

(آ): معادلهٔ دیفرانسیل به صورت کلی

(۸) $x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - v^2) y = 0$

با استفاده از تغییر متغیر $\lambda x = z$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات.

$z = \lambda x, dz = \lambda dx$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \lambda \frac{dy}{dz}$

$y'' = \lambda \frac{d^2 y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} = \lambda^2 \frac{d^2 y}{dz^2}$

با جایگذاری در (۸) داریم

$$x^2 \lambda^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + x \lambda \frac{dy}{dz} + (\lambda^2 x^2 - v^2) y = 0$$

یا

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - v^2) y = 0 \quad (۹)$$

که معادلهٔ بسل با تابع y و متغیر z می‌باشد لذا جواب عمومی معادلهٔ (۹) به فرم زیر است:

$$y = AJ_v(z) + BY_v(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۸) عبارت است از:

$$y(x) = AJ_v(\lambda x) + BY_v(\lambda x)$$

(ب) : معادلهٔ دیفرانسیل به صورت کلی

$$4x^2 y'' + 4x y' + (x - v^2) y = 0 \quad (۱۰)$$

با استفاده از تغییر متغیر $z = x^{1/2}$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات.

$$z = x^{1/2} \quad , \quad dz = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{2} x^{-1/2} \frac{d^2 y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \\ = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4} x^{-1} \frac{d^2 y}{dz^2}$$

با جایگذاری در (۱۰) داریم

$$x \frac{d^2 y}{dz^2} - x^{1/2} \frac{dy}{dz} + 2x^{1/2} \frac{dy}{dz} + (x - v^2) y = 0$$

یا

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - v^2) y = 0 \quad (۱۱) \\ y = AJ_v(z) + BY_v(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۰) به فرم زیر می‌باشد:

$$y(x) = AJ_v(x^{1/2}) + BY_v(x^{1/2})$$

(پ) : معادلهٔ دیفرانسیل به صورت کلی

$$x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - v^2) y = 0 \quad (۱۲)$$

با استفاده از تغییر متغیر $z = x^2$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات.

$$z = x^2 \quad , \quad dz = 2x dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = 2x \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = 2 \frac{dy}{dz} + 4x^2 \frac{d^2 y}{dz^2}$$

با جایگذاری در (۱۲) داریم

$$4x^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2x^2 \frac{dy}{dz} + 2x^2 \frac{dy}{dz} + 4(x^4 - v^2) y = 0$$

یا

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - v^2) y = 0 \quad (۱۳)$$

که (۱۳) معادلهٔ بسل با اندیس v می‌باشد و جواب عمومی (۱۳) به فرم زیر است:

$$y = AJ_v(z) + BY_v(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۲) عبارت است از:

$$y = AJ_v(x^2) + BY_v(x^2)$$

(ت) : معادلهٔ دیفرانسیل به صورت کلی

$$x y'' + (1 + 2v) y' + x y = 0 \quad (۱۴)$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{-v}u$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد (u تابعی از x است).

اثبات.

$$y = x^{-v}u \Rightarrow y' = -vx^{-v-1}u + x^{-v}u'$$

$$y'' = v(v+1)x^{-v-2}u - 2vx^{-v-1}u' + x^{-v}u''$$

با جایگذاری y و y' و y'' در (۱۴) داریم

$$x^{-v-1}(x^2u'' + xu' + x^2u - v^2u) = 0$$

یا

$$(15) \quad x^2u'' + xu' + (x^2 - v^2)u = 0$$

که معادلهٔ (۱۵)، معادلهٔ بسل با تابع u و با اندیس v می‌باشد و جواب عمومی (۱۵) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$u = AJ_v(x) + BY_v(x)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۴) عبارت است از:

$$y = x^{-v}(AJ_v(x) + BY_v(x))$$

(ث): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$(16) \quad y'' + \left(1 + \frac{1-4v^2}{4x^2}\right)y = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{1/2}u$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات

$$y = x^{1/2}u, \quad y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + x^{1/2}u'$$

$$y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}u + x^{-1/2}u' + x^{1/2}u''$$

با جایگذاری y و y' و y'' در (۱۶) داریم

$$x^{1/2}u'' + x^{-1/2}u' - \frac{1}{4}x^{-3/2}u + \left(1 + \frac{1-4v^2}{4x^2}\right)x^{1/2}u = 0$$

$$x^{5/2}u'' + x^{3/2}u' + \left(-\frac{1}{4} + x^2 + \frac{1}{4} - v^2\right)x^{1/2}u = 0$$

$$x^{1/2}[x^2u'' + xu' + (x^2 - v^2)u] = 0$$

و

$$(17) \quad x^2u'' + xu' + (x^2 - v^2)u = 0$$

معادلهٔ (۱۷)، معادلهٔ بسل با تابع u و اندیس v می‌باشد و جواب عمومی (۱۷) عبارت است از:

$$u = AJ_v(x) + BY_v(x)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۶) به‌فرم زیر می‌باشد.

$$y = x^{1/2}[AJ_v(x) + BY_v(x)]$$

(ج): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$(18) \quad x^2y'' + (1-2v)xy' + v^2(x^{2v} + 1 - v^2)y = 0$$

یا استفاده از تغییر متغیر

$$y = x^v u, \quad x^v = z$$

قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات.

$$y = x^v u \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = vx^{v-1}u + x^v \frac{du}{dx}$$

$$y'' = v(v-1)x^{v-2}u + 2vx^{v-1} \frac{du}{dx} + x^v \frac{d^2u}{dx^2}$$

از طرفی

$$x^v = z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = vx^{v-1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = vx^{v-1} \frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = v(v-1)x^{v-2} \frac{du}{dz} + v^2x^{2v-2} \frac{d^2u}{dz^2}$$

و

$$y' = vx^{v-1}u + vx^{2v-1} \frac{du}{dz}$$

$$y'' = v(v-1)x^{v-2}u + 2v^2x^{2v-2}\frac{du}{dz} + v(v-1)x^{2v-2}\frac{du}{dz} + v^2x^{3v-2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

در معادله جایگذاری می‌کنیم

$$v^2x^v [x^{2v}\frac{d^2u}{dz^2} + x^v\frac{du}{dz} + (x^{2v} - v^2)u] = 0$$

یا

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - v^2)u = 0 \quad (19)$$

معادله (۱۹)، معادلهٔ بسل با تابع u و متغیر z و اندیس v می‌باشد و جواب عمومی (۱۹) به‌فرم زیر است

$$u = AJ_v(z) + BY_v(z)$$

و جواب عمومی معادله (۱۸) عبارت است از:

$$y = x^v [AJ_v(x^v) + BY_v(x^v)]$$

(ج): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$y'' + ax^b y = 0 \quad (20)$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$y = x^{1/2}u, \quad z = \frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2}$$

قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد و جواب عمومی (۲۰) به‌فرم زیر است:

$$y = x^{1/2} [AJ_{1/b+2}(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2}) + BY_{1/b+2}(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2})]$$

اثبات. تعریف شماره ۱

(ج): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$(21) \quad x^2 y'' + (1 - 2v)x y' + (a^2 b^2 x^{2a} + v^2 - c^2 a^2)y = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$y = x^v u, \quad z = b x^a$$

قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات.

$$y = x^v u \Rightarrow y' = v x^{v-1} u + x^v u'$$

$$y'' = v(v-1)x^{v-2}u + 2vx^{v-1}u' + x^v u''$$

با جایگذاری y ، y' و y'' در (۲۱) داریم

$$(22) \quad x^2 u'' + x u' + a^2 (b^2 x^{2a} - c^2) u = 0$$

حال از تغییر متغیر $z = b x^a$ استفاده می‌کنیم

$$z = b x^a \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a b x^{a-1}$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = a b x^{a-1} \frac{du}{dz}$$

$$u'' = a(a-1)b x^{a-2} \frac{du}{dz} + a^2 b^2 x^{2a-2} \frac{d^2u}{dz^2}$$

با جایگذاری در (۲۲) داریم

$$(23) \quad z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - c^2) u = 0$$

و معادله (۲۳) یک معادلهٔ بسل با تابع u و متغیر z و اندیس c می‌باشد و جواب

عمومی (۲۳) به‌فرم زیر است:

$$u = AJ_c(z) + BY_c(z)$$

و جواب عمومی معادله (۲۱) عبارت است از:

$$(24) \quad y = x^v [AJ_c(b x^a) + BY_c(b x^a)]$$

مثال ۷۱.۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1) \quad y'' + x y = 0$$

را با استفاده از تغییر متغیر زیر حل کنید.

و جواب عمومی (۱) عبارت است از*

$$y = x^{1/2} \left[A J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + B Y_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right]'$$

مثال ۷۲.۴. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + (x^2 + \frac{1}{4}) y = 0 \quad (1)$$

را با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{1/2} u$ حل کند.

حل.

$$y = x^{1/2} u \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} u + x^{1/2} u'$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2} u + x^{-1/2} u' + x^{1/2} u''$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$x^{5/2} u'' + x^{3/2} u' + x^{5/2} u = 0$$

$$x^{1/2} [x^2 u'' + x u' + x^2 u] = 0$$

$$x^2 u'' + x u' + x^2 u = 0 \quad (2)$$

(۲) معادله بسل با تابع u و اندیس صفر می‌باشد و جواب عمومی (۲) به‌فرم زیر است

$$u = A J_0(x) + B Y_0(x)$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از**

$$y = x^{1/2} (A J_0(x) + B Y_0(x))$$

مثال ۷۳.۴. معادله دیفرانسیل

* مثال ۷۱.۴. حالت خاصی از فرمول (۲۵) می‌باشد با $a = b = 1$

** مثال ۷۲.۴. حالت خاصی از فرمول (۱۶) می‌باشد با $\nu = 0$

$$y = x^{1/2} u, \quad z = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

حل

$$y = x^{1/2} u, \quad y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} u + x^{1/2} u'$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2} u + x^{-1/2} u' + x^{1/2} u''$$

از طرفی

$$z = \frac{2}{3} x^{3/2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = x^{1/2}$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = x^{1/2} \frac{du}{dz}$$

$$u'' = \frac{1}{2} x^{-1/2} \frac{du}{dz} + x \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$y'' = \frac{3}{2} z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{3}{2} \frac{du}{dz} - \frac{1}{6z} u$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$\frac{5}{2} z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{3}{2} \frac{du}{dz} + \frac{3}{2} (z - \frac{1}{9z}) u = 0$$

با

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - \frac{1}{9}) u = 0 \quad (2)$$

(۲) معادله بسل با تابع u و متغیر z و اندیس $\frac{1}{3}$ می‌باشد و جواب عمومی (۲) به‌فرم

زیر است:

$$u = A J_{1/3}(z) + B Y_{1/3}(z)$$

$$xy'' - y' + xy = 0 \quad (1)$$

را با استفاده از تغییر متغیر $y = xu$ حل کنید.

حل

$$y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \\ y'' = 2u' + xu''$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - 1)u = 0$$

که معادله بسل یا تابع u و اندیس یک می باشد و جواب عمومی آن به فرم زیر است:

$$u = AJ_1(x) + BY_1(x)$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از*

$$y = x(AJ_1(x) + BY_1(x))$$

مثال ۴. ۴. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x(1 - 2x \tan x) y' - (x \tan x + v^2) y = 0 \quad (1)$$

را با استفاده از تغییر متغیر $y = u/\cos x$ حل کنید.

حل

$$y = u \sec x \Rightarrow y' = u' \sec x + u \sec x \tan x$$

$$y'' = u'' \sec x + 2u' \sec x \tan x + u(\sec x + 2 \sec x \tan^2 x)$$

با جایگذاری در معادله داریم

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - v^2)u = 0$$

که معادله بسل یا ندیس v می باشد و جواب عمومی آن به فرم زیر است:

$$u = AJ_v(x) + BY_v(x)$$

و جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از:

$$y = \frac{1}{\cos x} [AJ_v(x) + BY_v(x)]$$

* مثال ۴. ۴. حالت خاصی از فرمول (۱۴) می باشد با $v = -1$

توابع بسل پیراسته*

می خواهیم معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + c^2)y = 0 \quad (25)$$

را حل کنیم. با توجه به فرمول (۲۱) حالت (ح) و با انتخاب

$$v = 0, a = 1, b^2 = i^2 = -1, (i = \sqrt{-1})$$

داریم

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + c^2)y = 0$$

و با توجه به جواب عمومی که با فرمول (۲۴) بیان شده، داریم:

$$y = AJ_c(ix) + BY_c(ix)$$

در نتیجه $J_c(ix)$ یک جواب معادله (۲۵) می باشد، حال اگر این جواب را در i^c

ضرب کنیم $i^{-c} J_c(ix)$ نیز یک جواب معادله (۲۵) خواهد بود و آنرا با $I_c(x)$

نمایش می دهیم

$$I_c(x) = i^{-c} J_c(ix) = e^{c\pi/2} J_c(ix) \quad ** \quad (26)$$

تابع $I_c(x)$ را تابع بسل پیراسته نوع اول مرتبه c گویند و داریم

$$I_c(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+c} m! \Gamma(m+v+1)} x^{2m+c} \quad (27)$$

و جواب دوم معادله (۲۵) به فرم زیر بیان می شود

$$k_c(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_c(x) - I_c(x)}{\sin c\pi} \right], & c \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{v \rightarrow c} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_v(x) - I_v(x)}{\sin v\pi} \right], & c = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (28)$$

$k_c(x)$ ، تابع بسل پیراسته نوع دوم از مرتبه c نامیده می شود.

$$* * \text{ زیرا می دانیم } (\cos Q + i \sin Q)^n = \cos nQ - i \sin nQ$$

$$\text{با انتخاب } Q = \frac{\pi}{2}, c = n \text{ داریم } i^c = \cos \frac{c\pi}{2} - i \sin \frac{c\pi}{2} = e^{-c\pi/2}$$

Modified Bessel functions

قضیه ۱۸.۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل
 $x^2 y'' + x y' - (x^2 + v^2) y = 0$
 به فرم زیر بیان می شود.

$$y = A I_v(x) + B k_v(x).$$

مثال ۷۵.۴. نشان دهید.

$$I_{v+1}(x) = I_{v-1}(x) - \frac{2v}{x} I_v(x) \quad * \quad (29)$$

حل. می دانیم

$$J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v-1}(x)$$

حال اگر در فرمول بالا به جای x قرار دهیم ix ، داریم

$$J_{v+1}(ix) = -\frac{2vi}{x} J_v(ix) - J_{v-1}(ix)$$

و با استفاده از تعریف $I_v(x) = i^{-v} J_v(ix)$ داریم

$$i^{v+1} I_{v+1}(x) = -\frac{2vi}{x} i^v I_v(x) - i^{v-1} I_{v-1}(x)$$

ل

$$I_{v+1}(x) = -\frac{2v}{x} I_v(x) + I_{v-1}(x)$$

توابع بسل نوع سوم مرتبه v یا توابع هانگل اول و دوم مرتبه v به صورت زیر تعریف می شوند.

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + i Y_v(x)$$

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - i Y_v(x)$$

که جوابهایی از معادله بسل می باشند که به ازای x های حقیقی، مختلطند.

* فرمول (۲۹) را رابطه بازگشتی، توابع بسل پیراسته نوع اول گوئیم.

مجموعه مسائل ۷.۴.

۱. حالت (ج) را اثبات کنید.
۲. نشان دهید معادله دیفرانسیل

$$y'' + (e^x - k^2) y = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$u = 2e^{x/2}, \quad e^x = u^2/4$$

قابل تبدیل به معادله بسل می باشد و جواب عمومی به فرم زیر بیان می شود:

$$y = A J_{2k}(2e^{x/2}) + B Y_{2k}(2e^{x/2})$$

۳. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + (e^x - 9) y = 0 \quad \text{آ}$$

$$y'' + (e^x - \frac{1}{4}) y = 0 \quad \text{ب}$$

$$y'' + (e^x - \frac{1}{9}) y = 0 \quad \text{پ}$$

معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تغییر متغیر داده شده حل کنید.

$$y'' + e^{2x} y = 0, \quad u = e^x \quad \text{۴}$$

$$x^2 y'' + x y' + (9x^2 - 4) y = 0, \quad z = 3x \quad \text{۵}$$

$$x^2 y'' + x y' + (3x^2 - 1) y = 0, \quad z = \sqrt{3x} \quad \text{۶}$$

$$4x^2 y'' + 4x y' + (x - 3) y = 0, \quad z = x^{1/2} \quad \text{۷}$$

$$x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - 8) y = 0, \quad z = x^2 \quad \text{۸}$$

$$x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - 1) y = 0, \quad z = x^2 \quad \text{۹}$$

$$x y'' + 5 y' + x y = 0 \quad , \quad y = x^{-2} u \quad .10$$

$$x y'' + 3 y' + x y = 0 \quad , \quad y = x^{-1} u \quad .11$$

$$y'' + \left(1 - \frac{7}{4x^2}\right) y = 0 \quad , \quad y = x^{1/2} u \quad .12$$

$$y'' + \left(1 - \frac{3}{4x^2}\right) y = 0 \quad , \quad y = x^{1/2} u \quad .13$$

$$x^2 y'' - 3x y' + 4(x^4 - 3)y = 0 \quad , \quad y = x^2 u \quad , \quad x^2 = z \quad .14$$

$$x^2 y'' - 5x y' + 9(x^6 - 8)y = 0 \quad , \quad y = x^3 u \quad , \quad x^3 = z \quad .15$$

$$y'' + 2x^2 y = 0 \quad , \quad y = x^{1/2} u \quad , \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \quad .16$$

$$y'' + 9x^4 y = 0 \quad , \quad y = x^{1/2} u \quad , \quad z = x^3 \quad .17$$

$$y'' + 16xy = 0 \quad , \quad y = x^{1/2} u \quad , \quad z = \frac{8}{3} x^{3/2} \quad .18$$

$$x^2 y'' - 3x y' + (36x^6 - 5)y = 0 \quad , \quad y = x^2 u \quad , \quad z = 2x^3 \quad .19$$

$$x^2 y'' - x y' + (36x^4 - 15)y = 0 \quad , \quad y = x u \quad , \quad z = 3x^2 \quad .20$$

۲۱. جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + 4)y = 0 \quad .\bar{A}$$

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + 1)y = 0 \quad .\bar{B}$$

فصل پنجم

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

فرض می‌کنیم y_1 و y_2 و ... و y_n توابعی از یک متغیر مستقل مانند x باشند. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی گوئیم، اگر هر یک از معادلات دستگاه، یک معادله دیفرانسیل خطی باشد. در این فصل طریق حل دستگاه معادلات خطی یا ضرایب ثابت را ارائه می‌دهیم و برای این منظور دو روش را بررسی می‌کنیم. روش حذفی و روش ابرانه‌وری.

آ: روش حذفی

در این روش با حذف کردن تابعهای مجهول و مشتقات این توابع، معادله‌ای بدست می‌آوریم که فقط شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد و با حل این معادله، یکی از توابع مجهول بدست می‌آید و سپس سایر تابعهای مجهول را بدست می‌آوریم. روش حل در مثالهای زیر ارائه می‌شود.

مثال ۱۰۵. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} (a) & y_1' = 2y_1 - 5y_2 \\ (b) & y_2' = 5y_1 - 6y_2 \end{cases} \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا از یکی از معادلات دستگاه مثلاً (a) یکبار مشتق می‌گیریم

$$y_1'' = 2y_1' - 5y_2' \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y_1^{(4)} &= y_1 + x \\ y_1^{(4)} - y_1 &= x \end{aligned} \quad (4)$$

با حل (۴)، y_1 را پیدا می‌کنیم

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x \quad (5)$$

با دو بار مشتقگیری از (۵)، y_1'' را حساب می‌کنیم و در (۳) قرار می‌دهیم. داریم:

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x - 1$$

مثال ۳.۵. دستگاه معادلات

$$(a) \quad \begin{cases} y_1' + 4y_1 - 4y_2 = 12 \\ 10y_2' - 4y_1' + 4y_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. از معادله (a) یکبار مشتق می‌گیریم

$$y_1'' + 4y_1' = 4y_2' \quad (2)$$

از طرفی از معادله (a) داریم

$$y_2 = \frac{1}{4} y_1' + y_1 - 3 \quad (3)$$

در (۲) به جای y_2' از (b) و به جای y_2 از (۳) مقدار می‌گذاریم

$$\begin{aligned} y_1'' + 4y_1' &= \frac{4}{10} \left[4y_1' - 4 \left(\frac{1}{4} y_1' + y_1 - 3 \right) \right] \\ y_1'' + \frac{14}{5} y_1' + \frac{8}{5} y_1 &= \frac{24}{5} \end{aligned} \quad (4)$$

(۴) یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت می‌باشد و با حل آن داریم

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{4}{5}x} + 3 \quad (5)$$

از (۵) یک بار مشتق می‌گیریم تا y_1' بدست آید، و با جایگذاری y_1 و y_1' در (۳) y_2 پیدا می‌شود.

$$y_2 = \frac{1}{2} c_1 e^{2x} + \frac{4}{5} c_2 e^{-\frac{4}{5}x}$$

سپس از همین معادله (معادله‌ای که مشتق آنرا گرفته‌ایم)، y_2 را حساب می‌کنیم

$$y_2 = \frac{2}{5} y_1 - \frac{1}{5} y_1' \quad (2)$$

در (۲) به جای y_2' ، (b) را قرار می‌دهیم و به جای y_2 در (b)، (۳) را می‌گذاریم داریم:

$$\begin{aligned} y_1'' &= 2y_1' - 5 \left(\frac{2}{5} y_1 - \frac{1}{5} y_1' \right) \\ &= -4y_1' - 13y_1 \end{aligned} \quad (4)$$

(۴) یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت می‌باشد.

$$y_1'' + 4y_1' + 13y_1 = 0 \quad (5)$$

معادله (۵) را حل می‌کنیم و y_1 را بدست می‌آوریم

$$t^2 + 4t + 13 = 0, \quad t = -2 \pm 3i$$

$$y_1 = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \quad (6)$$

حال y_1 و y_1' را در (۳) قرار می‌دهیم و y_2 را پیدا می‌کنیم

$$y_1' = -2e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-2x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$$

$$y_2 = \frac{1}{5} e^{-2x} ((4C_1 - 3C_2) \cos 3x + (3C_1 + 4C_2) \sin 3x)$$

مثال ۳.۵. دستگاه معادلات

$$(a) \quad \begin{cases} y_1'' = y_2 + 1 \\ y_2'' = y_1 + x \end{cases} \quad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا از یکی از معادلات دستگاه مثلاً (a) دو بار مشتق می‌گیریم، داریم

$$y_1^{(4)} = y_2'' \quad (2)$$

و از معادله (a) داریم

$$y_2 = y_1'' - 1 \quad (3)$$

در (۲) به جای y_2'' ، (b) را قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} (D-2)x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + (D-4)y = 3e^{2t} \end{cases}$$

با استفاده از دستور کرامر

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & -3 \\ 3e^{2t} & D-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & -3 \\ -1 & D-4 \end{vmatrix}} = \frac{4e^{2t} - 8e^{2t} + 9e^{2t}}{D^2 - 6D + 5} = \frac{5e^{2t}}{D^2 - 6D + 5}$$

$$(D^2 - 6D + 5)x = 5e^{2t} \quad (۲)$$

و با حل (۲) داریم:

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{5t} - \frac{5}{3} e^{2t} \quad (۳)$$

به همین ترتیب

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-2 & 2e^{2t} \\ -1 & 3e^{2t} \end{vmatrix}}{D^2 - 6D + 5} = \frac{2e^{2t}}{D^2 - 6D + 5}$$

$$(D^2 - 6D + 5)y = 2e^{2t} \quad (۴)$$

$$y = A e^t + B e^{5t} - \frac{2}{3} e^{2t} \quad (۵)$$

c_1 و c_2 و A و B مستقل نیستند و می توان دو نای آنها را بر حسب دو نای دیگر بدست آورد بدین ترتیب که مثلا " با جایگذاری x و \dot{x} در (۳) داریم

$$c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - \frac{10}{3} e^{2t} - 2c_1 e^t - 2c_2 e^{5t} + \frac{10}{3} e^{2t} - 3A e^t - 3B e^{5t} + 2e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$\begin{cases} -c_1 - 3A = 0 \\ 3c_2 - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -3A, \quad c_2 = B$$

مثال ۴.۵. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} y_1'' + 2y_1' + 4y_2 = e^x \\ y_2'' - y_1 - 3y_2 = -x \end{cases} \\ (b) & \end{cases} \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا از معادله (a) دو بار مشتق می گیریم

$$y_1^{(4)} + 2y_1''' + 4y_2'' = e^x \quad (۲)$$

و از (a) داریم

$$y_2 = -\frac{1}{4} y_1'' - \frac{1}{2} y_1' + \frac{1}{4} e^x \quad (۳)$$

در (۲) بجای y_2'' از (b) و بجای y_2 از (۳) را قرار می دهیم، داریم

$$y_1^{(4)} + 2y_1''' + 4\left(-\frac{1}{4} y_1'' - \frac{1}{2} y_1' + \frac{1}{4} e^x\right) = e^x$$

$$y_1^{(4)} - y_1'' - 2y_1' = 4x - 2e^x$$

$$t^4 - t^2 - 2 = (t^2 + 1)(t^2 - 2) = 0, \quad t = \pm i, \pm\sqrt{2}$$

$$y_1 = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^x - 2x \quad (۴)$$

با جایگذاری y_1 و y_1'' در (۳) داریم:

$$y_2 = -C_1 e^{x\sqrt{2}} - C_2 e^{-x\sqrt{2}} - \frac{C_3}{4} \cos x - \frac{C_4}{4} \sin x - \frac{1}{2} e^x + x$$

ب. روش ابراتورها

مثال ۵.۵. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} \dot{x} - 2x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + \dot{y} - 4y = 3e^{2t} \end{cases} \\ (b) & \end{cases} \quad (۱)$$

را حل کنید. (x و y تابع t هستند و نقطهها نشان دهنده مشتق نسبت به t می باشند)

حل. با استفاده از نماد $D = \frac{d}{dt}$ داریم

و جوابها به فرم زیر می باشند:

$$x = -3A e^t + B e^{5t} - \frac{5}{3} e^{2t}$$

$$y = A e^t + B e^{5t} - \frac{2}{3} e^{2t}.$$

تذکره. تعداد پارامترهای ثابت و مستقل برابر است با بزرگترین درجه، درمیان ضرایب.

مثال ۵.۶. دستگاه معادلات

$$(a) \begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x + \ddot{y} + y = e^t \\ \ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} = e^t \end{cases}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا دستگاه را به فرم زیر می نویسیم

$$\begin{cases} (D^2 + D + 1)x + (D^2 + 1)y = e^t \\ (D^2 + D)x + D^2 y = e^t \end{cases}$$

و با استفاده از دستور کرامر داریم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t & D^2 + 1 \\ e^t & D^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^2 + D + 1 & D^2 + 1 \\ D^2 + D & D^2 \end{vmatrix}} = \frac{e^t - 2e^t}{-D}$$

$$Dx = -e^t + 2e^t$$

$$x = -e^t - 2e^t + c_1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D^2 + D + 1 & e^t \\ D^2 + D & e^t \end{vmatrix}}{-D} = -\frac{e^t - 2e^t}{D}$$

$$Dy = 2e^t - e^t$$

$$y = 2e^t + e^t + c_2$$

و چون درمیان ضرایب از درجه ۱ می باشد، لذا c_1 و c_2 مستقل هستند و یکی برحسب دیگری بیان می شود x و \dot{x} و \ddot{x} و y و \dot{y} و \ddot{y} را در (a) قرار می دهیم، داریم

$$-e^t - 2e^t - e^t + 2e^t - e^t - 2e^t + c_1 + 2e^t + e^t + 2e^t + e^t + c_2 \equiv e^t$$

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 = -c_2$$

و جوابها به فرم زیر می باشند:

$$x = -e^t - 2e^t + c_1$$

$$y = 2e^t + e^t - c_1$$

مثال ۵.۷. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y - x = e^t + 1 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + z + 2y = e^t + 2 \\ \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dt} - x + z = e^t + 3 \end{cases}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا دستگاه را به فرم اپراتوری می نویسیم

$$\begin{cases} (D-1)x + (D+2)y = e^t + 1 \\ (D+2)y + (D+1)z = e^t + 2 \\ (D-1)x + (D+1)z = e^t + 3 \end{cases}$$

و سپس درمیان ضرایب را حساب می کنیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-1 & D+2 & 0 \\ 0 & D+2 & D+1 \\ D-1 & 0 & D+1 \end{vmatrix} = 2(D+2)(D+1)(D-1)$$

و با استفاده از دستور کرامر

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t+1 & D+2 & 0 \\ e^t+2 & D+2 & D+1 \\ e^t+3 & 0 & D+1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t+2}{2(D-1)}$$

$$\frac{dx}{dt} - x = 1 + \frac{1}{2} e^t \quad (۲)$$

و (۲) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشد و جواب عمومی (۲) به فرم زیر است:

$$x = \frac{t}{2} e^t - 1 + c_1 e^t \quad (۳)$$

و

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-1 & e^t+1 & 0 \\ 0 & e^t+2 & D+1 \\ D-1 & e^t+3 & D+1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t}{2(D+2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + 2y &= \frac{1}{2} e^t \\ y &= \frac{1}{6} e^t + c_2 e^{-2t} \end{aligned} \quad (۴)$$

و

$$z = \frac{\begin{vmatrix} D-1 & D+2 & e^t+1 \\ 0 & D+2 & e^t+2 \\ D-1 & 0 & e^t+3 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t+4}{2(D+1)}$$

$$\frac{dz}{dt} + z = \frac{1}{2} e^t + 2$$

$$z = \frac{1}{4} e^t + 2 + c_3 e^{-t} \quad (۵)$$

(۳)، (۴) و (۵) جواب دستگاه می باشند و c_1 و c_2 و c_3 مستقل از یکدیگرند. زیرا بزرگترین درجه D در Δ برابر ۳ باشد.

مثال ۵.۸. دستگاه معادلات همگی

$$(a) \begin{cases} \dot{x} - 3x - 4y = 0 \\ \dot{y} + 3y - 4x = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا دستگاه را به فرم اپراتوری می نویسیم

$$\begin{cases} (D-3)x - 4y = 0 \\ -4x + (D+3)y = 0 \end{cases} \quad (۲)$$

بر طبق دستور کرامر

$$\Delta x = \Delta_1, \quad \Delta y = \Delta_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 - 25$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & D+3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} D-3 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به مقادیر فوق داریم:

$$(D^2 - 25)x = 0 \Rightarrow x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-5t} \quad (۳)$$

$$(D^2 - 25)y = 0 \Rightarrow y = A_1 e^{5t} + A_2 e^{-5t} \quad (۴)$$

A_1, c_2, c_1 و A_2 مستقل نیستند و چون بزرگترین درجه D در دترمینان Δ برابر ۲ می باشد، لذا می بایست ۲ نای از پارامترها را برحسب دو نای دیگر بنویسیم. برای اینکار x و \dot{x} را در (a) قرار می دهیم

$$\begin{cases} (D^2 - 3D + 2)y_1 + (D - 1)y_2 = 0 \\ (D - 2)y_1 + (D + 1)y_2 = 0 \end{cases} \quad .۶$$

$$\begin{cases} (2D + 1)y_1 + Dy_2 = x \\ (D - 1)y_1 + Dy_2 = 2 \end{cases} \quad .۷$$

$$\begin{cases} (D^2 + D + 1)y_1 + (D^2 + 1)y_2 = e^x \\ (D^2 + D)y_1 + D^2 y_2 = e^{-x} \end{cases} \quad .۸$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5c_1 e^{5t} - 5c_2 e^{-5t} \\ 5c_1 e^{5t} - 5c_2 e^{-5t} - 3c_1 e^{5t} - 3c_2 e^{-5t} - 4A_1 e^{5t} - 4A_2 e^{-5t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2c_1 - 4A_1 = 0 \\ -8c_2 - 4A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2A_1 \\ c_2 = -\frac{1}{2}A_2 \end{cases}$$

و جواب عمومی دستگاه (۱) به فرم زیر می باشد:

$$x = 2A_1 e^{5t} - \frac{1}{2}A_2 e^{-5t}$$

$$y = A_1 e^{5t} + A_2 e^{-5t}$$

مجموعه مسائل فصل ۵

دستگاه‌های معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 \end{cases} \quad .۱$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 2e^x \\ y_2' = 4y_1 + y_2 - e^x \end{cases} \quad .۲$$

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2 + 2x \\ y_2' = 8y_1 - 4y_2 + 1 \end{cases} \quad .۳$$

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - e^x \sin x \\ y_2' = 4y_1 - y_2 + 2e^x \cos x \end{cases} \quad .۴$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 & y_1(0) = 1 \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2 & y_2(0) = 0 \end{cases} \quad .۵$$

فصل ششم

۶

تبدیل لایلاس

این فصل را به بحث دربارهٔ حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه، اختصاص می‌دهیم. و برای حل این‌گونه معادلات، روش تبدیل لایلاس را معرفی می‌کنیم و کاربرد آن را در حل معادلات دیفرانسیل معمولی مورد بررسی قرار می‌دهیم. و متذکر می‌شویم که از روش تبدیل لایلاس، نیز می‌توان در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده کرد.

در فصل سوم این کتاب به روش ارائه شده برای حل این نوع معادلات آشنا شدیم؛ به این ترتیب: که ابتدا معادلهٔ همگن متناظر را حل کرده، سپس یک جواب خصوصی معادله را پیدا می‌کردیم. آنگاه از جمع دو جواب، به جواب عمومی می‌رسیدیم و جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار می‌دادیم تا جواب خصوصی معادله بدست آید. ولیکن امتیاز و حسن روش تبدیل لایلاس در این است که به جواب خصوصی معادله، مستقیماً دست می‌یابیم.

برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با این روش، سه مرحلهٔ اصلی زیر را اعمال

می‌داریم:

مرحلهٔ اول. معادلهٔ دیفرانسیل را با استفاده از تبدیل لایلاس، به یک معادلهٔ جبری درجه اول تبدیل می‌کنیم؛

مرحله دوم. جواب معادله جبری را بدست می‌آوریم؛

مرحله سوم. با استفاده از تبدیل معکوس از جواب مرحلهٔ دوم، جواب معادلهٔ اصلی را پیدا می‌کنیم.

۱.۶. تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t \geq 0$ تعریف شده، با نماد $F(s)$ یا $\mathcal{L}[f(t)]$ نمایش داده می‌شود، و عبارتست از:

$$(1) \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

اگر این انتگرال موجود باشد*.

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامیم، و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ گوئیم و آنرا با نماد $\mathcal{L}^{-1}(F)$ نمایش می‌دهیم.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$$

تبدیل لاپلاس توابع را همیشه با حرف بزرگ متناظر نشان می‌دهیم، یعنی تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ را با $G(s)$ و تبدیل لاپلاس تابع $h(t)$ را با $H(s)$ و ...

قضیه ۱.۶. تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی است.

فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشند. آنگاه

$$(2) \quad \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

اثبات.

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt$$

$$= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt$$

$$= c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)].$$

قضیه ۲.۶. معکوس تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی است.

فرض کنید $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ و $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ آنگاه

$$(3) \quad \mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2 \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

اثبات. بنابر قضیه ۱.۶ داریم

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

و بنا بر تعریف

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

از طرفی

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} F_1(s) \quad , \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} F_2(s)$$

پس

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 \mathcal{L}^{-1}(F_1(s)) + c_2 \mathcal{L}^{-1}(F_2(s)).$$

قبل از بیان قضیه وجود تبدیل لاپلاس یک تابع، به بیان دو تعریف می‌پردازیم:

تعریف ۲.۶. تابع $f(t)$ را روی فاصله I پیوسته قطعی* گوئیم، اگر بتوان این

فاصله را به تعداد محدودی زیر فاصله تقسیم کرد، بطوری که

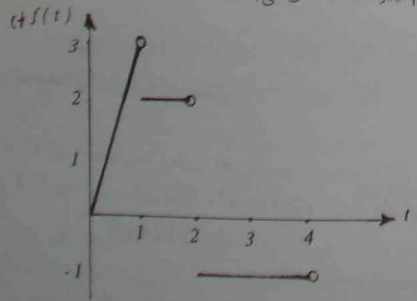
آ. تابع $f(t)$ روی هر زیرفاصله یاز، پیوسته باشد.

ب. تابع $f(t)$ در تمام نقاط این زیرفاصله‌ها دارای حد چپ و حد راست باشد.

مثال ۱.۶. تابع $f(t)$ که بصورت زیر تعریف شده است.

$$f(t) = \begin{cases} 3t & \text{اگر } 0 < t < 1 \\ 2 & \text{اگر } 1 \leq t < 2 \\ -1 & \text{اگر } 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

روی فاصله $(0, 4)$ پیوسته قطعی می‌باشد.

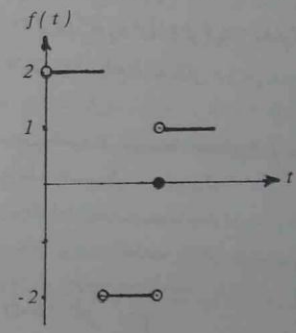


شکل ۶.۱

شکل ۲.۶ تابع

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } 0 < t < 1 \\ -2 & \text{اگر } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{اگر } t = 2 \\ 1 & \text{اگر } 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

روی فاصله (0, 3) پیوسته قطعه‌ای است. همانطور که ملاحظه می‌کنید $f(1)$ تعریف شده و مقدار تابع در نقطه $t=2$ برابر با حد چپ و با حد راست در این نقطه نیست.



شکل ۲.۶

تذکر ۱. توابع پیوسته زیرمجموعه توابع پیوسته قطعه‌ای می‌باشند؛ زیرا تعداد نقاط انفصالشان صفر است.

تذکر ۲. توابع پیوسته قطعه‌ای انتگرالپذیر هستند.

تعریف ۲.۶.۳. تابع $f(t)$ هم مرتبه نمایی e^{st} نامیده می‌شود، اگر بتوان مقادیر ثابت و نامنفی M و T را پیدا کرد، بطوری که برای هر $t \geq T$ داشته باشیم.

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad (4)$$

* Piecewise continuous

مقال ۲.۶.۳. توابع $\sin t$ و $\cos t$ هم مرتبه نمایی "۱" هستند ($a=0$) و تابع e^{bt} هم مرتبه نمایی e^{at} می‌باشد ($b \leq a$)

قضیه ۲.۶.۳. قضیه وجود تبدیل لاپلاس اگر تابع $f(t)$ دارای شرایط زیر باشد:

- آ. در هر فاصله محدود $0 \leq t \leq T$ پیوسته قطعه‌ای باشد؛
 - ب. برای $t > T$ ، هم مرتبه نمایی e^{at} باشد؛
- آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برای تمام $s > a$ موجود می‌باشد.

اثبات.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

چون تابع $f(t)$ در فاصله $0 \leq t \leq T$ پیوسته قطعه‌ای می‌باشد، بنابراین $e^{-st} f(t)$ نیز در فاصله $0 \leq t \leq T$ پیوسته قطعه‌ای است و $\int_0^T e^{-st} f(t) dt$ موجود خواهد بود.

$$|\mathcal{L}(f(t))| = \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right|$$

$$\leq \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt \right| + \left| \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right|$$

حال نشان می‌دهیم که $\int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ نیز موجود است.

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \leq \int_T^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt$$

$$\leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt$$

$$\leq M \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt$$

$$= \frac{M}{s-a}, \quad s > a$$

تذکر ۳. شرایط قضیه فوق کافی است و لازم نیست. یعنی توابعی وجود دارند که در شرایط قضیه ۲.۶.۳ صدق نمی‌کنند ولی تبدیل لاپلاس این توابع وجود دارد.

قضیه ۲.۶.۴. اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه ۲.۶.۳ صدق کند، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

با فرض

$$st = y \Rightarrow s dt = dy$$

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \left(\frac{y}{s}\right)^a \frac{dy}{s}$$

$$= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^a dy = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

مثال ۰۷.۰۶. تبدیل لاپلاس $f(t) = t^4$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(t^4) = \frac{\Gamma(4+1)}{s^5} = \frac{4!}{s^5}$$

مثال ۰۸.۰۶. تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(t) = 3t^3 - 4t + 2$$

حل.

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(3t^3 - 4t + 2)$$

$$= 3\mathcal{L}(t^3) - 4\mathcal{L}(t) + 2\mathcal{L}(1)$$

$$= 3\frac{3!}{s^4} - \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}$$

مثال ۰۹.۰۶. تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{at}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

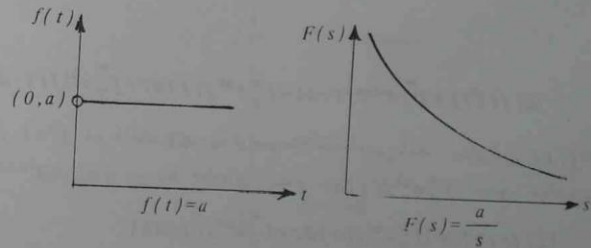
مثال ۰۱۰.۰۶. تبدیل لاپلاس توابع $\sin at$ و $\cos at$ را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم

معنی اگر $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$. آنگاه $f(t)$ نمی‌تواند دارای شرایط قصه ۰۶.۰۳ باشد.مثال ۰۴.۰۶. تبدیل لاپلاس $f(t) = 5$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(5) = \int_0^{\infty} 5 e^{-st} dt = \frac{-5}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{5}{s}$$

و بخور کلی اگر $f(t) = a$ آنگاه $\mathcal{L}(a) = \frac{a}{s}$ 

شکل ۰۳.۰۶

مثال ۰۵.۰۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 3t$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(3t) = 3 \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = 3 \left. \frac{t e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} + \frac{3}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \frac{3}{s^2}$$

مثال ۰۶.۰۶. تبدیل لاپلاس $f(t) = t^m$ را بدست آورید. $a > -1$.

حل.

$$\mathcal{L}(t^m) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^m dt$$

$$e^{iat} = \cos at + i \sin at$$

از طرفین لایلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(\cos at) + i \mathcal{L}(\sin at) = \mathcal{L}(e^{iat})$$

از طرفی

$$\mathcal{L}(e^{iat}) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i \frac{a}{s^2+a^2}$$

س

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال ۱۱.۶. تبدیل لایلاس $f(t) = \cosh at$ را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم

$$\cosh at = \frac{1}{2} (e^{at} + e^{-at})$$

از طرفین رابطه بالا لایلاس می‌گیریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cosh at) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at})) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2-a^2} \end{aligned}$$

و با اثبات مشابه داریم

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

نتایج مثالهای فوق را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم و برای حل مسائل از جدول کمک می‌گیریم

جدول (۱)

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
a	$\frac{a}{s}, s > 0$	$k \cos at$	$k \frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
at^n	$a \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$	$k \sin at$	$k \frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
$kt^a, a > -1$	$k \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, s > 0$	$k \cosh at$	$k \frac{s}{s^2-a^2}, s > a $
ke^{at}	$\frac{k}{s-a}, s > a$	$k \sinh at$	$k \frac{a}{s^2-a^2}, s > a $

مثال ۱۲.۶. تبدیل لایلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(t) = 4t^2 - 2 \cos 3t + 5e^t - 3 \sinh 2t + 1$$

حل.

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{8}{s^3} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s-1} - \frac{6}{s^2-4} + \frac{1}{s}$$

مثال ۱۳.۶. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s) = \frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)}$$

حل.

$$\frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$5s-1 \equiv A(s-1)(s^2+1) + Bs(s^2+1) + Cs^2(s-1) + Ds(s-1)$$

مضامین $s=0$: $-1 = -A \Rightarrow A=1$
 مضامین $s=1$: $4 = 2B \Rightarrow B=2$
 مضامین $s=-1$: $-6 = -4 - 4 - 2c + 2D$
 مضامین $s=2$: $9 = 5 + 20 + 4c + 2D$
 از دو معادله آخری داریم $C=-3$ و $D=-2$ پس

$$F(s) = \frac{1c}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{3s+2}{s^2+1}$$

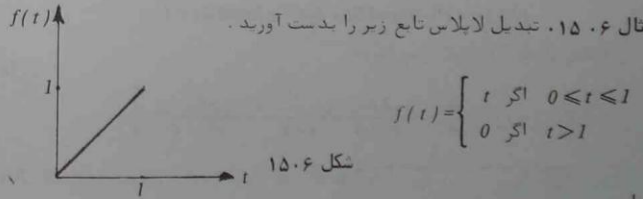
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(s)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= 1 + 2e^t - 3\cos t - 2\sin t. \end{aligned}$$

مثال ۱۴.۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(t^{-1/2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{s^{1/2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0$$

مثال ۱۵.۶. تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.



حل.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 t e^{-st} dt + \int_1^{\infty} 0 dt \\ &= \left. \frac{t e^{-st}}{-s} \right|_0^1 - \left. \frac{1}{s^2} e^{-st} \right|_0^1 \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

مثال ۱۶.۶. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2-2}$$

حل.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{s^2-2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2-2} \\ \mathcal{L}^{-1}F(s) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-2}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2-2}\right) \\ &= \cosh\sqrt{2}t + \frac{3}{\sqrt{2}} \sinh\sqrt{2}t. \end{aligned}$$

مثال ۱۷.۶. تبدیل معکوس تابع $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+4}$ را پیدا کنید.

حل.

$$F(s) = 2 \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}F(s) = 2 \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

مثال ۱۸.۶. تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(t) = \sin(3t + \frac{\pi}{4})$$

حل.

$$f(t) = \sin 3t \cos \frac{\pi}{4} + \cos 3t \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathcal{L}(\sin 3t) + \mathcal{L}(\cos 3t))$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+9} \right)$$

قضیه ۱۵.۶. اگر $s > a$ و $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ ، آنگاه برای $b > 0$,

$$(5) \quad \mathcal{L}(f(bt)) = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right), \quad \frac{s}{b} > a$$

مجموعه مسائل ۱.۶

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید:

$f(t) = 5t^4 - 3t^2 + 6$.۱

$f(t) = 4e^{3t} + 2 \cos t - 1$.۲

$f(t) = \cos(at + b)$.۳

$f(t) = \sinh(at + b)$.۴

$f(t) = 3t - \cosh 2t + \sin 3t$.۵

$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } 0 \leq t < 1 \\ t & \text{اگر } t \geq 1 \end{cases}$.۶

$f(t) = \begin{cases} \sin 3t & \text{اگر } 0 \leq t < \pi \\ 3 & \text{اگر } t \geq \pi \end{cases}$.۷

$f(t) = 2t^{3/2} + \sinh t - 3$.۸

در تعریفات زیر $f(t)$ را پیدا کنید:

$F(s) = \frac{2}{s^4} + s^{-5/2}$.۹ ✗

$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 1)}$.۱۰ ✗

$F(s) = \frac{2-s}{3s^{3/2}}$.۱۱ ✗

(۶) $\mathcal{L}^{-1} F(ks) = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$

$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ اثبات. طبق تعریف

بنابراین

$F\left(\frac{s}{b}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{st}{b}} f(t) dt$

با فرض $\frac{t}{b} = u$ داریم

$F\left(\frac{s}{b}\right) = \int_0^{\infty} e^{-su} f(bu) b du = b \mathcal{L}f(bt)$.

مثال ۱۹.۶. اگر $\mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$f(t) = \frac{1-e^{-2t}}{2t}$

حل. بنا بر فرمول (۵)

$\mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-2t}}{2t}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{s}\right)$.

مثال ۲۰.۶. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$F(s) = \frac{1}{4s^2 + 9}$

حل. طبق فرمول (۶) داریم $k=2$ پس

$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{4s^2 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sin 3t/2$

$$F(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{4s}{s^2-1} + \frac{3}{s^2+4} \quad (12)$$

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \quad (13)$$

۲.۶. تبدیل لاپلاس مشتق

قضیه ۶.۶. اگر $f(t)$ تابعی پیوسته، قطعه‌ای روی $t \geq 0$ باشد و هم مرتبه‌نمایی e^{at} با $a > 0$ و اگر $f'(t)$ تابعی پیوسته، قطعه‌ای روی $t \geq 0$ ، آنگاه*

$$(1) \quad \mathcal{L}(f'(t)) = s \mathcal{L}(f(t)) - f(0^+) - \sum_{i=1}^n e^{-sT_i} [f(T_i^+) - f(T_i^-)]$$

برای $a > 0$ و $f(t)$ در نقاط T_1, T_2, \dots, T_n منقطع می‌باشد.

قضیه را برای حالتی که $f(t)$ پیوسته و $f'(t)$ قطعه‌ای باشد اثبات

می‌کنیم.

اثبات.

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt$$

تابع $f(t)$ در فاصله $[0, T]$ پیوسته است و مشتق آن در این فاصله پیوسته، قطعه‌ای.

حال فرض می‌کنیم که $f'(t)$ در نقاط T_1 و T_2 و \dots و T_n منقطع باشد.

$$\int_0^T e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{T_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f'(t) dt + \dots + \int_{T_n}^T e^{-st} f'(t) dt$$

انتگرالهای طرف راست را با استفاده از روش جز به جز* محاسبه می‌کنیم.

$$f'(t) dt = dV \Rightarrow V = f(t)$$

$$e^{-st} = u \Rightarrow -se^{-st} dt = du$$

پس

$$* \quad \lim_{t \rightarrow T_i^-} f(t) = f(T_i^-), \quad \lim_{t \rightarrow T_i^+} f(t) = f(T_i^+)$$

$$\int_0^T e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{T_1} + s \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt \\ + e^{-st} f(t) \Big|_{T_1}^{T_2} + s \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{T_n}^T + s \int_{T_n}^T e^{-st} f(t) dt$$

چون $f(t)$ تابعی پیوسته می‌باشد، بنابراین در هر نقطه حد جب و حد راست برابر می‌باشند. یعنی

$$\lim_{t \rightarrow T_1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow T_1^-} f(t), \dots, \lim_{t \rightarrow T_n^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow T_n^-} f(t)$$

و در نتیجه داریم

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt = -f(0^+) + \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T) + s \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

از طرفی $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T)$ برابر صفر است، زیرا $f(t)$ در شرایط قضیه وجود صدق می‌کند، و داریم

$$(2) \quad \mathcal{L}(f'(t)) = s \mathcal{L}(f) - f(0^+).$$

قضیه ۶.۷. فرض کنیم $f(t)$ و $f'(t)$ و \dots و $f^{(n-1)}(t)$ توابعی پیوسته به‌ارای $t \geq 0$ باشند و در شرایط قضیه وجود صدق کنند و $f^{(n)}(t)$ به‌ارای $t \geq 0$ پیوسته، قطعه‌ای باشد، آنگاه

$$(3) \quad \mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

و به‌ارای $n=2$ و $n=3$ داریم

$$(4) \quad \mathcal{L}(f''(t)) = s^2 \mathcal{L}(f(t)) - s f(0^+) - f'(0^+)$$

$$(5) \quad \mathcal{L}(f'''(t)) = s^3 \mathcal{L}(f(t)) - s^2 f(0^+) - s f'(0^+) - f''(0^+).$$

مثال ۶.۲۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t$ را پیدا کنید.

$$\text{حل.} \quad f'(t) = 1, \quad f(0) = 0$$

طبق فرمول (۲) داریم،

مثال ۲۵.۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \cos^2 t$ را حساب کنید.

$$\text{حل. } f'(t) = -2 \cos t \sin t = -\sin 2t, \quad f(0) = 1$$

و طبق فرمول (۲) داریم،

$$\mathcal{L}(-\sin 2t) = s \mathcal{L}(\cos^2 t) - 1$$

$$s \mathcal{L}(\cos^2 t) = 1 - \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 4}$$

$$\mathcal{L}(\cos^2 t) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$$

مثال ۲۶.۶. تبدیل لاپلاس تابع زیر را با استفاده از فرمول (۱) بدست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{اگر } 0 \leq t \leq 1 \\ t & \text{اگر } t > 1 \end{cases} \quad \text{حل.}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{اگر } t > 1, \end{cases}$$

$$f(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1} = 2$$

و طبق فرمول (۱) داریم

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s \mathcal{L}(f(t)) - f(0) - e^{-s}(f(1^+) - f(1^-))$$

$$s \mathcal{L}(f(t)) = 2 \int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^{\infty} e^{-st} dt + e^{-s}(1 - 2)$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - e^{-s}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

مثال ۲۷.۶. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7$$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} = s \mathcal{L}(t) - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

مثال ۲۲.۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \sin t$ را پیدا کنید.

$$\text{حل. } f'(t) = \cos t \quad \text{و} \quad f''(t) = -\sin t \quad \text{و} \quad f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f'(0) = 1$$

و از طرفی طبق فرمول (۴) داریم.

$$\mathcal{L}(-\sin t) = -\mathcal{L}(\sin t) = s^2 \mathcal{L}(\sin t) - 0 - 1$$

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{1 + s^2}$$

مثال ۲۳.۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^t$ را پیدا کنید.

$$\text{حل. } f'(t) = e^t, \quad f(0) = 1$$

و طبق فرمول (۲) داریم.

$$\mathcal{L}(e^t) = s \mathcal{L}(e^t) - 1$$

$$\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s - 1}$$

مثال ۲۴.۶. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t \cos 2t$ را پیدا کنید.

$$\text{حل. } f'(t) = \cos 2t - 2t \sin 2t \quad \text{و} \quad f''(t) = -4 \sin 2t - 4t \cos 2t$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

و طبق فرمول (۴) داریم.

$$\mathcal{L}(f'') = -4 \mathcal{L}(\sin 2t) - 4 \mathcal{L}(t \cos 2t) = s^2 \mathcal{L}(t \cos 2t) - 1$$

$$(s^2 + 4) \mathcal{L}(t \cos 2t) = 1 - \frac{8}{s^2 + 4}$$

$$\mathcal{L}(t \cos 2t) = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}$$

حل. فرض می‌کنیم جواب مسأله $y(t)$ و تبدیل لاپلاس تابع مجهول $Y(s)$ ، $y(t)$ باشد یعنی $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$ پس

$$\mathcal{L}(y'' - 2y' - 3y) = \mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = 0$$

$$s^2 Y - s y(0) - y'(0) - 2sY + 2y(0) - 3Y = 0$$

$$Y(s^2 - 2s - 3) = s + 5$$

$$Y = \frac{s+5}{(s-3)(s+1)} = \frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ = 2e^{3t} - e^{-t}$$

مثال ۶.۲۸. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

حل. از طرفین معادله بالا لاپلاس می‌گیریم.

$$\mathcal{L}(y'') - 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = 2\mathcal{L}(e^{-t})$$

$$s^2 Y - 2s + 1 - 3sY + 6 + 2Y = \frac{2}{s+1}$$

$$Y(s^2 - 3s + 2) = \frac{2}{s+1} + 2s - 7$$

$$Y = \frac{2s^2 - 5s - 5}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s-1} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{7}{3} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + 4e^t - \frac{7}{3}e^{2t}$$

مجموعه مسائل ۶.۲۰.

با استفاده از قضیه ۶.۷ تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$f(t) = t \sin 5t \quad .1$$

$$f(t) = t e^{2t} \quad .2$$

$$f(t) = t \sinh 4t \quad .3$$

$$f(t) = t \cosh t \quad .4$$

$$f(t) = \frac{1}{16} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \quad .5$$

$$f(t) = \frac{1}{6} (\sin 3t + 3t \cos 3t) \quad .6$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad .7$$

$$y'' + 9y = \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad .8$$

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \quad .9$$

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad .10$$

با استفاده از قضیه ۶.۶ تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱۱

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{اگر } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{اگر } t > 2 \end{cases}$$

۱۲

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{اگر } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{اگر } t > 1 \end{cases}$$

۱۳

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & \text{اگر } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

۱۴

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } 0 < t < 1 \\ t & \text{اگر } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{اگر } t > 2 \end{cases}$$

۳۰۶. تبدیل لاپلاس انتگرال

قضیه ۰۸.۰۶. اگر $f(t)$ تابعی پیوسته، قطعه‌ای و در شرایط قضیه وجود صدق کند، و $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ باشد، آنگاه

$$(۱) \quad \mathcal{L}\left[\int_0^t f(r) dr\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

اثبات. فرض می‌کنیم

$$h(t) = \int_0^t f(r) dr$$

بنابراین $h(t)$ تابعی است پیوسته و چون $h'(t) = f(t)$ پس $h'(t)$ تابعی است پیوسته، قطعه‌ای و هم مرتبه، نمایی تابع e^{at} ، زیرا

$$|h(t)| = \left| \int_0^t f(r) dr \right| \leq \int_0^t |f(r)| dr \leq M \int_0^t e^{ar} dr = \frac{M}{a} (e^{at} - 1)$$

و بنابراین، طبق فرمول (۲) بخش ۰۶.۰۲ داریم

$$\mathcal{L}(h'(t)) = s \mathcal{L}(h(t)) - h(0)$$

از طرفی

$$h(0) = \int_0^0 f(r) dr = 0$$

پس

$$\mathcal{L}(f(t)) = s \mathcal{L}\left[\int_0^t f(r) dr\right]$$

و

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(r) dr\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

با استفاده از فرمول (۱) داریم،

$$(۲) \quad \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} F(s) = \int_0^t f(r) dr$$

مثال ۰۶.۲۹. تبدیل لاپلاس تابع

$$h(t) = \int_0^t \sin r dr$$

را پیدا کنید.

حل.

$$f(t) = \sin t, \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

و بنا بر فرمول (۱) داریم،

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin r dr\right] = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

مثال ۰۶.۳۰. تبدیل لاپلاس تابع

$$h(t) = \int_0^t r \cos 2r dr$$

را پیدا کنید.

حل. با توجه به مثال ۰۶-۲۴ داریم

$$f(t) = t \cos 2t, \quad F(s) = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t r \cos 2r \, dr \right] = \frac{s^2 - 4}{s(s^2 + 4)^2}$$

مثال ۰۶-۳۱. تبدیل معکوس تابع $\frac{1}{s(s+2)}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+2} \right) = e^{-2t}$$

و طبق فرمول (۲) داریم

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s+2} \right) \right) = \int_0^t e^{-2r} \, dr = -\frac{1}{2} e^{-2r} \Big|_0^t = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}).$$

مثال ۰۶-۳۲. تبدیل معکوس تابع $\frac{1}{s^2(s^2-1)}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2-1} \right) = \sinh t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s^2-1} \right) \right) = \int_0^t \sinh r \, dr = \cosh r \Big|_0^t = \cosh t - 1$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s(s^2-1)} \right) \right) = \int_0^t (\cosh r - 1) \, dr = \sinh r - r \Big|_0^t = \sinh t - t$$

مثال ۰۶-۳۳. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{1}{s^2} \left(\frac{s-1}{s+1} \right)$$

حل.

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2} \left(\frac{s-1}{s+1} \right) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s+1} \right) - \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{s+1} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s+1} \right) = \int_0^t e^{-r} \, dr = -e^{-r} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s(s+1)} \right) = \int_0^t (1 - e^{-r}) \, dr = r + e^{-r} \Big|_0^t = t + e^{-t} - 1$$

و در نتیجه

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2} \left(\frac{s-1}{s+1} \right) = 2 - 2e^{-2t} - t.$$

مثال ۰۶-۳۴. معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را حل کنید.

حل. از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y'') - 4\mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(1)$$

$$s^2 Y - 4sY = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{s-4} \right)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{s-4} \right) \right)$$

$$I(Ls + R + \frac{1}{cs}) = \frac{E}{s} + LI_0$$

$$I = \frac{E + sLI_0}{s(Ls + R + \frac{1}{cs})}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}(I)$$

مجموعه مسائل ۳.۶

تبدیل لاپلاس توابع زیر را با استفاده از قضیه ۳.۶.۸ پیدا کنید.

$$\int_0^t (r^3 - 4 \cos r) dr \quad .1$$

$$\int_0^t (r^{1/2} - 2 \sinh r) dr \quad .2$$

$$\int_0^t (2 \sin 3r + 4e^{-r} - \cosh 2r) dr \quad .3$$

با استفاده از فرمول (۲) تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 4)} \quad .4$$

$$\frac{1}{s^2} \left(\frac{s+3}{s^2+9} \right) \quad .5$$

$$\frac{3s-4}{s^2(s^2-9)} \quad .6$$

$$\frac{1}{s^3(s-5)} \quad .7$$

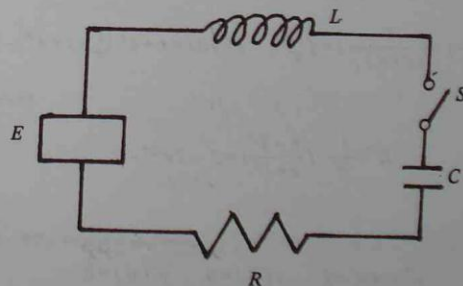
معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-4} \right) = e^{4t}, \quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s-4} \right) \right) = \int_0^t e^{4r} dr = \frac{1}{4} (e^{4t} - 1)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s(s-4)} \right) \right) = \frac{1}{4} \int_0^t (e^{4r} - 1) dr = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} e^{4t} - \frac{1}{4} - t \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} e^{4t} - \frac{1}{4} - t \right).$$

مثال ۳.۵.۶. شدت جریان $i(t)$ در مدار شکل زیر را پیدا کنید.



شکل ۴.۶

حل. طبق قانون دوم کیرشهف داریم

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{c} \int_0^t i(r) dr = E \quad (1)$$

از طرفین (۱) لاپلاس می‌گیریم، داریم

$$L \mathcal{L} \left(\frac{di(t)}{dt} \right) + R \mathcal{L}(i(t)) + \frac{1}{c} \mathcal{L} \left(\int_0^t i(r) dr \right) = \mathcal{L}(E)$$

و با فرض ثابت بودن E, c, R, L

$$L(sI - I_0) + RI + \frac{1}{c} \cdot \frac{I}{s} = \frac{E}{s}$$

$$y'' + y = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad .8$$

$$y'' + y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad .9$$

$$y'' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad .10$$

$$y'' - y' - 2y = 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad .11$$

$$y'' + y' - 12y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad .12$$

۴.۶. قضایای انتقال

(الف) : انتقال بر محور "s" ها

قضیه ۹.۶. اگر $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ برای $s > a$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}[e^{bt} f(t)] = F(s-b) \quad (1)$$

برای $s \geq a+b$ و b ثابت دلخواه می باشد.

اثبات. با استفاده از تعریف داریم:

$$\begin{aligned} F(s-b) &= \int_0^{\infty} e^{-(s-b)t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{bt} f(t)) dt \\ &= \mathcal{L}[e^{bt} f(t)]. \end{aligned}$$

حال اگر از طرفین رابطه (۱) تبدیل معکوس بگیریم، داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-b)] = e^{bt} f(t) \quad (2)$$

مثال ۳۶.۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = e^{2t} t$$

را پیدا کند.

حل. در این مثال

$$f(t) = t, \quad F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad b = 2$$

پس

$$\mathcal{L}(e^{2t} t) = F(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2}.$$

مثال ۳۷.۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = e^{-3t} \cos 2t$$

را پیدا کند.

حل.

$$f(t) = \cos 2t, \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + 4}, \quad b = -3$$

بنابراین

$$\mathcal{L}(e^{3t} \cos 2t) = F(s+3) = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4}$$

مثال ۳۸.۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = e^{-2t} (\sin t + 4t^2 - 1)$$

را پیدا کند.

حل.

$$f(t) = \sin t + 4t^2 - 1, \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{8}{s^3} - \frac{1}{s}, \quad b = -2$$

$$\mathcal{L}(e^{2t} (\sin t + 4t^2 - 1)) = F(s+2)$$

$$= 2e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2+9} - e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \frac{3}{s^2+9}$$

$$= e^{-2t} (2 \cos 3t - \sin 3t).$$

مثال ۴۱.۶. معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4$$

را حل کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) = 0$$

$$s^2 Y - 2s + 4 + 2sY - 4 + 5Y = 0$$

$$Y = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2s}{(s+1)^2 + 4}$$

$$= 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 2\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \right) - \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

$$y(t) = e^{-t} (2 \cos 2t - \sin 2t)$$

مثال ۴۲.۶. معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

را حل کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(y'') - 4\mathcal{L}(y') + 4\mathcal{L}(y) = 0$$

$$s^2 Y - 2 - 4sY + 4Y = 0$$

$$= \frac{1}{(s+2)^2 + 1} + \frac{8}{(s+2)^3} - \frac{1}{s+2}$$

مثال ۳۹.۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = \cosh 2t \cos 2t$$

را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم

$$\cosh 2t = \frac{1}{2} (e^{2t} + e^{-2t})$$

$$g(t) = \frac{1}{2} (e^{2t} \cos 2t + e^{-2t} \cos 2t)$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{2t} \cos 2t) + \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{-2t} \cos 2t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4}$$

$$= \frac{s^3}{s^4 + 64}$$

مثال ۴۰.۶. تبدیل معکوس تابع زیر را بدست آورید.

$$\frac{2s+1}{s^2 + 4s + 13}$$

حل.

$$\frac{2s+1}{s^2 + 4s + 13} = \frac{2(s+2) - 3}{(s+2)^2 + 9} = 2 \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} - \frac{3}{(s+2)^2 + 9}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2s+1}{s^2 + 4s + 13} = 2\mathcal{L}^{-1} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} - \mathcal{L}^{-1} \frac{3}{(s+2)^2 + 9}$$

$$Y = \frac{2}{s^2 - 4s + 4} = \frac{2}{(s-2)^2}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(s-2)^2} \\ &= e^{2t} \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{s^2} \\ &= 2te^{2t} \end{aligned}$$

مثال ۴۳.۶. نشان دهید. اگر a و b مقادیر ثابت باشند و $a > 0$ ، آنگاه

$$(۳) \quad \mathcal{L}^{-1} [F(as+b)] = \frac{1}{a} e^{-b \frac{t}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

حل. طبقه قضیه ۵.۶. داریم،

$$\mathcal{L}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = aF(as)$$

و بنابر قضیه ۹.۶. داریم،

$$\mathcal{L}\left[e^{-b \frac{t}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as+b)$$

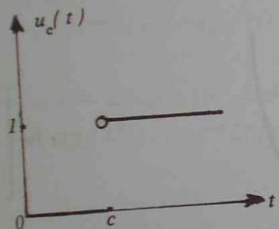
پس

$$\mathcal{L}^{-1} [F(as+b)] = \frac{1}{a} e^{-b \frac{t}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

قبل از بیان دومین قضیه انتقال، مختصری راجع به تابع پله‌ای واحد و تبدیل لاپلاس آن بحث می‌کنیم.

تعریف ۴.۶. تابع پله‌ای واحد* که با نماد $u_c(t)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$(۴) \quad u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t < c \\ 1 & \text{اگر } t > c \end{cases} \quad c \geq 0$$



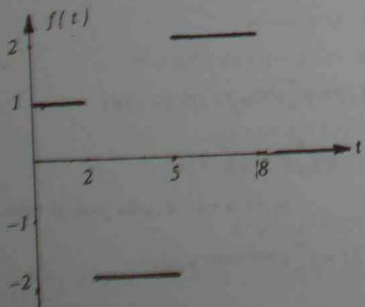
شکل ۵.۶. تابع پله‌ای واحد

مثال ۴۴.۶. تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_c(t)) &= \int_0^{\infty} u_c(t) e^{-st} dt \\ &= \int_c^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-sc}}{s}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

مثال ۴۵.۶. تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان کنید.



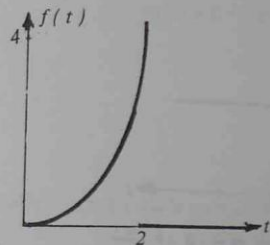
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } 0 < t < 2 \\ -2 & \text{اگر } 2 < t < 5 \\ 2 & \text{اگر } 5 < t < 8 \\ 0 & \text{اگر } t > 8 \end{cases}$$

* Unit step function

حل .

$$f(t) = u_0(t) - 3u_2(t) + 4u_6(t) - 2u_8(t)$$

مثال ۶.۶. تابع زیر را بر حسب تابع پله‌ای واحد بیان کنید .



$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{اگر } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{اگر } t > 2 \end{cases}$$

حل .

$$f(t) = (u_0(t) - u_2(t))t^2$$

زیرا $u_0(t) - u_2(t)$ برابر "۱" می‌باشد اگر $0 \leq t < 2$ و برابر صفر می‌باشد اگر $t > 2$ (ب: انتقال بر محور "t" ها)

قضیه ۶.۱۰. اگر $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ برای $s > a \geq 0$ و اگر c یک ثابت دلخواه مثبت باشد آنگاه .

$$(۵) \quad \mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}(f(t)) = e^{-cs} F(s), \quad s > a$$

اثبات .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt \\ &= \int_c^{\infty} e^{-st} f(t-c) dt \end{aligned}$$

با استفاده از تغییر متغیر $v = t - c$ داریم .

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] = \int_0^{\infty} e^{-s(v+c)} f(v) dv$$

$$= e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-sv} f(v) dv$$

$$= e^{-cs} \mathcal{L}(f(t)) = e^{-cs} F(s).$$

با توجه به فرمول (۵) . اگر $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ داریم .

$$(۶) \quad \mathcal{L}^{-1}[e^{-cs} F(s)] = u_c(t) f(t-c).$$

مثال ۶.۷. نشان دهید که فرمول (۵) را می‌توان به‌فرم زیر نوشت :

$$(۷) \quad \mathcal{L}[u_c(t)f(t)] = e^{-cs} \mathcal{L}(f(t+c)).$$

حل . فرض می‌کنیم

$$g(t) = f(t+c)$$

پس

$$f(t) = g(t-c)$$

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t)] = \mathcal{L}[u_c(t)g(t-c)]$$

$$= e^{-cs} \mathcal{L}(g(t))$$

$$= e^{-cs} \mathcal{L}[f(t+c)].$$

مثال ۶.۸. تبدیل لاپلاس تابع زیر را با استفاده از فرمول (۵) پیدا کنید .

$$(۱) \quad g(t) = u_1(t)(t^3 - 3t^2 + 4t + 4)$$

حل . ابتدا قسمت چندجمله‌ای (۱) را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$t^3 - 3t^2 + 4t + 4 = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + c(t-1) + D$$

و بدست می‌آوریم $A=1$ و $B=0$ و $c=1$ و $D=6$ بنابراین

$$g(t) = u_1(t)[(t-1)^3 + (t-1) + 6]$$

$$\mathcal{L}g(t) = e^{-s} [\mathcal{L}(t^3) + \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(6)]$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = e^{-s} \left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s} \right)$$

مثال ۶.۹. تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ مثال ۶.۸. را با استفاده از فرمول (۷)

بدست آورید .

حل .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_1(t)(t^3 - 3t^2 + 4t + 4)] &= e^{-s} \mathcal{L}[(t+1)^3 - 3(t+1)^2 + 4(t+1) + 4] \\ &= e^{-s} \mathcal{L}(t^3 + t + 6) = e^{-s} \left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s} \right) \end{aligned}$$

مثال ۵۰.۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{اگر } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{اگر } t > 1 \end{cases}$$

را پیدا کنید .

حل . ابتدا تابع $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(t) &= [u_0(t) - u_1(t)] t^2 \\ &= t^2 - u_1(t) t^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t^2) - \mathcal{L}(u_1(t) t^2)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \mathcal{L}((t+1)^2)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \mathcal{L}(t^2 + 2t + 1)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

مثال ۵۱.۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t) = u_{\pi}(t) \cos t$$

را پیدا کنید .

حل .

$$\mathcal{L}[u_{\pi}(t) \cos t] = e^{-\pi s} \mathcal{L}[\cos(t + \pi)]$$

$$= e^{-\pi s} \mathcal{L}(-\cos t)$$

$$= -e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 1}$$

مثال ۵۲.۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t < \pi \\ t - \pi & \text{اگر } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{اگر } t \geq 2\pi \end{cases}$$

را پیدا کنید .

حل . ابتدا تابع $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان می‌کنیم .

$$f(t) = (u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t))(t - \pi)$$

$$= u_{\pi}(t)(t - \pi) - u_{2\pi}(t)(t - \pi)$$

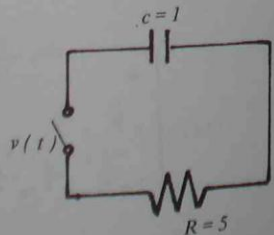
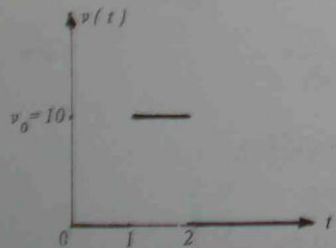
و

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u_{\pi}(t)(t - \pi)) - \mathcal{L}(u_{2\pi}(t)(t - \pi))$$

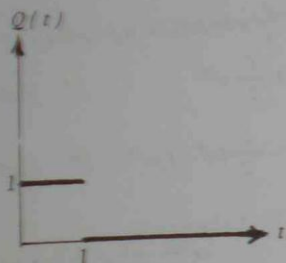
$$= e^{-\pi s} \mathcal{L}(t) - e^{-2\pi s} \mathcal{L}(t + \pi)$$

$$= e^{-\pi s} \frac{1}{s^2} - e^{-2\pi s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} \right)$$

مثال ۵۳.۶. در مدار RC زیر، ولتاژ v_0 در مدار فرستاده می‌شود . فرض کنید قبل از آن جویانی از مدار نمی‌گذرد؛ شدت جریان $i(t)$ را پیدا کنید .



$$y'' + 3y' + 2y = Q(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$



که در آن

$$Q(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{اگر } t > 1 \end{cases}$$

حل. ابتدا $Q(t)$ را بر حسب تابع پله‌ای واحد بیان می‌کنیم:

$$Q(t) = u_0(t) - u_1(t)$$

حال از طرفین معادله دیفرانسیل، لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y'') + 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(u_0(t) - u_1(t))$$

$$s^2 Y + 3sY + 2Y = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

$$Y = F(s)(1 - e^{-s}), \quad F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

ابتدا $\mathcal{L}^{-1}(F)$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-s} F(s)) = u_1(t) f(t-1) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2} e^{-2(t-1)} & \text{اگر } t > 1 \end{cases}$$

حل.

$$Ri(t) + \frac{1}{c} \int_0^t i(r) dr = v(t)$$

$$5i(t) + \int_0^t i(r) dr = 10(u_1(t) - u_2(t))$$

از طرفین رابطه بالا لاپلاس می‌گیریم

$$5\mathcal{L}(i(t)) + \mathcal{L}\left[\int_0^t i(r) dr\right] = 10[\mathcal{L}(u_1(t)) - \mathcal{L}(u_2(t))]$$

$$5I + \frac{I}{s} = 10\left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right)$$

$$I = \frac{10}{5s+1}(e^{-s} - e^{-2s})$$

$$= \frac{2}{s+1/5}(e^{-s} - e^{-2s})$$

از طرفی

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+1/5}\right) = 2e^{-\frac{t}{5}}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}e^{-s} \cdot \frac{2}{s+1/5} - \mathcal{L}^{-1}e^{-2s} \cdot \frac{2}{s+1/5}$$

و سایر فرمول (۶) داریم،

$$i(t) = 2\left[e^{-\frac{1}{5}(t-1)} u_1(t) - e^{-\frac{1}{5}(t-2)} u_2(t)\right]$$

یعنی

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t < 1 \\ e^{\frac{1}{5}} \cdot e^{-\frac{t}{5}} & \text{اگر } 1 < t < 2 \\ \left(e^{\frac{1}{5}} - e^{\frac{2}{5}}\right) e^{-\frac{t}{5}} & \text{اگر } t > 2 \end{cases}$$

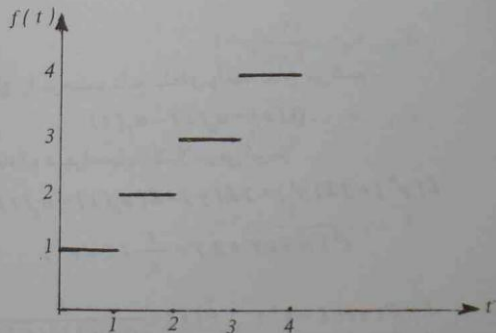
مثال ۶.۵۴. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

و در نتیجه

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - u_1(t)f(t-1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} & \text{اگر } 0 \leq t < 1 \\ (e-1)e^{-t} - \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-2t} & \text{اگر } t \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۵۵.۰۶. تبدیل لاپلاس تابع پلکانی



شکل ۶.۰۶

را پیدا کنید.

حل. ابتدا تابع پلکانی $f(t)$ را بر حسب توابع پله‌ای بیان می‌کنیم.

$$f(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots$$

حال از طرفین رابطه بالا، لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s}(1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots)$$

عبارت داخل پرانتز یک تصاعد هندسی است با قدر نسبت e^{-s} و چون $|e^{-s}| = e^{-s} < 1$

پس

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-s}}$$

مجموعه مسائل ۴.۰۶

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

$$f(t) = e^{-t}(2\sqrt{t} - 5 \sin t - 2) \quad .1$$

$$f(t) = e^{3t} \sinh 4t \quad .2$$

$$f(t) = \sinh 2t \cos t \quad .3$$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{1}{(s+4)^3} - \frac{2}{(s-1)^4} \quad .4$$

$$\frac{s}{s^2 - 2s + 2} \quad .5$$

$$\frac{s-1}{s(s^2 + 2s + 1)} \quad .6$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + 17y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 12 \quad .7$$

$$4y'' + 4y' + 37y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{3}{2} \quad .8$$

$$y'' + y' + 1.25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2} \quad .9$$

$$y'' + 4y' + 4y = 8e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad .10$$

$$u_{\pi}(t) \sin t \quad \cdot 16$$

$$e^{3t} u_1(t) \quad \cdot 17$$

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

$$f(t) = \begin{cases} t^3 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} \quad \cdot 18$$

$$f(t) = \begin{cases} 4 \cos 2t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \cdot 19$$

$$f(t) = \begin{cases} 2 - e^{3t} & 0 < t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases} \quad \cdot 20$$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{e^{-s}}{s^4} \quad \cdot 21$$

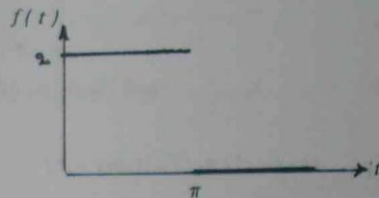
$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 4} \quad \cdot 22$$

$$\frac{1 - e^{-s}}{s(s+2)} \quad \cdot 23$$

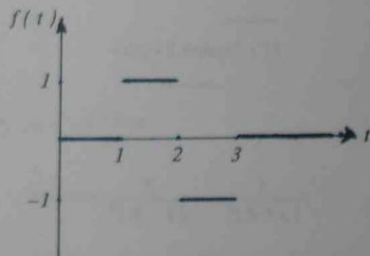
$$\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4s + 20} \quad \cdot 24$$

$$\frac{se^{3s}}{s^2 - 9} \quad \cdot 25$$

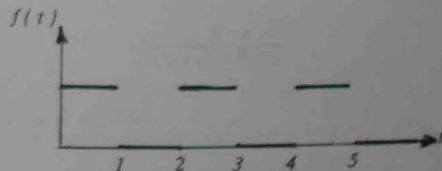
توابع زیر را بر حسب توابع پله‌ای واحد بیان نموده و تبدیل لاپلاس هر یک را بنویسید. ۵۱



۵۲



۱۳



تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

$$(t - \pi) u_{\pi}(t) \quad \cdot 14$$

$$t^3 u_2(t) \quad \cdot 15$$

۵.۶. مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

قضیه ۶.۱۱. اگر تابع $f(t)$ روی $t \geq 0$ پیوسته، قطعی و هم مرتبه، نمایی e^{at} با $a > 0$ باشد، آنگاه برای $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(1) \quad F^{(n)}(s) = \frac{d^n F(s)}{ds^n} = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)], \quad s > a$$

اثبات. اگر $n=1$ باشد،

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-st} f(t)) dt$$

$$= \int_0^{\infty} -t e^{-st} f(t) dt$$

$$= \mathcal{L}[-t f(t)].$$

و اگر همین روش را ادامه دهیم، قضیه برای هر n درست می‌باشد؛ و با توجه به (۱) داریم

$$(2) \quad f(t) = \frac{-1}{t} \mathcal{L}^{-1} F'(s)$$

مثال ۶.۵۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = t \cos at$$

را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم اگر $f(t) = \cos at$ باشد، آنگاه

$$F(s) = \mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

و چون

$$\mathcal{L}(t f(t)) = -F'(s)$$

پس

$$\mathcal{L}(t \cos at) = -\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right)'$$

$$= \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

مثال ۶.۵۷. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = t^2 \sin at$$

را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم اگر $f(t) = \sin at$ باشد، آنگاه

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

و

$$\mathcal{L}(t^2 f(t)) = F''(s)$$

بنابراین

$$\mathcal{L}(t^2 \sin at) = \left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right)''$$

$$= \frac{6as - 2a^3}{(s^2 + a^2)^3}$$

مثال ۶.۵۸. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = t^2 \sinh at$$

را پیدا کنید.

حل. اگر $f(t) = \sinh at$ باشد، آنگاه $F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$

و

$$\mathcal{L}(t^2 \sinh at) = \left(\frac{a}{s^2 - a^2}\right)''$$

$$= \frac{6as^2 + 2a^3}{(s^2 - a^2)^3}$$

مثال ۶.۵۹. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = t^2 e^{2t}$$

را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم اگر $f(t) = e^{2t}$ باشد، آنگاه $F(s) = \frac{1}{s-2}$

پس

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2 e^{2t}) &= \left(\frac{1}{s-2} \right)'' \\ &= \frac{2}{(s-2)^3} \end{aligned}$$

مثال ۶.۶۰. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = t^2 e^{-2t} \sin t$$

را حساب کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(t^2 e^{-2t} \sin t) = \mathcal{L}(t^2 f(t)) = F''(s)$$

که

$$f(t) = e^{-2t} \sin t, \quad F(s) = \mathcal{L}(e^{-2t} \sin t)$$

از طرفی

$$F(s) = F_1(s+2)$$

و

$$F_1(s) = \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$$

بنابراین

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

و

$$\mathcal{L}(t^2 e^{-2t} \sin t) = \left(\frac{1}{(s+2)^2+1} \right)''$$

و با دو بار مشتق‌گیری نسبت به s جواب مطلوب بدست می‌آید.

مثال ۶.۶۱. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = t e^t \cos t$$

را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(t e^t \cos t) = \mathcal{L}(t f(t)) = -F'(s)$$

که

$$f(t) = e^t \cos t, \quad F(s) = \mathcal{L}(e^t \cos t)$$

و می‌دانیم

$$F(s) = F_1(s+1)$$

$$F_1(s) = \mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$$

و

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

و

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t e^t \cos t) &= - \left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1} \right)' \\ &= \frac{s^2+2s}{((s+1)^2+1)^2} \end{aligned}$$

مثال ۶.۶۲. مقدار انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\infty} t e^{2t} \sin t \, dt$$

حل. ابتدا، حاصل انتگرال زیر را بدست می‌آوریم و سپس در جواب $s=2$ قرار می‌دهیم

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} \sin t \, dt = \mathcal{L}(t \sin t)$$

و می‌دانیم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \sin t) &= -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' \\ &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} t e^{-2t} \sin t \, dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \Big|_{s=2} = \frac{4}{25}$$

مثال ۰۶.۰۶۳. $f(t)$ را پیدا کنید، اگر

$$F(s) = \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

حل. با توجه به فرمول (۲) ابتدا $F'(s)$ را حساب می‌کنیم.

$$F'(s) = \frac{-\frac{1}{s^2}}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1} = \frac{-1}{s^2+1}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{-1}{t} \mathcal{L}^{-1} \frac{-1}{s^2+1} = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

مثال ۰۶.۰۶۴. $f(t)$ را پیدا کنید اگر

$$F(s) = \operatorname{Ln} \frac{s}{s-1}$$

حل. با توجه به فرمول (۲) ابتدا $F'(s)$ را حساب می‌کنیم

$$F'(s) = -\frac{1}{s(s-1)}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{t} \int_0^t e^{t-d} \, dd \\ &= \frac{e^t - 1}{t} \end{aligned}$$

مجموعه مسائل ۰۵.۰۶

تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۰۱. $t^2 \cosh 2t$

۰۲. $t(5 \sin 4t - 2t \cos t)$

۰۳. $t(2 \cosh 4t + 3t \sinh 2t)$

۰۴. $t^n e^{at}$

۰۵. $t e^{4t} \sin 3t$

۰۶. $t^2 e^{-t} \int_0^t e^{2t} \sin 5t \, dt$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

۰۷. $F(s) = \operatorname{Ln} \frac{s^2+1}{s(s+1)}$

پس

$$\int_s^{\infty} F(u) du = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{f(t)}{t} \right) dt$$

$$= \mathcal{L} \left(\frac{f(t)}{t} \right).$$

با توجه به فرمول (۱) داریم

$$(۲) \quad f(t) = t \mathcal{L}^{-1} \int_s^{\infty} F(u) du$$

مثال ۰۶ . ۰۶۵ . تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sinh 2t}{t}$ را پیدا کنید .

حل . یا فرض $f(t) = \sinh 2t$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sinh 2t}{t} = 2$$

از طرفی

$$\mathcal{L} f(t) = \mathcal{L}(\sinh 2t) = \frac{2}{s^2 - 4}$$

و بنابر فرمول (۱) داریم .

$$\mathcal{L} \left(\frac{\sinh 2t}{t} \right) = \int_s^{\infty} \frac{2}{u^2 - 4} du$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L} n \left| \frac{u-2}{u+2} \right| \Big|_s^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \mathcal{L} n \left| \frac{s-2}{s+2} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L} n \left| \frac{s+2}{s-2} \right|$$

مثال ۰۶ . ۰۶۶ . تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin 3t}{t}$ را پیدا کنید .

$$F(s) = \mathcal{L} n \frac{s^2 + 4}{s^2} \quad (۸)$$

$$F(s) = \cot^{-1}(s+4) \quad .۹$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s} \quad .۱۰$$

مقدار انتگرالهای زیر را بدست آورید .

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^2 \cos t dt \quad .۱۱$$

$$\int_0^{\infty} e^{-3t} t \sinh 2t dt \quad .۱۲$$

$$\int_0^{\infty} t e^{4t} \cos 2t dt \quad .۱۳$$

۰۶ . ۰۶۶ . انتگرالگیری از تبدیل لاپلاس

قضیه ۰۶ . ۰۱۲ . اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه وجود صدق کند و اگر $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد و $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ آنگاه

$$(۱) \quad \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^{\infty} F(u) du$$

اثبات .

$$\int_s^{\infty} F(u) du = \int_s^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-ut} f(t) dt \right) du$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_s^{\infty} e^{-ut} f(t) du \right) dt$$

از طرفی

$$\int_s^{\infty} e^{-ut} f(t) du = \left. \frac{-f(t)}{t} e^{-ut} \right|_s^{\infty} = \frac{f(t)}{t} e^{-st}$$

حل ✓. با فرض $f(t) = \sin 3t$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3t}{t} = 3$$

$$\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

و بنا بر فرمول (۱)

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin 3t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{3}{u^2 + 9} du$$

$$= \tan^{-1} \frac{u}{3} \Big|_s^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{3} = \cot^{-1} \frac{s}{3}$$

مثال ۶۷. ۶. تبدیل لاپلاس تابع $\frac{1 - \cos t}{t}$ را پیدا کنید.حل. با فرض $f(t) = 1 - \cos t$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

$$\mathcal{L}(1 - \cos t) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

بنا بر فرمول (۱)

$$\mathcal{L}\left(\frac{1 - \cos t}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 + 1}\right) du$$

$$= \ln u - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) \Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \Big|_s^\infty = \ln \frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s}$$

مثال ۶۸. ۶. مقدار انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int_0^\infty \frac{\cos t - \cos 2t}{t} dt \quad (1)$$

حل. ابتدا انتگرال زیر را پیدا می‌کنیم،

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\cos t - \cos 2t}{t} dt = \mathcal{L}\left(\frac{\cos t - \cos 2t}{t}\right) \quad (2)$$

سپس در جواب $s = 0$ قرار می‌دهیمو برای محاسبه (۲) فرض می‌کنیم $f(t) = \cos t - \cos 2t$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t - \cos 2t}{t} = 0$$

$$\mathcal{L}(\cos t - \cos 2t) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 4}$$

و بنا بر فرمول (۱)

$$\mathcal{L}\left(\frac{\cos t - \cos 2t}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u^2 + 1} - \frac{1}{u^2 + 4}\right) du$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(u^2 + 1) - \ln(u^2 + 4)) \Big|_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{s^2 + 4}{s^2 + 1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos t - \cos 2t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{s^2 + 4}{s^2 + 1} \Big|_{s=0}$$

$$= \ln 2$$

مثال ۶۹. ۶. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)^2}$$

حل. بنا بر فرمول (۲)

$$\begin{aligned} f(t) &= t \mathcal{L}^{-1} \int_s^{\infty} \frac{u}{(u^2+4)^2} du \\ &= \frac{t}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int \frac{-1}{u^2+4} \Big|_s^{\infty} \right\} \\ &= \frac{t}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{t}{4} \sin 2t \end{aligned}$$

مثال ۶.۷۰. تبدیل لاپلاس تابع

$$e^t \int_0^t e^{-2t} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L} \left[e^t \int_0^t e^{-2t} \frac{1-e^{-t}}{t} dt \right] = F_1(s-1)$$

$$F_1(s) = \mathcal{L} \left[\int_0^t e^{-2t} \frac{1-e^{-t}}{t} dt \right] = \frac{1}{s} F_2(s)$$

$$F_2(s) = \mathcal{L} \left[e^{-2t} \frac{1-e^{-t}}{t} \right] = F_3(s+2)$$

$$F_3(s) = \mathcal{L} \left(\frac{1-e^{-t}}{t} \right)$$

و چون

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$$

$$\mathcal{L}(1-e^{-t}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} F_3(s) &= \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \ln u - \ln(u+1) \Big|_s^{\infty} \\ &= \ln \frac{u}{u+1} \Big|_s^{\infty} = \ln \frac{s+1}{s} \end{aligned}$$

و

$$F_2(s) = \ln \frac{s+3}{s+2}$$

و

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \ln \frac{s+3}{s+2}$$

و

$$F_1(s-1) = \frac{1}{s-1} \ln \frac{s+2}{s+1}$$

مجموعه مسائل ۶.۶.

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{e^t - \cos t}{t} \quad .1$$

$$\frac{2}{t} (1 - \cosh 3t) \quad .2$$

$$\frac{1}{t} (e^{2t} - e^{4t}) \quad .3$$

نشان دهید که،

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0 \quad .4$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin t}{t} dt = \cot^{-1} a, \quad a > 0 \quad .5$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{s}{(s^2 + 1)^2} \quad .7$$

$$\frac{s+2}{(s^2 + 4s + 5)^2} \quad .8$$

$$\frac{s}{(s^2 - 4)^2} \quad .9$$

تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$e^{2t} \int_0^t e^t \frac{\sin 2t}{t} dt \quad .10$$

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} \quad .11$$

$$t \int_0^t e^{3t} \frac{\sinh t}{t} dt \quad .12$$

$$t \int_0^t \frac{1 - \cos t}{t} dt \quad .13$$

۷.۶ کانولوشن*

تعریف ۵.۶. کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f * g)(t)$ نشان داده می شود، عبارت است از:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda \quad (1)$$

کانولوشن دارای خواص زیر می باشد:

* Convolution

۱. خاصیت جابجایی $f * g = g * f$

۲. خاصیت توزیع پذیری $f * (g + h) = f * g + f * h$

۳. خاصیت انجمنی $f * (g * h) = (f * g) * h$

۴. $f * 0 = 0 * f = 0$

۵. $f * (cg) = (cf) * g = c(f * g)$

اما در حالت کلی $f * f = f$ نیست و $f * f \geq 0$ ممکن است نباشد.

اثبات قسمت ۲. با فرض

$$t - \lambda = v \Rightarrow \lambda = t - v, \quad d\lambda = -dv$$

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda \\ &= - \int_t^0 f(t - v) g(v) dv \\ &= \int_0^t g(v) f(t - v) dv \\ &= (g * f)(t) \end{aligned}$$

حال نشان می دهیم که در حالت کلی $f * f \neq f$

$$1 * \cos t = \int_0^t \cos \lambda d\lambda = \sin \lambda \Big|_0^t = \sin t$$

مثال ۶.۷۱. اگر $f(t) = \cos t$ باشد $(f * f)(t)$ را پیدا کنید

حل.

$$\begin{aligned} (f * f)(t) &= \int_0^t \cos \lambda \cos(t - \lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t + \cos(2\lambda - t)] d\lambda \\ &= \frac{1}{2} [t \cos t + \sin t] \end{aligned}$$

و بعنوان مثال برای $t = \pi$ مقدار عبارت بالا برابر با $\frac{\pi}{2}$ می باشد که منفی است. یعنی

$$(f * f) \neq 0$$

قضیه ۶.۱۳. قضیه کانولوشن

اگر $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع پیوسته، قطعی و هم مرتبه، نمایی e^{at} با $a > 0$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس $(f * g)(t)$ برای $s > a$ موجود و برابر $F(s)G(s)$ می باشد، به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] &= (f * g)(t) \\ G(s) &= \mathcal{L}(g(t)), \quad F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \end{aligned} \quad (۲)$$

اثبات .

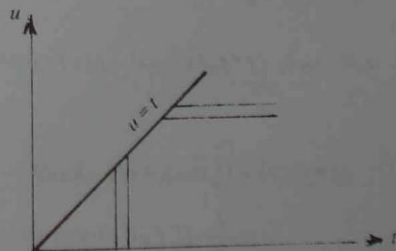
$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-sv} g(v) dv \right) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u)g(v) dv du \end{aligned}$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$u+v=t, \quad u=u$$

زاگومین تبدیل $j=1$. بنابراین

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} \int_u^{\infty} e^{-st} f(u)g(t-u) dt du$$



شکل ۷.۶

با عوض کردن ترتیب انتگرالگیری داریم،

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u) du dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(u)g(t-u) du \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt \end{aligned}$$

$$= \mathcal{L}((f * g)(t)).$$

مثال ۶.۲۲. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{1}{(s-2)(s+3)}$$

را پیدا کنید.

حل. با فرض

$$F(s) = \frac{1}{s-2}, \quad G(s) = \frac{1}{s+3}$$

داریم،

$$f(t) = e^{2t}, \quad g(t) = e^{-3t}$$

و طبق فرمول (۲) داریم،

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s-2)(s+3)} &= \int_0^t e^{2\lambda} e^{-3(t-\lambda)} d\lambda \\ &= e^{-3t} \int_0^t e^{5\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{5} e^{-3t} (e^{5t} - 1). \end{aligned}$$

مثال ۶.۲۳. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$$

(۱)

را پیدا کنید.

حل. ابتدا (۱) را به فرم زیر می نویسیم

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{(s^2+1)} \cdot \frac{s}{(s^2+1)}$$

و می داریم

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2+1} = \cos t$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \int_0^t \cos \lambda \cos(t-\lambda) d\lambda$$

و با توجه به مثال ۶.۷۱.

$$= \frac{1}{2} [t \cos t + \sin t]$$

مثال ۶.۷۴. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$$

را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s^2+4s+13)^2} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{((s+2)^2+9)^2}$$

$$= e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s^2+9)^2}$$

$$= e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2+9} \cdot \frac{1}{s^2+9}$$

$$= \frac{1}{9} e^{-2t} \int_0^t \sin 3\lambda \sin 3(t-\lambda) d\lambda$$

$$= \frac{1}{18} e^{-2t} \int_0^t (\cos(6\lambda-3t) - \cos 3t) d\lambda$$

$$= \frac{1}{54} e^{-2t} (\sin 3t - 3t \cos 3t)$$

مثال ۶.۷۵. معادله دیفرانسیل

$$y'' + 4y = 2 \sin 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را حل کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}y = 2\mathcal{L} \sin 3t$$

$$s^2 Y + 4Y = \frac{6}{s^2+9}$$

$$Y = \frac{6}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

و

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{3}{s^2+9} - \frac{2}{s^2+4}$$

از طرفی

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{3}{s^2+9} = \sin 3t, \quad \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{s^2+4} = \sin 2t$$

بنابراین

$$y(t) = \int_0^t \sin 3\lambda \sin 2(t-\lambda) d\lambda$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} \sin 2t - \sin 3t \right)$$

مثال ۶.۷۶. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)}$$

را پیدا کنید.

حل.

$$F(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow g(t) = \sin t$$

تعریف ۶.۶. معادلات انتگرالی، معادلاتی هستند که تابع مجهول زیر علامت انتگرال می باشد.

تعریف ۶.۷. معادلات دیفرانسیل انتگرالی، معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز می باشد.

برای حل این نوع معادلات از قضیه کانولوشن استفاده می کنیم.

مثال ۶.۷۸. معادله زیر را حل کنید.

$$y(t) = \sin 2t + \int_0^t y(\lambda) \sin 2(t-\lambda) d\lambda$$

حل. از طرفین لاپلاس می گیریم

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(\sin 2t) + \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\lambda) \sin 2(t-\lambda) d\lambda\right]$$

$$Y = \frac{2}{s^2+4} + \mathcal{L}(y * \sin 2t)$$

$$= \frac{2}{s^2+4} + Y \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

و

$$Y = \frac{2}{s^2+2}$$

و

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{s^2+2} = \sqrt{2} \sin \sqrt{2} t$$

مثال ۶.۷۹. معادله زیر را حل کنید.

$$y(t) = e^t - 2 \int_0^t \cos(t-\lambda) y(\lambda) d\lambda$$

حل. از طرفین لاپلاس می گیریم

$$Y = \frac{1}{s+1} - 2 \frac{s}{s^2+1} \cdot Y$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^3(s^2+1)} &= \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 \sin(t-\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} t^2 + \cos t - 1 \end{aligned}$$

مثال ۶.۷۷. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{1}{(s-1)(s^2-4)^2}$$

را پیدا کنید.

حل.

$$F(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow f(t) = e^t$$

$$G(s) = \frac{s}{(s^2-4)^2} \Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{(s^2-4)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{s}{(s^2-4)^2} = \frac{t}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\int_s^\infty \frac{2u}{(u^2-4)^2} du \right]$$

$$= \frac{t}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{u^2-4} \right]_s^\infty$$

$$= \frac{t}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2-4}$$

$$= \frac{t}{4} \sinh 2t$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{(s^2-4)^2} = \frac{1}{4} \int_0^t e^{t-\lambda} \lambda \sinh 2\lambda d\lambda$$

$$= \frac{1}{8} e^t (t e^t - e^t + \frac{1}{3} t e^{-3t} + \frac{1}{9} e^{-3t} + \frac{8}{9})$$

بنابراین

$$Y = \frac{s^2 + 1}{(s + 1)^3} = \frac{1}{s + 1} - \frac{2}{(s + 1)^2} + \frac{2}{(s + 1)^3}$$

$$y(t) = (1 - t)^2 e^{-t}$$

مثال ۶.۸۰. معادله دیفرانسیل

$$y''(t) + y'(t) = \cos t + \int_0^t \sin(t - \lambda) y'(\lambda) d\lambda, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را حل کنید.

حل. از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(\cos t) + \mathcal{L}\left(\int_0^t \sin(t - \lambda) y'(\lambda) d\lambda\right)$$

$$s^2 Y + s Y = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1} Y$$

$$Y = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$$

$$y(t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + s + 1}\right) dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2 + s + 1} = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= e^{-t/2} \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2 + \frac{3}{4}} = e^{-t/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t dt$$

و با محاسبه انتگرال بالا، جواب پیدا می‌شود.

مجموعه مسائل ۶.۷.

کانولوشن‌های زیر را پیدا کنید.

۱. $(\sin t) * (\cos t)$

۲. $t * e^{at}$

۳. $(\sin 3t) * e^{2t}$

۴. $(\sin 2t) * (\sin 4t)$

۵. $1 * \sin t$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

۶. $\frac{1}{s^3 - 5s^2}$

۷. $\frac{2}{s^2(s^2 + 4)}$

۸. $\frac{1}{s+1} \ln \frac{s}{s-1}$

۹. $\frac{s}{s^2+1} \cot^{-1}(s+1)$

۱۰. $\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱۱. $f(t) = \int_0^t (t - \lambda)^3 \sin \lambda d\lambda$

۱۲. $f(t) = \int_0^t \lambda^6 e^{s(t-\lambda)} d\lambda$

۱۱) \mathcal{L}^{-1}

۱۲) \mathcal{L}^{-1}

$$f(u) = \int_0^u (u-t)^3 t^5 dt \quad .13$$

معادلات زیر را حل کنید .

$$y(t) = t^2 + \int_0^t \sin(t-\lambda) y(\lambda) d\lambda \quad .14$$

$$y(t) = 1 - \int_0^t (t-\lambda) y(\lambda) d\lambda \quad .15$$

$$y(t) = e^{-t} - 2 \int_0^t \cos(t-\lambda) y(\lambda) d\lambda \quad .16$$

$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(\lambda) d\lambda = 0 \quad y(0) = 1 \quad .17$$

۸.۶. تبدیل لاپلاس توابع متناوب

تعریف ۸.۶. تابع $f(t)$ را متناوب با دوره تناوب p گوئیم ، اگر $f(t+p) = f(t)$ باشد .

قضیه ۸.۶.۱۴. فرض کنید $f(t)$ تابعی پیوسته قطعی و متناوب با دوره تناوب p باشد . آنگاه

$$(1) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-pS}} \int_0^p e^{-St} f(t) dt$$

اثبات .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \int_0^{\infty} e^{-St} f(t) dt \\ &= \int_0^p e^{-St} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-St} f(t) dt + \int_{2p}^{3p} e^{-St} f(t) dt + \dots \end{aligned}$$

حال در انتگرال اول به جای t مقدار T و در انتگرال دوم به جای t مقدار $T+p$ و در انتگرال سوم به جای t مقدار $T+2p$ و به همین ترتیب در انتگرال $n+1$ ام به جای t مقدار $T+np$ را قرار می دهیم . در این صورت حدود تمام انتگرالها از 0 تا p خواهد

شد . و در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \int_0^p e^{-St} f(t) dt + \int_0^p e^{-S(T+P)} f(T+P) dT + \\ &\quad \int_0^p e^{-S(T+2P)} f(T+2P) dT + \dots \end{aligned}$$

از طرفی چون تابع متناوب با دوره تناوب P است ، داریم

$$f(T+P) = f(T+2P) = \dots = f(T)$$

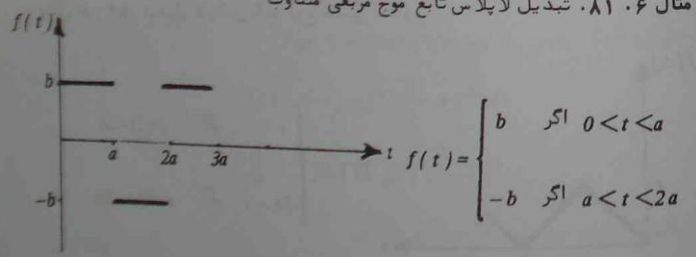
پس

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \int_0^p e^{-St} f(t) dt + e^{-SP} \int_0^p e^{-St} f(t) dt + e^{-2SP} \int_0^p e^{-St} f(t) dt + \dots \\ &= (1 + e^{-SP} + e^{-2SP} + e^{-3SP} + \dots) \int_0^p e^{-St} f(t) dt \end{aligned}$$

و عبارت داخل پرانتز یک سری هندسی با قدر نسبت e^{-SP} می باشد . بنابراین

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-SP}} \int_0^p e^{-St} f(t) dt.$$

مثال ۸.۶.۱۱. تبدیل لاپلاس تابع موج مربعی متناوب



شکل ۸.۶

را پیدا کنید .

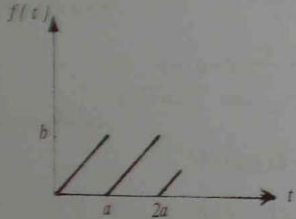
حل. تابع $f(t)$ تابعی است متناوب با دوره تناوب $2a$. بنابراین طبق فرمول

$$(1) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-2aS}} \int_0^{2a} e^{-St} f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left[\int_0^a b e^{-st} dt + \int_a^{2a} (2a-t) e^{-st} dt \right] \\
 &= \frac{1}{s^2} \cdot \frac{(1-e^{-as})^2}{1-e^{-2as}} \\
 &= \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} \\
 &= \frac{1}{s^2} \tanh \frac{as}{2} \\
 &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left[\int_0^a b e^{-st} dt + \int_a^{2a} -b e^{-st} dt \right] \\
 &= \frac{b}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-2as}} \{ [e^{-st}]_a^{2a} - [e^{-st}]_0^a \} \\
 &= \frac{b}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-2as}} [e^{-2as} - 2e^{-as} + 1] \\
 &= \frac{b}{s} \cdot \frac{(1-e^{-as})^2}{(1-e^{-as})(1+e^{-as})} = \frac{b}{s} \cdot \frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} \\
 &= \frac{b}{s} \cdot \frac{e^{\frac{as}{2}} (e^{\frac{as}{2}} - e^{-\frac{as}{2}})}{e^{\frac{as}{2}} (e^{\frac{as}{2}} + e^{-\frac{as}{2}})} \\
 &= \frac{b}{s} \tanh \frac{as}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left[\int_0^a t e^{-st} dt + \int_a^{2a} (2a-t) e^{-st} dt \right] \\
 &= \frac{1}{s^2} \cdot \frac{(1-e^{-as})^2}{1-e^{-2as}} \\
 &= \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} \\
 &= \frac{1}{s^2} \tanh \frac{as}{2}
 \end{aligned}$$

مثال ۰۸۳.۰۶. تبدیل لاپلاس موج دندانه‌ای متناوب



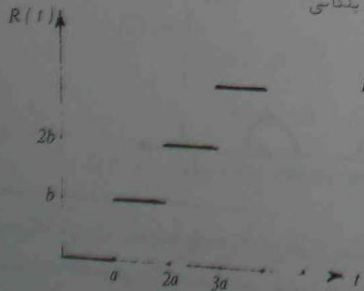
$$f(t) = \frac{b}{a} t, \quad 0 < t < a$$

شکل ۱۰.۰۶

حل. تابعی متناوب با دوره تناوب a می‌باشد. و

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-as}} \int_0^a \frac{b}{a} t e^{-st} dt \\
 &= \frac{b}{a} \cdot \frac{1+as}{s^2} - \frac{b}{s(1-e^{-as})}
 \end{aligned}$$

مثال ۰۸۴.۰۶. تبدیل لاپلاس تابع پلکانی

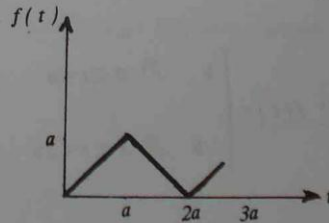


$$R(t) = bn, \quad na < t < (n+1)a$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

شکل ۱۱.۰۶

مثال ۰۸۲.۰۶. تبدیل لاپلاس تابع موج مثلثی متناوب



$$f(t) = \begin{cases} t & \text{اگر } 0 < t < a \\ 2a-t & \text{اگر } a < t < 2a \end{cases}$$

شکل ۹.۰۶

را پیدا کنید.

حل. تابعی متناوب با دوره تناوب $2a$ می‌باشد. و

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt$$

را پیدا کنید.

حل. تابع $R(t)$ برابر است با تفاضل تابع t و تابع $k(t)$ مثال ۰۶-۸۳.

یعنی $R(t) = k(t) - f(t)$
 زیرا اگر $0 < t < a$ باشد، آنگاه

$$R(t) = \frac{b}{a}t - \frac{b}{a}t = 0$$

و اگر $a < t < 2a$

$$R(t) = \frac{b}{a}t - \frac{b}{a}(t-a) = b$$

و ... بنابراین

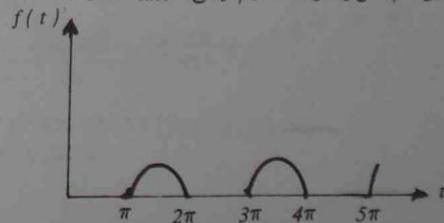
$$\mathcal{L}(R(t)) = \mathcal{L}(k(t)) - \mathcal{L}(f(t))$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1+a s}{s^2} + \frac{b}{s(1-e^{-as})}$$

$$= -\frac{b}{s} \left(1 - \frac{1}{1-e^{-as}}\right)$$

$$= \frac{b}{s} \cdot \frac{e^{-as}}{1-e^{-as}}$$

مثال ۰۶-۸۵. تبدیل لاپلاس یکسو شده نیم موجی $-\sin t$ را پیدا کنید.*



شکل ۰۶-۱۲

* هرگاه به وسیله یک اصلاح کننده (رکتی فایر) قسمت منفی موج را از بین ببریم، می‌گوییم یکسو شده نیم موجی و اگر قسمت منفی موج را مثبت کنیم می‌گوییم یکسو شده تمام موجی.

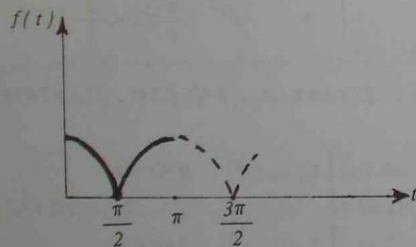
حل.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } 0 < t < \pi \\ -\sin t & \text{اگر } \pi < t < 2\pi \end{cases}, f(t+2\pi) = f(t)$$

$f(t)$ تابعی است متناوب با دوره تناوب 2π ، بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \frac{-1}{1-e^{-2\pi s}} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt \\ &= \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{e^{s\pi}-1} \end{aligned}$$

مثال ۰۶-۸۶. تبدیل لاپلاس یکسو شده تمام موجی $\cos t$ را پیدا کنید.



حل.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{اگر } 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos t & \text{اگر } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}, f(t+\pi) = f(t)$$

$f(t)$ تابعی است متناوب با دوره تناوب π ، بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st} \cos t \, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-st} \cos t \, dt \right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \cdot \frac{1}{s^2+1} \left[s(1-e^{-\pi s}) + 2e^{-s\frac{\pi}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \left[s + \frac{2e^{-\frac{s\pi}{2}}}{1-e^{-\pi s}} \right]$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \left[s + \frac{1}{\sinh \frac{s\pi}{2}} \right]$$

مجموعه مسائل ۰۸ . ۰۶

تبدیل لاپلاس توابع متناوب زیر را پیدا کنید .

$$f(t) = \begin{cases} \cos 4t & \text{اگر } 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{اگر } \frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}, f(t + \frac{\pi}{2}) = f(t)$$

۰۱

$$f(t) = \pi - t, \quad 0 < t < 2\pi, \quad f(t + 2\pi) = f(t)$$

۰۲

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{اگر } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{اگر } 1 \leq t < 2 \end{cases}, f(t+2) = f(t)$$

۰۳

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{اگر } 3 \leq t < 6 \end{cases}, f(t+6) = f(t)$$

۰۴

$$f(t) = \begin{cases} \sin^2 2t & \text{اگر } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 2t & \text{اگر } \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \end{cases}, f(t+\pi) = f(t)$$

۰۵

۰۶

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{اگر } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1-t & \text{اگر } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2} \\ t-2 & \text{اگر } \frac{3}{2} \leq t < 2 \end{cases}, f(t+2) = f(t)$$

۰۷ . تبدیل لاپلاس و تبدیل لاپلاس یکسوشده نیم موجی و یکسوشده تمام موجی تابع زیر را پیدا کنید .

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{اگر } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ t-1 & \text{اگر } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}, f(t+1) = f(t)$$

۰۸ . تبدیل لاپلاس یکسوشده نیم موجی و یکسوشده تمام موجی تریگ "۶" را بنویسید .

۰۹ . تبدیل لاپلاس یکسوشده تمام موجی $\sin t$ را بنویسید .

۰۹ . ۰۶ . دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این بخش با ارائه چند مثال روشن، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس تشریح می‌گردد .

مثال ۰۸۷ . ۰۶ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}, y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$$

حل . فرض می‌کنیم $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$, $\mathcal{L}(y_1) = Y_1$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1') = -\mathcal{L}(y_2) \\ \mathcal{L}(y_2') = \mathcal{L}(y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s Y_1 - 1 = -Y_2 \\ s Y_2 = Y_1 \end{cases} \Rightarrow s(s Y_2) + Y_2 = 1$$

$$Y_2 = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + 1} = \sin t$$

و با جایگذاری $Y_2 = \frac{1}{s^2 + 1}$ در معادله دوم دستگاه آخر داریم،

$$Y_1 = \frac{s}{s^2 + 1} \Rightarrow y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2 + 1} = \cos t$$

مثال ۰۶ . ۸۸ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1'' + y_1 - y_2'' - 4y_2 = 0 \\ y_1' + y_2' = \cos t + 2 \cos 2t \end{cases} \quad (1)$$

$$y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 2$$

حل . از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1'') + \mathcal{L}(y_1) - \mathcal{L}(y_2'') - 4\mathcal{L}(y_2) = 0 \\ \mathcal{L}(y_1') + \mathcal{L}(y_2') = \mathcal{L}(\cos t) + 2\mathcal{L}(\cos 2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 Y_1 - 1 + Y_1 - s^2 Y_2 + 2 - 4 Y_2 = 0 \\ s Y_1 + s Y_2 = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 1) Y_1 - (s^2 + 4) Y_2 = -1 \\ Y_1 + Y_2 = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 4} \end{cases} \quad (2)$$

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -(s^2 + 4) \\ \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 4} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 1 & -(s^2 + 4) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1 + \frac{s^2 + 4}{s^2 + 1}}{2s^2 + 5}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + 1} = \sin t$$

با جایگذاری $Y_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$ در معادله دوم دستگاه (۲) داریم،

$$Y_2 = \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{s^2 + 4} = \sin 2t$$

مثال ۰۶ . ۸۹ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1' + y_1 = y_2' + y_2 \\ y_1'' + y_2'' = e^t \end{cases} \quad (1)$$

$$y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0$$

حل . از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1') + \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2') + \mathcal{L}(y_2) \\ \mathcal{L}(y_1'') + \mathcal{L}(y_2'') = \mathcal{L}(e^t) \end{cases}$$

$$= \cosh t$$

مثال ۶. ۹۰. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y_2'' - 4y_1 = -4e^t \\ y_1'' - y_1 = 3y_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y_1(0) = 2, y_1'(0) = 3, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2$$

حل. از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_2'') - 4\mathcal{L}(y_1) = -4\mathcal{L}e^t \\ \mathcal{L}(y_1'') - \mathcal{L}(y_1) - 3\mathcal{L}(y_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 Y_2 - s - 2 - 4Y_1 = \frac{-4}{s-1} \\ s^2 Y_1 - 2s - 3 - Y_1 - 3Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4Y_1 + s^2 Y_2 = \frac{s^2 + s - 6}{s-1} \\ (s^2 - 1)Y_1 - 3Y_2 = 2s + 3 \end{cases}$$

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s^2 + s - 6}{s-1} & s^2 \\ 2s + 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & s^2 \\ s^2 - 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} sY_1 + Y_1 = sY_2 - 1 + Y_2 \\ s^2 Y_1 - 1 + s^2 Y_2 - s = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+1)Y_1 - (s+1)Y_2 = -1 \\ s^2 Y_1 + s^2 Y_2 = \frac{s^2}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 - Y_2 = \frac{-1}{s+1} \\ Y_1 + Y_2 = \frac{1}{s-1} \end{cases} \quad (2)$$

$$2Y_1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{aligned} 2y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= e^t - e^{-t} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$y_1 = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t$$

با جایگذاری Y_1 در رابطه دوم، دستگاه (۲) داریم.

$$Y_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} \right]$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1') + \mathcal{L}(y_2') = 2\mathcal{L}(\sinh t) \\ \mathcal{L}(y_2') + \mathcal{L}(y_3') = \mathcal{L}(e^t) \\ \mathcal{L}(y_3') + \mathcal{L}(y_1') = 2\mathcal{L}(e^t) + \mathcal{L}(e^{-t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1 - 1 + sY_2 - 1 = \frac{2}{s^2 - 1} \\ sY_2 - 1 + sY_3 = \frac{1}{s - 1} \\ sY_3 + sY_1 - 1 = \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{s + 1} \end{cases} \quad (2)$$

و از حل دستگاه (۲) داریم،

$$Y_1 = \frac{1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s(s^2 - 1)} + \frac{1}{s}$$

$$Y_2 = \frac{1}{s(s^2 - 1)} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 - 1}$$

$$Y_3 = \frac{2}{s^2 - 1}$$

و در نتیجه

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 - 1} + \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s(s^2 - 1)} + \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s}$$

$$= \sinh t + \int_0^t \sinh t dt + 1$$

$$= \sinh t + \cosh t = e^t$$

$$y_2(t) = e^t, \quad y_3(t) = 2 \sinh t.$$

مجموعه مسائل ۹.۶

دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} &= \frac{2s - 3}{(s - 1)(s - 2)} \\ &= \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s - 1} + \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s - 2} \\ &= e^t + e^{2t} \end{aligned}$$

$$Y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & \frac{s^2 + s - 6}{s - 1} \\ s^2 - 1 & 2s + 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & \frac{s^2 + s - 6}{s - 1} \\ s^2 - 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{s - 2}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s - 2} = e^{2t}$$

مثال ۹.۶.۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = 2 \sinh t \\ y_2' + y_3' = e^t \\ y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \quad (1)$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0$$

حل. از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم.

$$\begin{cases} y_1'(t) + y_2'(t) - y_1(t) = 6 - t \\ y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) = 3 + \frac{1}{3}t^3 \\ y_1(0) = -5, y_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y_1'(t) + y_2'(t) = 6 \cos 2t - 2 \sin 2t \\ y_2'(t) - y_1'(t) + 2y_1(t) + 2y_2(t) = 6e^{2t} \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1''(t) + y_2''(t) - y_2'(t) = 6 \\ y_1''(t) + 3y_2(t) = 9t^2 - 2 \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1''(t) + 5y_2''(t) = 10 \\ y_2''(t) + 3y_2'(t) + y_1'(t) = 6t + 1 \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = -11, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1''(t) - y_2'(t) = e^t + 2t \\ y_2''(t) + 4y_2(t) = -4t^2 - 10 \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 3, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 0 \end{cases}$$

جدول تابع بسل

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	3.0	-0.2601	0.3391	6.0	0.1506	-0.2767
0.1	0.9975	0.0499	3.1	-0.2921	0.3009	6.1	0.1773	-0.2559
0.2	0.9900	0.0995	3.2	-0.3202	0.2613	6.2	0.2017	-0.2329
0.3	0.9776	0.1483	3.3	-0.3443	0.2207	6.3	0.2238	-0.2081
0.4	0.9604	0.1960	3.4	-0.3643	0.1792	6.4	0.2433	-0.1816
0.5	0.9385	0.2423	3.5	-0.3801	0.1374	6.5	0.2601	-0.1538
0.6	0.9120	0.2867	3.6	-0.3918	0.0955	6.6	0.2740	-0.1250
0.7	0.8812	0.3290	3.7	-0.3992	0.0538	6.7	0.2851	-0.0953
0.8	0.8463	0.3688	3.8	-0.4026	0.0128	6.8	0.2931	-0.0652
0.9	0.8075	0.4059	3.9	-0.4018	-0.0272	6.9	0.2981	-0.0349
1.0	0.7652	0.4401	4.0	-0.3971	-0.0660	7.0	0.3001	-0.0047
1.1	0.7196	0.4709	4.1	-0.3887	-0.1033	7.1	0.2991	0.0252
1.2	0.6711	0.4983	4.2	-0.3766	-0.1386	7.2	0.2951	0.0543
1.3	0.6201	0.5220	4.3	-0.3610	-0.1719	7.3	0.2882	0.0826
1.4	0.5669	0.5419	4.4	-0.3423	-0.2028	7.4	0.2786	0.1096
1.5	0.5118	0.5579	4.5	-0.3205	-0.2311	7.5	0.2663	0.1352
1.6	0.4554	0.5699	4.6	-0.2961	-0.2566	7.6	0.2516	0.1592
1.7	0.3980	0.5778	4.7	-0.2693	-0.2791	7.7	0.2346	0.1813
1.8	0.3400	0.5815	4.8	-0.2404	-0.2985	7.8	0.2154	0.2014
1.9	0.2818	0.5812	4.9	-0.2097	-0.3147	7.9	0.1944	0.2192
2.0	0.2239	0.5767	5.0	-0.1776	-0.3276	8.0	0.1717	0.2346
2.1	0.1666	0.5683	5.1	-0.1443	-0.3371	8.1	0.1475	0.2476
2.2	0.1104	0.5560	5.2	-0.1103	-0.3432	8.2	0.1222	0.2580
2.3	0.0555	0.5399	5.3	-0.0758	-0.3460	8.3	0.0960	0.2657
2.4	0.0025	0.5202	5.4	-0.0412	-0.3453	8.4	0.0692	0.2708
2.5	-0.0484	0.4971	5.5	-0.0068	-0.3414	8.5	0.0419	0.2731
2.6	-0.0968	0.4708	5.6	0.0270	-0.3343	8.6	0.0146	0.2728
2.7	-0.1424	0.4416	5.7	0.0599	-0.3241	8.7	-0.0125	0.2697
2.8	-0.1850	0.4097	5.8	0.0917	-0.3110	8.8	-0.0392	0.2641
2.9	-0.2243	0.3754	5.9	0.1220	-0.2951	8.9	-0.0653	0.2559

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	2.5	0.498	0.146	5.0	-0.309	0.148
0.5	0.445	-1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	-0.339	-0.024
1.0	0.088	-0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	-0.288	-0.175
1.5	0.382	-0.412	4.0	-0.017	0.398	6.5	-0.173	-0.274
2.0	0.510	-0.107	4.5	-0.195	0.301	7.0	-0.026	-0.303

جدول تابع گاما

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1.22	0.913 106	1.42	0.886 356	1.62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0.887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1.74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0.888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1.98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

جواب مسائل

- فصل اول
 ۱. مرتبه اول
 ۲. مرتبه دوم
 ۳. مرتبه اول
 ۴. مرتبه اول
 ۵. مرتبه اول
 ۶. مرتبه اول
 ۷. مرتبه دوم
 ۸. مرتبه اول
 ۹. مرتبه اول
 ۱۰. مرتبه اول

۱۱. $y'' + 2y' - 3y = 0$
 ۱۲. $xyy'(xy^2 + 1) = 1$
 ۱۳. $3y^2 - x^2 = 2xyy'$
 ۱۴. $y = xy' \ln \frac{x}{y}$
 ۱۵. $y''' - 2y'' + y' = 0$

معادلات دیفرانسیل معمولی

۴۹۹

- $y = c \tan t$.۱۰
- $y = c \operatorname{Ln} x$.۱۱
- $\sec y = cx e^{-\frac{x^2}{2}}$.۱۲
- $y = e^{c \tan \frac{x}{2}}$.۱۳
- $y = \tan \frac{c}{x}$.۱۴
- $e^{-y^2} = x^2 + 2x + c$.۱۵
- $\tan^{-y} y = \frac{x^2}{2} + x + c$.۱۶
- $x^3 y^3 = 6x^2 + c$.۱۷
- $y^3 = cx - 1 - \operatorname{Ln} x$.۱۸
- $2x^2 + (2x \operatorname{Ln} y + 1)^2 = c ; x = 0$.۱۹
- $y = ce^{2x} - 2x - 2$.۲۰
- $\cot \frac{x-y}{2} + x + c = 0$.۲۱
- $\frac{1 + \sqrt{3}(2x+3y)}{1 - \sqrt{3}(2x+3y)} = ce^{4\sqrt{3}x}$.۲۲
- جوابهای مجموعه مسائل ۲۰۲
- $xy^2 - y^3 + \frac{2}{3}x^3 = c$.۱

فصل دوم

جوابهای مجموعه مسائل ۱۰۲

- $(cx+1)y^2 = x(y-1)$.۱
- $y = c(x^2+1)^2$.۲
- $\frac{t+1}{y-1} = ce^{t+y}, y=1$.۳
- $(y+1)e^{-y} = \frac{1}{x} + c$.۴
- $y = c \operatorname{Ln} x$.۵
- $\tan^{-1} x - \sqrt{1+y^2} = c$.۶
- $y^2 + \cos x = 0$.۷
- $\frac{1}{1+r} = \operatorname{Ln} |1-s| + \frac{1}{2}$.۸
- $5x^2 - 2y^2 = 2$.۹

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\ln(y+2) + 2 \tan^{-1} \frac{y+2}{x-3} = c \quad \cdot ۱۶$$

$$\sin \frac{y-2x}{x+1} = c(x+1) \quad \cdot ۱۷$$

$$\ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{c}{x+y} + 1 \quad \cdot ۱۸$$

$$\sin \frac{y}{x} = x+c \quad \cdot ۱۹$$

$$y^2 = 2x^2 \tan^{-1} x + cx^2 \quad \cdot ۲۰$$

$$\sin \frac{y}{x} = ce^x \quad \cdot ۲۱$$

$$y^2 = x \ln cy^2 \quad \cdot ۲۲$$

$$\sqrt{1+x^2 y^4} = cy^2 + 1 \quad \cdot ۲۳$$

جوابهای مجموعه مسائل ۳۰۲

$$\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = c \quad \cdot ۱ \quad \checkmark$$

$$x^6 y^3 + x^4 y^6 = c \quad \cdot ۲$$

$$x^2(1-y^2) + 8y^2 = c \quad \cdot ۳$$

$$x^2 \sin 3y = c \quad \cdot ۴ \quad \checkmark$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad \cdot ۵$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln x + c \quad \cdot ۲$$

$$xy(y-x) = c \quad \cdot ۳$$

$$y = x \sin(\ln |x| + c) \quad \cdot ۴$$

$$e^{-y/x} + \ln x + c = 0 \quad \cdot ۵$$

$$y^2 = 2x^2(\ln x + c) \quad \cdot ۶۱$$

$$e^{-y/k} = \ln x + c \quad \cdot ۷$$

$$\sin^{-1} \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \ln x + c \quad \cdot ۸$$

$$y = 2x \tan^{-1} cx \quad \cdot ۹$$

$$\ln \frac{y}{x} = 2 \cot^{-1}(\ln x + c) \quad \cdot ۱۰$$

$$y = x \sin^{-1} cx \quad \cdot ۱۱$$

$$3y^2 + 2xy - x^2 = c \quad \cdot ۱۲$$

$$(y-2x)^8 = c(y-x)^4 \quad \cdot ۱۳$$

$$(x+2y)(2y+4-x)^8 = c \quad \cdot ۱۴$$

$$x-2y+c = 5 \ln |x-3y+8| \quad \cdot ۱۵$$

۱. $(x \sin y + y \cos y - \sin y) e^x = c$, $F = e^x$
۲. $x^4 y + x y^4 + c x y + 3 = 0$, $F = \frac{1}{x^2 y^2}$
۳. $x^2 + x y^3 = c y^2$, $F = \frac{1}{y^3}$
۴. $3x^4 + 4x^3 + 6x^2 y^2 = c$, $F = x$
۵. $2x e^{-y} + y^2 = c$, $F = e^{-y}$
۶. $(y - x + 1)^3 = c x y$, $F = (x y)^{4/3}$
۷. $6x^2 y^2 + 8x^3 y + 3x^4 = c$, $F = x$
۸. $e^x (2 \sin y + 2x - 2 + \sin x - \cos x) = c$, $F = e^x$
۹. $y^3 + x^3 \ln x = c x^2 + x^3$, $F = \frac{1}{x^4}$
۱۰. $y = c e^x + e^{2x} + 1$, $F = e^x$
۱۱. $x y + y \cos y - \sin y = c$, $F = y$
۱۲. $x e^{2y} - \ln y = c$, $F = \frac{e^{2y}}{y}$
۱۳. $e^x \sin y + y^2 = c$, $F = \sin y$
۱۴. $x^3 y + 3x^2 + y^3 = c$, $F = x y$

۶. $x e^y + y e^x = c$
۷. $r^2 + 2r(\sin Q - \cos Q) = c$
۸. $e^x \sin y + 2y \cos x = c$, $y = 0$
۹. $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$
۱۰. $y \ln x = 2y - 3x^2 + c$
۱۱. $x^3 \tan y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = c$
۱۲. $\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = c$
۱۳. $x \sin y - y \cos x + \ln x y = c$
۱۴. $r^2 Q - r \tan Q = \frac{\pi}{4} - 1$
۱۵. $r \cos Q = 2 + Q$
۱۶. $x(x y^2 - 4) + 4 = 0$
۱۷. $(u^2 + v^2)^2 = 4v$
۱۸. $(x e^x - 6) y^3 + e^x = -5$

۹. $y = e^{-\sin x} (c + \int e^{2x + \sin x} dx)$
۱۰. $y = -\cos x + \frac{\sin x + c}{x}$
۱۱. $y = x(C - \cos x)$
۱۲. $y = e^{-x^2} (c + \frac{x^2}{2})$
۱۳. $y = (x+c)(1+x^2)$
۱۴. $y = (x+1)^2 (c + e^x)$
۱۵. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$
۱۶. $y = \frac{1}{x^2} \sin x$
۱۷. $y = \frac{1}{2x^2} ((\ln x)^2 + 6)$
۱۸. $y = e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$
۱۹. $x = 1 + ce^{-y^2/2}$
۲۰. $x = \frac{1}{4} + ce^{2y^2}$
۲۱. $x = cy + \frac{y^3}{2}$
۲۲. $\sin y = ce^x + x - 1$

۱۵. $\frac{x}{y} + \ln \left| \frac{y^3}{x^2} \right| = c, F = \frac{1}{xy^2}$
۱۶. $3y^2 - 2x^2y^3 = cx^2, F = \frac{y}{x^3}$
۱۷. $x^2 + y^2 = ce^{2 \tan^{-1} \frac{y}{x}}, F = \frac{1}{x^2 + y^2}$
۱۸. $y + 1 + \ln x = cx, F = \frac{1}{x^2}$
۱۹. $x^2 y^2 (y^2 - x^2) = c, F = xy$
- جوابهای مجموعه مسائل ۵.۲
۱. $y = e^{-x} + ce^{-2x}$
۲. $y = 2x^2 + cx^{-2}$
۳. $y = -\cos x + c \sin x$
۴. $y = \frac{x - \cos x + c}{\sec x + \tan x}$
۵. $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin x (3 - \sin^2 x)}{\cos^3 x} + c \sec^3 x$
۶. $y = c(x^2 + 2x - 1)^{1/2} + x$
۷. $y = (x^2 + c)e^{x^2}$
۸. $y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3 \cos^2 x}{c - \cos^3 x} \quad . ۳۷$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{c x^3 - x} \quad . ۳۸$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3 x^2}{c - x^3} \quad . ۳۹$$

$$y = 1 - 4x + \frac{2 e^{2x}}{c - e^{2x}} \quad . ۴۰$$

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۲

$$\begin{cases} x = 2P + 6P^2 + c \\ y = P^2 + 4P^3 \end{cases}, y = 0 \quad . ۱$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{P^2 + 1} - \ln(1 + \sqrt{P^2 + 1}) + \ln P + c \\ y = P\sqrt{1 + P^2} \end{cases}, y = 0 \quad . ۲$$

$$\begin{cases} x = e^P + c \\ y = (P - 1)e^P \end{cases}, y = -1 \quad . ۳$$

$$\begin{cases} x = P^3 - P + 2 \\ y = \frac{3}{4}P^4 - \frac{P^2}{2} + c \end{cases} \quad . ۴$$

$$\begin{cases} x = P \cos P \\ y = P^2 \cos P - P \sin P - \cos P + c \end{cases} \quad . ۵$$

$$\begin{cases} x = P^2 - 2P + 2 \\ y = \frac{2}{3}P^3 - P^2 + c \end{cases} \quad . ۶$$

$$x\sqrt{1+y^2} = c + \sin y \quad . ۲۳$$

$$y = \frac{2x}{x^2 + c} \quad . ۲۴$$

$$1 + 2y(1 + \ln x) = cxy \quad . ۲۵$$

$$y^2 = x \ln \frac{c}{x} \quad . ۲۶$$

$$y = e^{-2x^2} \left(c + \frac{x^2}{2} \right)^2 \quad . ۲۷$$

$$y = (c - 3 \tan x)^{\frac{1}{3}} \sec x \quad . ۲۸$$

$$y^2 = x^2 - 1 + c\sqrt{x^2 - 1} \quad . ۲۹$$

$$x^2 + y^2 = 4 + cy \quad . ۳۰$$

$$\frac{1}{x} = y^2 - 2 + ce^{-y/2} \quad . ۳۱$$

$$x^2 (C - \cos y) = y \quad . ۳۲$$

$$\frac{y}{x^2} = \cos y + y \sin y + c \quad . ۳۳$$

$$e^y = ce^{-x} + 2(\sin x - \cos y) \quad . ۳۴$$

$$\sin y = 2 + ce^{-x/2} \quad . ۳۵$$

$$(y + 1)^2 = \frac{1}{3}x^6 + cx^2 \quad . ۳۶$$

$$\begin{cases} x = cP - \ln P - 2 \\ y = \frac{1}{2} cP^2 - P \end{cases} \quad .18$$

$$\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} - \frac{\cos P}{p^2} - \frac{\sin P}{P} \\ y = \frac{2c}{P} - \frac{2 \cos P}{P} - \sin P \end{cases} \quad .19$$

$$\begin{cases} x = \frac{cP^2 + 2P - 1}{2P^2(P-1)^2} \\ y = \frac{cP^2 + 2P - 1}{2(P-1)^2} - \frac{1}{P} \end{cases}, y = x - 1 \quad .20$$

$$\begin{cases} x = ce^{-P} - 2P + 2 \\ y = c(1+P)e^{-P} - P^2 + 2 \end{cases} \quad .21$$

$$\begin{cases} 3x = 2P + \frac{c}{\sqrt{P}} \\ 3y = P^2 - \frac{c}{\sqrt{P}} \end{cases} \quad .22$$

۷.۲ جوابهای مجموعه مسائل

$$y = 2 \tan 2x \quad .1$$

$$y = 2e^x - x - 1 \quad .2$$

$$y = e^{x^2} - 1 \quad .3$$

$$y = \sqrt{x - x^2} + \sin^{-1} \sqrt{x} + c \quad .7$$

$$\begin{cases} x = P + \sin P \\ y = \frac{P^2}{2} + P \sin P + \cos P + c \end{cases} \quad .8$$

$$\begin{cases} 4y = x^2 + P^2 \\ \ln |P - x| = c + \frac{x}{P - x} \end{cases} \quad .9$$

$$y^2 + c^2 = 2cx, \quad x^2 - y^2 = 0 \quad .10$$

$$x = cy + c^2, \quad x = -\frac{y^2}{4} \quad .11$$

$$y^3 + 3cx - c^2 = 0, \quad 9x^2 + 4y^3 = 0 \quad .12$$

$$c^2x^2 - cy + 1 = 0, \quad y^2 - 4x^2 = 0 \quad .13$$

$$y = cx - e^c, \quad y = x(\ln x - 1) \quad .14$$

$$y = Cx + \cos C, \quad y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} \quad .15$$

$$y = cx + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \quad .16$$

$$\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} - \frac{2}{p^3} \\ y = \frac{2c}{P} - \frac{3}{P^2} \end{cases} \quad .17$$

$$y = \pm 2 \quad \text{تمام } y \text{ ها به غیر از} \quad .11$$

$$y = \pm x \quad \text{تمام صفحه } xy \text{ به غیر از} \quad .12$$

جوابهای مسائل دوره‌ای فصل ۲

$$y = x - \frac{1}{x+c} \quad .1$$

$$y = C \frac{\sin x}{x} + \cos x \quad .2$$

$$(y-x)^6 (y-3x)^9 = c(y-2x)^{12} \quad .3$$

$$x+y-1 = ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}} \quad .4$$

$$y = (1 + \ln(\frac{1+e^x}{2}))^2)^{1/2} \quad .5$$

$$y = e^{\frac{\tan^{-1} x}{2}} \quad .6$$

$$y = -\frac{1}{x} \quad .7$$

$$y = (1 + cy + \ln y) \cos x \quad .8$$

$$\tan \frac{y}{x} = \ln cx \quad .9$$

$$y = x e^{1+cx} \quad .10$$

$$y = 1 + (x-1) \ln c(x-1) \quad .11$$

$$y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad .4$$

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^5}{120} \quad .5$$

$$y_3 = \frac{49}{60} + \frac{17}{12}x - \frac{x^2}{6} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} \quad .6$$

$$y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400} \quad .7$$

$$y_3 = \frac{-7}{20} + x + \frac{5}{24}x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{24} \quad .8$$

$$y_4 = 4e^x - \frac{x^3}{6} - x^2 - 3x - 4 \quad .9$$

$$y_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{53}{12} \quad .10$$

جوابهای مجموعه مسائل ۸.۲

$$R^2 - \{(0,0)\} \quad .3$$

$$-a \leq y \leq a, \quad 0 < a < 1 \quad .6$$

$$xy \quad \text{صفحه} \quad .7$$

$$y \neq x \quad .8$$

$$y \neq \frac{2n+1}{2} \pi \quad .9$$

$$x > y^2 \quad .10$$

- $x \sin y + y \cos x + \operatorname{Ln} \left| \frac{x}{y} \right| = c$. ۲۶
- $x^2 y^2 - 2x^3 y - x^4 = c$. ۲۷
- $y^2 + x \operatorname{Ln} x = cx$, $F = \frac{1}{x^2}$. ۲۸
- $x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = c$, $F = \frac{1}{y^2}$. ۲۹
- $y = ce^x + \frac{1}{c}$, $y = \pm 2e^{x/2}$. ۳۰
- $y = cx + \frac{1}{2}(x^2 - c^2)$, $y = x^2$. ۳۱
- $y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2c}$, $y = \pm x$. ۳۲
- $y = cx - \frac{1}{c}$, $y^2 = -4x$. ۳۳
- $y = cx + c + \sqrt{c}$; $y = -\frac{1}{4(x+1)}$. ۳۴
- $(4x^3 + 3xy + c)^2 = 2(2x^2 + y)^3$. ۳۵
- $(x-c)^2 = y^3(1-y)$, $y = 1$. ۳۶
- $\begin{cases} x = ce^p - 2p + 2 \\ y = c(1+p)e^p - p^2 + 2 \end{cases}$. ۳۷
- $k(x-1)y - y + 1 = 0$. ۳۸
- $y = ce^x - 3$. ۳۹

- $y^2 + 3xy + x^2 - 5x - 5y = c$. ۱۲
- $y^2 = x \operatorname{Ln} cy^2$. ۱۳
- $cx^4 = y^6 + x^3$. ۱۴
- $y = \frac{x^2}{\cos x}$. ۱۵
- $y = (c + x^3) \operatorname{Ln} x$. ۱۶
- $x = cy - \frac{y^2}{2}$. ۱۷
- $\tan \frac{y}{2} = 1 - x + ce^{-x}$. ۱۸
- $y^2 \operatorname{Ln} x = c + \sin x$. ۱۹
- $y^2(c-x) \sin x = 1$. ۲۰
- $\sin y = (x+c)e^x$, $z = \sin y$. ۲۱
- $\operatorname{Ln} y = (x+c)e^x$. ۲۲
- $xy - \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = c$. ۲۳
- $x^2 + ye^{x/y} = c$. ۲۴
- $x^2 \cos^2 y + y^2 = c$. ۲۵

$$y = c e^{-x/2}$$

۴۰

$$y = \frac{c}{x}$$

۴۱

$$x^2 + y^2 = cy$$

۴۲

$$(x^2 + y^2)^2 = c(y^2 + 2x^2)$$

۴۳

فصل سوم

جوابهای مجموعه مسائل ۲.۳

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

۰.۱

$$y = e^{3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$$

۰.۲

$$y = c_1 + c_2 e^{3x}$$

۰.۳

$$y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

۰.۴

$$y = e^{-\frac{x}{2}} (c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x)$$

۰.۵

$$y = 2e^{-x} - 2e^{2x}$$

۰.۶

$$y = 2 \cos 3x + 3 \sin 3x$$

۰.۷

$$y = 3(1 - 4x)e^{2x}$$

۰.۸

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{2\sqrt{11}}{11} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x \right)$$

۰.۹

$$-8 \sin^3 x \quad .5$$

$$(D-1)^3 y = 0 \quad .8$$

$$D^2 (D-2)^2 y = 0 \quad .9$$

$$D(D^2-1)(D^2-4)y = 0 \quad .10$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^x \quad .11$$

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{2x} \quad .12$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x \quad .13$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x + (c_3 + c_4 x) e^{2x} \quad .14$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x \quad .15$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x \quad .16$$

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \sin x \quad .17$$

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{-3x} + e^{2x} (c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x) \quad .18$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \cos 3x \quad .19$$

$$+ (c_7 + c_8 x + c_9 x^2) \sin 3x + (c_{10} + c_{11} x) e^x + c_{12} e^{-x}$$

$$y = 5 e^{-2x} - 4 e^{-3x} \quad .10$$

$$y = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi - 1 + x(1 + \pi^2) \right) e^{\pi(1-x)} \quad .11$$

$$y = \frac{1}{2} (2 + 9x) e^{-\frac{5x}{2}} \quad .12$$

$$y'' - 3y' = 0 \quad .14$$

$$y'' + 2y' + 10y = 0 \quad .15$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad .16$$

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad .17$$

$$y'' - 4y' + 8y = 0 \quad .18$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad .19$$

جوابهای مجموعه مسائل ۳۰۳

$$2 \quad .1$$

$$-\frac{2}{x} \quad .2$$

$$0 \quad .3$$

$$0 \quad .4$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6} x e^{3x} - \frac{1}{18} \sin 3x \quad \cdot 14$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{12} x - \frac{1}{36} \quad \cdot 15$$

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{40} e^{4x} (\sin x + 2 \cos x) \quad \cdot 16$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + x e^x + x^2 (x - 3) \quad \cdot 17$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x}{8} (x - 3) e^x - \frac{x}{4} \sin x \quad \cdot 18$$

$$y = \frac{3}{2} \left[\cos 2x + \left(x - \frac{2}{3} \pi \right) \sin 2x + 1 \right] \quad \cdot 19$$

$$y = 2 \cos x + \sin x - \frac{3}{4} (x^2 \cos x - x \sin x) \quad \cdot 20$$

$$y = 6 - \frac{98}{17} e^{-x/2} + e^{-x} - \frac{4}{17} (4 \sin 2x + \cos 2x) \quad \cdot 21$$

جوابهای مجموعه مسائل ۵.۳

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + \frac{1}{9} e^x \quad \cdot 1$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x + e^{2x} \quad \cdot 2$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{2} (1 + \cos 2x) \quad \cdot 3$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{10} e^x - \frac{1}{7} \sin 4x \quad \cdot 4$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{4x} - \frac{1}{100} (4 \sin 2x + 3 \cos 2x) \quad \cdot 5$$

جوابهای مجموعه مسائل ۴.۳

$$x^2 (Ax + B) e^{4x} \quad \cdot 2$$

$$x (A \cos 4x + B \sin 4x) \quad \cdot 3$$

$$Ax + B \cos 8x + C \sin 8x \quad \cdot 4$$

$$x (Ax + B) e^{4x} \quad \cdot 5$$

$$x (Ax^2 + Bx + c) \quad \cdot 6$$

$$e^x [(Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x] \quad \cdot 7$$

$$x e^{2x} [(Ax^2 + Bx + C) \cos 3x + (A_1 x^2 + B_1 x + C_1) \sin 3x] \quad \cdot 8$$

$$x (Ax + B) + x [(A_1 x^2 + B_1 x + C_1) \sin 3x + (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) \cos 3x] \quad \cdot 9$$

$$+ x^2 e^{4x} [(A_3 x^2 + B_3 x + C_3) \cos 3x + (A_4 x^2 + B_4 x + C_4) \sin 3x]$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x \quad \cdot 10$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - x e^{-2x} \quad \cdot 11$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - \frac{1}{39} e^x (2 \sin 3x + 3 \cos 3x) \quad \cdot 12$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{4} x e^x \quad \cdot 13$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1 \quad \cdot ۱۸$$

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۳

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \quad \cdot ۱$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 2e^x \quad \cdot ۲$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{1}{10} (e^{ix} - 3i e^{ix}) \quad \cdot ۳$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{1}{10} (\sin x - 3 \cos x) \quad \cdot ۴$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{1}{10} (3 \sin x + \cos x) \quad \cdot ۵$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{1}{5} (\sin x - 3 \cos x) + e^x + 4 \quad \cdot ۶$$

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} - x e^x - 2e^{-x} \quad \cdot ۷$$

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{5} e^{2x} (3 \sin x + \cos x) \quad \cdot ۸$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + (C_3 + C_4 x) e^{-x} + x - \frac{1}{4} \sin x \quad \cdot ۹$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{3} x^3 \quad \cdot ۱۰$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-x} \quad \cdot ۱۱$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x) \quad \cdot ۱۲$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln (\sec x + \tan x) \quad \cdot ۶$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln \cos 2x \quad \cdot ۷$$

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + \frac{1}{12} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x^2 \quad \cdot ۸$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x - e^x \ln (1 - x) \quad \cdot ۹$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x} \quad \cdot ۱۰$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2 \sin x - \cos 2x \ln (\sec x + \tan x) \quad \cdot ۱۱$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{4}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x \ln (\sec x + \tan x) \quad \cdot ۱۲$$

$$+ \frac{1}{3} \sin 3x \ln (\csc x - \cot x)$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{2}{3} \sin 2x + \frac{1}{6} \cos 3x \ln (\sec x + \tan x) \quad \cdot ۱۳$$

$$+ \frac{1}{6} \sin 3x \ln (\csc x - \cot x)$$

$$y = C_1 \cos \frac{x}{3} + C_2 \sin \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} \ln \left(\sec \frac{x}{3} + \tan \frac{x}{3} \right) - 2 \quad \cdot ۱۴$$

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln \cos x - \sin x \ln (\sec x + \tan x) \quad \cdot ۱۵$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{x/2} + \frac{x^2}{16} e^{x/2} (-3 + 2 \ln x) \quad \cdot ۱۶$$

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} + 1 \quad \cdot ۱۷$$

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{1}{6} x^3) e^x \quad .13$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{520} (9 \cos 2x - 7 \sin 2x) \right) e^{2x} \quad .14$$

$$y = C_1 + C_2 e^{\frac{5x}{4}} + \frac{e^{-x}}{729} (81x^2 + 234x + 266) \quad .15$$

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x - \left(\frac{1}{10} e^{3x} + 2x^4 + 8x^3 + 48 \right) \quad .16$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + C_3 e^x + \frac{3}{2} x^2 e^{2x} \quad .17$$

جوابهای مجموعه مسائل ۷.۳

$$y_p = 4x^2 e^{-2x} \quad .1$$

$$y_p = -\frac{9}{2} x e^{-3x} \quad .2$$

$$y_p = -\left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x \right) e^{-3x} \quad .3$$

$$y_p = \frac{x}{2} \quad .4$$

$$y_p = \frac{1}{3} \left(x^2 - x + \frac{1}{3} \right) e^x \quad .5$$

$$y_p = \frac{1}{2} x \sinh x \quad .6$$

$$y_p = -\frac{x}{5} e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36} \right) e^{-x} \quad .7$$

$$y_p = x (x \sin x + \cos x) \quad .8$$

$$y_p = \frac{1}{8} (1 + x \sin 2x) \quad .9$$

$$y_p = \frac{1}{6} x^3 e^x \quad .10$$

$$y_p = \frac{1}{24} x^4 + \left(\frac{1}{2} x - 4 \right) x e^x \quad .11$$

$$y_p = e^x (x^2 - x) \quad .12$$

$$y_p = -\frac{1}{8} e^x (\sin 2x + \cos 2x) \quad .13$$

$$y_p = 2x \cos x + x^2 \sin x \quad .14$$

$$y_p = \frac{x^2}{4} \sin x + \left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{6} \right) \cos x \quad .15$$

$$y_p = e^x (-x^2 \cos x + 4x \sin x + 6 \cos x) \quad .16$$

$$y_p = e^x \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \right) - \frac{x}{8} \cos x \quad .17$$

جوابهای مجموعه مسائل ۸.۳

$$y = -\ln \cos x + C_1 x + C_2 \quad .1$$

$$y = \frac{1}{6} x^3 - \sin x + C_1 x + C_2 \quad .2$$

$$y = \frac{1}{6} x^3 \ln x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad .3$$

$$C_1^2 y = C_1 x - \ln |C_1 x + 1| + C_2 \quad .4$$

- $y = C_1 x + C_2 x^{-1}$. ۱۹
 $y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$. ۲۰
 $y = C_1 e^{-x^2/2} \int e^{x^2/2} dx + C_2 e^{-x^2/2}$. ۲۱
 $y = x^2 (C_1 + C_2 \ln x)$. ۲۲
 $y = C_1 x^3 + C_2 x$. ۲۳
 $y = C_1 \cos 2 \ln x + C_2 \sin 2 \ln x$. ۲۴
 $y = x^2 (3 + C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x)$. ۲۵
 $y = C_1 (x+2) + C_2 (x+2)^3$. ۲۶
 $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 - 2 \ln x + \frac{1}{3}$. ۲۷
 $y = C_1 x + C_2 x^{-1} - 4$. ۲۸
 $y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{6} x^4$. ۲۹
 $y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{12} x^2$. ۳۰
 $y = C_1 (x^2 - 1) + C_2 x + x \ln x$. ۳۱
 $y = C_1 (x^2 - 4) + C_2 x + 4$. ۳۲

- $y = (C_1 x - C_1^2) e^{1 + \frac{x}{C_1}} + C_2$. ۵
 $y = C_1 \sin x + C_2 - x - \frac{1}{2} \sin 2x$. ۶
 $y = C_1 \ln |x + C_1| + C_2$. ۷
 $y = \ln |x - C_1| + C_2$. ۸
 $y = e^x (x - 1) + C_1 x^2 + C_2$. ۹
 $y = \pm \frac{1}{2} \left[x (C_1^2 - x^2)^{1/2} + C_1^2 \sin^{-1} \frac{x}{C_1} \right] + C_2$. ۱۰
 $C_1^2 y = (C_1^2 x^2 + 1) \tan^{-1} C_1 x - C_1 x + C_2$. ۱۱
 $4 C_1 y = 4 + (C_1 x + C_2)^2$. ۱۲
 $y = \pm (C_1 x + C_2)^{1/2}$. ۱۳
 $y = C, x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2$. ۱۴
 $y = 1 + \frac{1}{C_1 x + C_2}$. ۱۵
 $y = \pm \sin (C_1 \pm x) + C_2 x + C_3$. ۱۶
 $y = C_2 \sec^2 (x + C_1)$. ۱۷
 $y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C_1 x + C_2$. ۱۸

$$y = C_1 x + C_2 \cos x - \sin x \quad .۳۳$$

$$y = C_1 x^2 e^x + C_2 e^x + x e^{2x} \quad .۳۴$$

$$y = C_1 e^{2x} (x-2)^2 + C_2 e^{2x} \quad .۳۵$$

$$y = e^{x^2} (C_1 \cos \sqrt{2} x + C_2 \sin \sqrt{2} x) + \frac{1}{2} x e^{x^2} \quad .۳۶$$

$$y = e^{2x} [C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + e^{-x}] \quad .۳۷$$

فصل چهارم

جوابهای مجموعه مسائل ۱۰۴

$$۰.۳ \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{همگرا} \quad .۲ \quad \text{واگرا} \quad R = \infty \quad .۱$$

$$R = 3 \quad .۶ \quad R = \infty \quad .۵ \quad R = 2, |x| < 2 \quad .۴$$

$$۰.۹ \quad \text{مجموعه همگرایی عبارت است از: } [-1] \quad R = 1 \quad .۸ \quad -5 < x < -3 \quad .۷$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{1!} \times \frac{1}{2} - \frac{(x-2)^2}{2!} \times \frac{1}{2^2} + \dots \quad .۱۰$$

$$-1, 1 \quad \text{فاصله همگرایی } |x-2| < 2 \quad x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \dots \quad .۱۱$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} (2x)^{2n} \quad .۱۲$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} x^{2n} \quad .۱۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, R=1 \quad .۱۴$$

$$+ C_1(x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{144}x^7 - \dots)$$

$$y = C_0(1 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 - \dots) + C_1(x - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{1440}x^9 - \dots) \quad .۸$$

$$+ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^6 - \frac{1}{252}x^7 - \frac{1}{672}x^8 + \dots$$

$$y = C_0(1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{168}x^8 - \dots) + C_1(x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{360}x^9 - \dots) \quad .۹$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^4 - \frac{7}{120}(x-1)^5 \quad .۱۰$$

$$y = \frac{\pi}{2} + (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2})^4 + \frac{1}{60}(x - \frac{\pi}{2})^5 \quad .۱۱$$

$$y = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{1680}x^7 \quad .۱۲$$

$$y = 2 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{11}{180}x^6 + \frac{1}{70}x^7 \quad .۱۳$$

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 \quad .۱۴$$

$$y = 1 + (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{24}(1 + \frac{\pi}{2})^2(x - \frac{\pi}{2})^4 \quad .۱۵$$

$$- \frac{1}{40}(1 + \frac{\pi}{2})(2 + \frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})^5$$

$$y = 1 + (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{6}(1 + \frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{2})^4 \quad .۱۶$$

$$2 + \frac{1}{4}(x-4) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) \times 4^n} (x-4)^n \quad .۱۵$$

جوابهای مجموعه مسائل ۲۰۴

$$y = C_0(1 - x^2) + C_1(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{1680} + \dots), R = \infty \quad .۱$$

$$y = C_0(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{96} + \frac{5x^4}{1536} + \dots) + C_1(x - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{192} + \dots), \quad .۲$$

$$R = 2\sqrt{2}$$

$$y = C_0(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \dots) + C_1(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots) \quad .۳$$

$$+ \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \dots, R = \infty$$

$$y = C_0(1 + (x-1)^2 - \frac{2(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{3} + \dots) + C_1((x-1) - \quad .۴$$

$$\frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots), 0 < x < 2$$

$$y = C_0(1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \dots) \quad .۵$$

$$+ C_1((x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots)$$

$$y = C_0(1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \dots) \quad .۶$$

$$+ C_1(x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 - \frac{19}{1920}x^7 + \dots)$$

$$y = C_0(1 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{90}x^6 + \frac{1}{3360}x^8 + \dots) \quad .۷$$

$$Q_1^3(x) = \frac{2}{1-x^2}$$

۰.۸

$$-P_0 + \frac{3}{5}P_1 + \frac{2}{5}P_3 \cdot \int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m > 3 \\ \frac{4}{35} & \text{اگر } m = 3 \\ 0 & \text{اگر } m = 2 \\ \frac{2}{5} & \text{اگر } m = 1 \\ -2 & \text{اگر } m = 0 \end{cases}$$

جوابهای مجموعه مسائل ۴.۴

$$y = Ax(1 + \frac{x}{5} - \frac{2}{35}x^2 + \frac{22}{945}x^3 - \dots) + \quad ۰.۱$$

$$Bx^{1/2}(1 - \frac{19}{4}x - \frac{209}{32}x^2 + \frac{1045}{1152}x^3 - \dots)$$

$$y = Ax(1 + \frac{x}{8} + \frac{5}{88}x^2 + \frac{13}{1848}x^3 + \dots) + \quad ۰.۲$$

$$Bx^{2/3}(1 + \frac{x}{3} + \frac{5}{9}x^2 + \frac{29}{324}x^3 + \dots)$$

$$y = Ax[1 - \frac{1}{9 \times 7}x^3 + \frac{1}{9^2 \times 2 \times 7 \times 12}x^6 - \dots] \quad ۰.۳$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{9^n \times n! \times 7 \times 12 \times \dots \times (5n+2)} x^{3n+2} \dots$$

$$+ Bx^{-1/6}[1 - \frac{1}{9 \times 3}x^3 + \frac{1}{9^2 \times 2! \times 3 \times 8}x^6 - \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{9^n \times n! \times 3 \times 8 \times \dots \times (5n-2)} x^{3n} \dots]$$

$$+ \frac{1}{120}(1 + \frac{\pi}{2}) / (1 + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}) / (x - \frac{\pi}{2})^6$$

جوابهای مجموعه مسائل ۳.۴

$$y = C_0(1 + \frac{(1+1)}{2!}x^2 + \frac{(1+1)(1-2)(1+3)}{4!}x^4 - \dots) + C_1x \quad ۰.۱ \text{ الف}$$

$$y = C_0(1 - 3x^2) + C_1(x - \frac{(2-1)(2+2)}{3!}x^3) \quad ۰.۲ \text{ ب}$$

$$+ \frac{(2-3)(2-1)(2+2)(2+4)}{5!}x^5 - \dots)$$

$$- \frac{4}{5}P_0(x) + P_1(x) - \frac{10}{7}P_2(x) + \frac{8}{35}P_4(x) \quad ۰.۳ \text{ الف}$$

$$- 2P_0 + \frac{8}{5}P_1 + \frac{2}{5}P_3 \quad ۰.۳ \text{ ب}$$

$$0 : \text{ب} \quad 0 : \text{ب} \quad 0 : \text{الف} \quad ۰.۴$$

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0 + \frac{3}{4}P_1 - \frac{7}{16}P_3 + \frac{11}{32}P_5 - \dots \quad ۰.۵ \text{ الف}$$

$$f(x) = P_0 + \frac{7}{4}P_1 + \frac{5}{8}P_2 - \frac{7}{16}P_3 + \dots \quad ۰.۵ \text{ ب}$$

$$Q_3^3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3} \quad ۰.۶$$

$$P_4^2(x) = (1-x^2)\left(\frac{105}{2}x^2 - \frac{15}{2}\right) \quad ۰.۷$$

$$P_4^3(x) = 105x(1-x^2)^{3/2}$$

$$Q_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{x}{1-x^2} \right] \quad ۰.۸$$

$$y_1 = x(1+x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots) = x e^x \quad .10$$

$$y_2 = y_1 \ln x - x(x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \dots)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = x^2(1+4x+6x^2+\dots+\frac{2^n(n+1)}{n!}x^n+\dots) \quad .11$$

$$y_2 = y_1 \ln x - x^2(6x+13x^2+\frac{124}{9}x^3+\dots)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = x, y_2 = x \ln x - x^3(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2 \times 4^2}x^2 + \frac{1}{2 \times 4 \times 6^2}x^4 - \dots) \quad .12$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = x^2 e^x, y_2 = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{24}x^4 + \dots \quad .13$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = x^2(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}x^2 + \dots) \quad .14$$

$$y_2 = x^1(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = x(3 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{3}{3^2}x^4 + \frac{1}{2^6}x^6 + \dots) \quad .15$$

$$y_2 = -\frac{1}{16}y_1 \ln x + x^3(1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{19}{2^6}x^4 + \frac{5}{2^8}x^6 + \dots)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y = A[1 - \frac{1}{2 \times 7}x^2 + \frac{1}{2 \times 4 \times 7 \times 11}x^4 - \dots + \quad .4$$

$$(-1)^n \frac{1}{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)[7 \times 11 \times \dots \times (4n+3)]} x^{2n+1} \dots]$$

$$+ Bx^{-3/2}[1 - \frac{1}{2 \times 7}x^2 + \frac{1}{4 \times 5 \times 2 \times 4}x^4 - \dots +$$

$$(-1)^n \frac{1}{[1 \times 5 \times \dots \times (4n-3)][2 \times 4 \times \dots \times 2n]} x^{2n+\dots}]$$

$$y = A(1+x-x^2+\frac{11}{12}x^3-\dots)+Bx^{5/8}[1-\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}x^2-\frac{23}{24}x^3+\dots] \quad .5$$

$$y = Ax^1(2+x)+Bx^{3/4}[1+\frac{3}{9 \times 4^2}x-\frac{3 \times 5}{9 \times 13 \times 4^2 \times 2!}x^2+\dots] \quad .6$$

$$y_1 = 1 - 2x + \frac{(2x)^2}{(2!)^2} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^n}{(n!)^2} + \dots \quad .7$$

$$y_2 = y_1 \ln x + 4x - 3x^2 + \frac{22}{27}x^3 - \dots$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = 1 - \frac{2}{2^2}x^2 + \frac{2^2}{2^4(2!)^2}x^4 - \dots \quad .8$$

$$y_2 = y_1 \ln x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{32}x^4 + \frac{11}{1728}x^6 - \dots$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = x^2[1 - 4x + \frac{1}{(2!)^2}(4x)^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}(4x)^n + \dots] \quad .9$$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^2(8x - 12x^2 + \frac{176}{27}x^3 - \dots)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$y_1 = x^4 (1 - 4x + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} x^2 - \dots)$$

۰۱۶

$$y_2 = -3y_1 \ln x + x (1 + \frac{1}{2} x + x^2 - 10x^3 + \dots)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

جوابهای مجموعه مسائل ۵.۴

$$\frac{\pi}{2} \cdot \text{پ}$$

$$120 \cdot \text{ب}$$

$$-\frac{8}{15} \sqrt{\pi} \cdot \text{الف}$$

$$-\frac{3!}{2^4}$$

۰۲

$$-(\frac{2}{3})^2$$

۰۳

$$\frac{16}{7^3}$$

۰۴

$$\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4^{5/2}} \sqrt{\pi}$$

۰۵

$$\frac{1}{2 \times (3)^{3/4}} \Gamma(\frac{3}{4})$$

۰۶

$$\frac{1}{2^{7/5}} \Gamma(\frac{12}{5})$$

۰۷

$$\sqrt{\pi}$$

۰۸

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۴

$$J_3(x) = (\frac{8-x^2}{x^2}) J_1(x) - \frac{4}{x} J_0(x)$$

۰۵

۰۶

$$x^3 J_3(x) + C$$

الف:

$$2J_0(1) - 3J_1(1)$$

ب:

$$x^2 J_1(x) + x J_0(x) - \int J_0(x) dx$$

پ:

$$J_5(x) = (\frac{384}{x^4} - \frac{72}{x^2} + 1) J_1(x) - (\frac{192}{x^3} - \frac{12}{x}) J_0(x) \quad ۰۷$$

جوابهای مجموعه مسائل ۷.۴

$$y = A J_6(2e^{x/2}) + B Y_6(2e^{x/2}) \quad ۰۳.۲$$

$$y = A J_1(2e^{x/2}) + B Y_1(2e^{x/2}) \quad ۰۳$$

$$y = A J_{2/3}(2e^{x/2}) + B Y_{2/3}(2e^{x/2}) \quad ۰۳$$

$$y = A J_0(e^x) + B Y_0(e^x) \quad ۰۴$$

$$y = A J_2(3x) + B Y_2(3x) \quad ۰۵$$

$$y = A J_1(\sqrt{3}x) + B Y_1(\sqrt{3}x) \quad ۰۶$$

$$y = A J_{\sqrt{3}}(\sqrt{x}) + B Y_{\sqrt{3}}(\sqrt{x}) \quad ۰۷$$

$$y = A J_{\sqrt{8}}(x^2) + B Y_{\sqrt{8}}(x^2) \quad ۰۸$$

$$y = A J_1(x^2) + B Y_1(x^2) \quad ۰۹$$

$$y = x^{-2} [A J_2(x) + B Y_2(x)] \quad \cdot 10$$

$$y = x^{-1} [A J_1(x) + B Y_1(x)] \quad \cdot 11$$

$$y = x^{1/2} [A J_{\sqrt{2}}(x) + B Y_{\sqrt{2}}(x)] \quad \cdot 12$$

$$y = x^{1/2} [A J_1(x) + B Y_1(x)] \quad \cdot 13$$

$$y = x^2 [A J_2(x^2) + B Y_2(x^2)] \quad \cdot 14$$

$$y = x^3 [A J_3(x^3) + B Y_3(x^3)] \quad \cdot 15$$

$$y = x^{1/2} [A J_{1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) + B Y_{1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)] \quad \cdot 16$$

$$y = x^{1/2} [A J_{1/6}(x^3) + B Y_{1/6}(x^3)] \quad \cdot 17$$

$$y = x^{1/2} A J_{1/3}(\frac{8}{3}x^{3/2}) + B Y_{1/3}(\frac{8}{3}x^{3/2}) \quad \cdot 18$$

$$y = x^2 [A J_1(2x^3) + B Y_1(2x^3)] \quad \cdot 19$$

$$y = x [A J_2(3x^2) + B Y_2(3x^2)] \quad \cdot 20$$

$$y = A I_2(x) + B K_2(x) \quad \cdot 21$$

$$y = A I_1(x) + B K_1(x) \quad \cdot 22$$

فصل پنجم

جوابهای مجموعه مسائل فصل ۵

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}, \quad y_2 = C_1 e^{2x} - 4 C_2 e^{-3x} \quad \cdot 1$$

$$y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \frac{1}{4} e^x, \quad y_2 = 2 C_1 e^{3x} - 2 C_2 e^x - 2 e^x \quad \cdot 2$$

$$y_1 = C_1 + C_2 x + \frac{4}{3} x^3, \quad y_2 = \frac{8}{3} x^3 - 2x^2 + (2C_2 + 1)x + 2C_1 - \frac{1}{2} C_2 \quad \cdot 3$$

$$y_1 = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x \frac{1}{13} (-7 \cos x + 4 \sin x) \quad \cdot 4$$

$$y_2 = e^x [(C_1 - C_2) \cos 2x + (C_1 + C_2) \sin 2x]$$

$$- e^x \frac{2}{13} (8 \cos x + \sin x)$$

$$y_1 = e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x), \quad y_2 = \frac{1}{5} e^{-2x} (10 \sin x) \quad \cdot 5$$

$$y_1 = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \quad y_2 = 2C_1 + \frac{1}{2} C_2 e^x \quad \cdot 6$$

$$y_1 = A e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}, \quad y_2 = B - \frac{3}{2}A e^{-2x} + \frac{1}{4}(x^2 + x) \quad \cdot ۷$$

$$y_1 = -e^x - 2e^{-x} - C_1, \quad y_2 = 2e^x + e^{-x} + C_1 \quad \cdot ۸$$

فصل ششم

جوابهای مجموعه مسائل ۱.۶

$$F(s) = 5 \frac{4!}{s^5} - 3 \frac{2!}{s^3} + \frac{6}{s} \quad \cdot ۱$$

$$F(s) = \frac{4}{s-3} + \frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s} \quad \cdot ۲$$

$$F(s) = \cos b \frac{s}{s^2+a^2} - \sin b \frac{a}{s^2+a^2} \quad \cdot ۳$$

$$F(s) = \cosh b \frac{a}{s^2-a^2} + \sinh b \frac{s}{s^2-a^2} \quad \cdot ۴$$

$$F(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{s}{s^2-4} + \frac{3}{s^2+9} \quad \cdot ۵$$

$$F(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-s} \quad \cdot ۶$$

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9} (e^{\pi s} + 1) + \frac{3}{s} e^{\pi s} \quad \cdot ۷$$

$$F(s) = 2 \frac{\Gamma(5/2)}{s^{5/2}} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{3}{s} \quad \cdot ۸$$

$$y = e^t - e^{-2t} \quad .9$$

$$y = \frac{4}{5} e^{3t} + \frac{1}{5} e^{-2t} \quad .10$$

$$F(s) = \frac{1}{s} (e^{-s} - e^{-2s}) \quad .11$$

$$F(s) = -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \quad .12$$

$$F(s) = \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} e^{-2s} \quad .13$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-s} \quad .14$$

۳.۶ جوابهای مجموعه مسائل

$$\frac{3!}{s^5} - \frac{4}{s^2+1} \quad .1$$

$$\frac{1}{s} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} - \frac{2}{s^2-1} \right) \quad .2$$

$$\frac{1}{s} \left(\frac{6}{s^2+9} + \frac{4}{s+1} - \frac{s}{s^2-4} \right) \quad .3$$

$$\frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \quad .4$$

$$\frac{1}{6} (1 + 3t - \cos 3t - \sin 3t) \quad .5$$

$$\frac{1}{3} \cosh 3t - \frac{4}{27} \sinh 3t + \frac{4}{9} t - \frac{1}{3} \quad .6$$

$$\frac{1}{125} e^{5t} - \frac{t^2}{10} - \frac{t}{25} - \frac{1}{125} \quad .7$$

$$f(t) = \frac{2}{3!} t^3 + \frac{1}{\Gamma(5/2)} t^{3/2} \quad .9$$

$$f(t) = 1 + \sin t \quad .10$$

$$f(t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{1/2} - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \quad .11$$

$$f(t) = \frac{1}{2} t^2 + 4 \cosh t + \frac{3}{2} \sin 2t \quad .12$$

$$f(t) = 2e^t - 2 \cos t + \sin t \quad .13$$

۲.۶ جوابهای مجموعه مسائل

$$F(s) = \frac{10s}{(s^2+25)^2} \quad .1$$

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \quad .2$$

$$F(s) = \frac{8s}{(s^2-16)^2} \quad .3$$

$$F(s) = \frac{s^2+1}{(s^2-1)^2} \quad .4$$

$$F(s) = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{s^2+4} + \frac{4-s^2}{(s^2+4)^2} \right] \quad .5$$

$$F(s) = \frac{s^2}{(s^2+9)^2} \quad .6$$

$$y = \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \quad .7$$

$$y = \cos 3t + \frac{1}{5} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 2t \quad .8$$

$$y = e^{-2t}(4t^2 + 3t + 1) \quad \cdot 10$$

$$\frac{2}{s}(1 - e^{-\pi s}) \quad \cdot 11$$

$$\frac{1}{s}(e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s}) \quad \cdot 12$$

$$\frac{1}{s}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s}) \quad \cdot 13$$

$$\frac{1}{s^2} e^{-\pi s} \quad \cdot 14$$

$$e^{-2s} \left(\frac{6}{s^4} + \frac{8}{s} + \frac{12}{s^3} + \frac{12}{s^2} \right) \quad \cdot 15$$

$$-e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1} \quad \cdot 16$$

$$e^{-(3+8)} \frac{1}{s+3} \quad \cdot 17$$

$$\frac{6}{s^4} - e^{-8} \left(\frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} \right) \quad \cdot 18$$

$$\frac{4s}{s^2 + 4} \left(1 + e^{-\frac{\pi s}{2}} \right) \quad \cdot 19$$

$$\frac{2}{s} - \frac{1}{s-3} - e^{-\pi s} \left(\frac{2}{s} - e^{3\pi} \frac{1}{s-3} \right) \quad \cdot 20$$

$$\frac{1}{6} (t-1)^3 u_1(t) \quad \cdot 21$$

$$\frac{1}{2} u_2(t) \sin 2(t-2) \quad \cdot 22$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^{2t}) - \frac{1}{2}(1 - e^{2(t-1)}) u_1(t) \quad \cdot 23$$

$$y = \sin t - 2 \cos t + 2 \quad \cdot 8$$

$$y = 1 + t - e^{-t} \quad \cdot 9$$

$$y = \frac{t}{9} - \frac{1}{27} \sin 3t \quad \cdot 10$$

$$v = \frac{1}{2} e^{2t} + e^{-t} - \frac{3}{2} \quad \cdot 11$$

$$y = \frac{1}{63} e^{3t} - \frac{1}{112} e^{-4t} - \frac{t}{12} - \frac{1}{144} \quad \cdot 12$$

جوابهای مجموعه مسائل ۴.۶

$$F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{(s+1)^{3/2}} - \frac{5}{(s+1)^2 + 1} - \frac{2}{s+1} \quad \cdot 1$$

$$F(s) = \frac{4}{s^2 - 6s - 7} \quad \cdot 2$$

$$F(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} \right] \quad \cdot 3$$

$$\frac{1}{2} t^2 e^{-4t} - \frac{1}{3} t^3 e^t \quad \cdot 4$$

$$e^t (\cos t + \sin t) \quad \cdot 5$$

$$2t e^{-t} + e^{-t} - 1 \quad \cdot 6$$

$$y = 3 e^{-t} \sin 4t \quad \cdot 7$$

$$y = 3 e^{t/2} \cos 3t \quad \cdot 8$$

$$y = e^{-t/2} \cos t \quad \cdot 9$$

$$\frac{1}{4} e^{-2(t-\pi)} \sin 4t u_{\pi}^{-}(t) \quad \cdot ۲۴$$

$$u_3(t) \cosh 3(t+3) \quad \cdot ۲۵$$

جوابهای مجموعه مسائل ۵.۶

$$\frac{2s(s^2+12)}{(s^2-4)^3} \quad \cdot ۱$$

$$\frac{40s}{(s^2+16)^2} + \frac{4s(3-s^2)}{(s^2+1)^3} \quad \cdot ۲$$

$$\frac{32+2s^2}{(s^2-16)^2} + \frac{36s^2+48}{(s^2-4)^3} \quad \cdot ۳$$

$$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad \cdot ۴$$

$$\frac{6(s-4)}{(s^2-8s+25)^2} \quad \cdot ۵$$

$$\left[\frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s^2-2s+26} \right]'' \quad \cdot ۶$$

$$f(t) = \frac{1}{t} (1 + e^{-t} - 2 \cos t) \quad \cdot ۷$$

$$f(t) = \frac{2}{t} (1 - \cos 2t) \quad \cdot ۸$$

$$\frac{1}{t} e^{-4t} \sin t \quad \cdot ۹$$

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \quad \cdot ۱۰$$

$$\frac{3}{100} \quad \cdot ۱۳ \quad 0 \quad \cdot ۱۴ \quad 0 \quad \cdot ۱۱$$

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۶

$$\operatorname{Ln} \frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1} \quad \cdot ۱$$

$$\operatorname{Ln} \frac{s^2-9}{s^2} \quad \cdot ۲$$

$$\operatorname{Ln} \frac{s+4}{s+2} \quad \cdot ۳$$

$$\frac{1}{2} t \sin t \quad \cdot ۷$$

$$\frac{t}{2} e^{-2t} \sin t \quad \cdot ۸$$

$$\frac{t}{4} \sinh 2t \quad \cdot ۹$$

$$\frac{1}{s-2} \cot^{-1} \left(\frac{s-1}{2} \right) \quad \cdot ۱۰$$

$$s \operatorname{Ln} \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s \quad \cdot ۱۱$$

$$\frac{1}{2s^2} \operatorname{Ln} \frac{s-2}{s-4} + \frac{1}{s(s-2)(s-4)} \quad \cdot ۱۲$$

$$\frac{1}{s^2} \operatorname{Ln} \frac{((s+3)^2+1)^{1/2}}{s+3} - \frac{1}{s} \cdot \frac{s+3}{(s+3)^2+1} + \frac{1}{s(s+3)} \quad \cdot ۱۳$$

جوابهای مجموعه مسائل ۷.۶

$$\frac{1}{2} t \sin t \quad \cdot ۱$$

$$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1) \quad \cdot ۲$$

$$-\frac{9}{39} (\cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t - e^{2t}) \quad \cdot ۳$$

معادلات دیفرانسیل معمولی

جوابهای مجموعه مسائل ۸.۶

$$\frac{s e^{\frac{s\pi}{4}}}{(s^2+16)(e^{\frac{s\pi}{4}}-1)} \quad .1$$

$$\frac{\pi}{s} \coth \pi s - \frac{1}{s^2} \quad .2$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}, \quad s > 0 \quad .3$$

$$\frac{2e^{3s}}{s(e^{3s}+1)} \quad .4$$

$$\frac{s^2+8(e^{\frac{1}{2}s\pi}+1)}{s(1+e^{\frac{1}{2}s\pi})(s^2+16)} \quad .5$$

$$\frac{(e^{\frac{1}{2}s}-1)^2}{s^2(1+e^{\frac{1}{2}s})} \quad .6$$

$$\frac{e^s - s e^{\frac{s}{2}} - 1}{s^2(e^s-1)}, \quad \frac{e^s - s e^{\frac{s}{2}} - 1}{s^2(e^s-1)(1-e^{-\frac{s}{2}})}, \quad \frac{e^s - s e^{\frac{s}{2}} - 1}{s^2(e^{\frac{s}{2}}-1)^2} \quad .7$$

$$\frac{(1-e^{-\frac{s}{2}})^2}{s^2(1-e^{-2s})}, \quad \frac{e^{\frac{s}{2}}-1}{s^2(1+e^{\frac{s}{2}})} \quad .8$$

$$\frac{1}{s^2+1} \coth \frac{s\pi}{2} \quad .9$$

جوابهای مجموعه مسائل ۹.۶ $y_1 = t^2 + t - 5, y_2 = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2$.1

$$y_1 = 3 + \sin 2t - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t} \quad .2$$

$$y_2 = -3 + \cos 2t + \frac{9}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{2t} \quad .3$$

$$y_1 = t^3 - t^2, \quad y_2 = 3t^2 - 2t \quad .3$$

$$y_1 = 5 - t - 5e^{2t}, \quad y_2 = e^{2t} + t^2 - 1 \quad .4$$

$$y_1 = \sin 2t + e^t - 1, \quad y_2 = 2 \cos 2t - t^2 - 2 \quad .5$$

$$-\frac{1}{6} \sin 4t + \frac{1}{3} \sin 2t \quad .4$$

$$1 - \cos t \quad .5$$

$$\frac{1}{25}(e^{5t} - 5t - 1) \quad .6$$

$$\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \quad .7$$

$$e^{-t} \int_0^t \frac{e^{2\lambda} - e^{\lambda}}{\lambda} d\lambda \quad .8$$

$$\int_0^t \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \sin \lambda \cos(t-\lambda) d\lambda \quad .9$$

$$\frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}) \quad .10$$

$$\frac{3!}{s^4(s^2+1)} \quad .11$$

$$\frac{5!}{s^6(s-3)} \quad .12$$

$$\frac{3! \times 5!}{s^{10}} \quad .13$$

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{12} t^4 \quad .14$$

$$y(t) = \cos t \quad .15$$

$$y(t) = e^{-t}(1-t)^2 \quad .16$$

$$y(t) = e^{-t}(1-t) \quad .17$$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{bt} \cosh at$	$\frac{1}{s-b}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ $a \neq b$
$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ $a \neq b$
$\frac{\sin at - at \cos at}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$\frac{t \sin at}{\sqrt{a}}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$\frac{\sin at + at \cos at}{\sqrt{a}}$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$\cos at - \frac{1}{\sqrt{a}} at \sin at$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$t \cos at$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$\frac{at \cosh at - \sinh at}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
$\frac{t \sinh at}{\sqrt{a}}$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
$\frac{\sinh at + at \cosh at}{\sqrt{a}}$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
$\cosh at + \frac{1}{\sqrt{a}} at \sinh at$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
$t \cosh at$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
$\frac{(\sqrt{a} - a^{\sqrt{t}}) \sin at - \sqrt{a} at \cos at}{\lambda a^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{(s^{\sqrt{a}} + a^{\sqrt{a}})^{\sqrt{a}}}$
$\frac{t \sin at - at^{\sqrt{a}} \cos at}{\lambda a^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{s}{(s^{\sqrt{a}} + a^{\sqrt{a}})^{\sqrt{a}}}$
$\frac{(\sqrt{a} + a^{\sqrt{t}}) \sin at - at \cos at}{\lambda a^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{s^2}{(s^{\sqrt{a}} + a^{\sqrt{a}})^{\sqrt{a}}}$
$\frac{\sqrt{a} t \sin at + at^{\sqrt{a}} \cos at}{\lambda a}$	$\frac{s^2}{(s^{\sqrt{a}} + a^{\sqrt{a}})^{\sqrt{a}}}$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $0! = 1$	$\frac{1}{s^n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n}$ $n > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$, $0! = 1$	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$
$\frac{t^{n-1} e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $a > 0$
$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\frac{e^{bt} \sin at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$
$a^{bt} \cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$
$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{1}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\frac{e^{bt} \sinh at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}$
$a^n J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}} \quad n > -1$
$a^n I_n(at)$	$\frac{(s - \sqrt{s^2 - a^2})^n}{\sqrt{s^2 - a^2}} \quad n > -1$
$J_0(a\sqrt{t(t + \gamma b)})$	$\frac{e^{bts} - \sqrt{s^2 + a^2}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2 - b^2}) & t > b \\ 0 & t < b \end{cases}$	$\frac{e^{-b\sqrt{s^2 + a^2}}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
$\frac{tJ_1(at)}{a}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$tJ_0(at)$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$J_0(at) - atJ_1(at)$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$
$\frac{tI_1(at)}{a}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
$tI_0(at)$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
$\frac{\cos \gamma \sqrt{qt}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$
$N(t) = \text{null function}$	0
$\delta(t)$	1
$\delta(t - a)$	e^{-as}
$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{(\gamma - a^2 t^2) \sin at + \Delta at \cos at}{\Delta a}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{(s - a^2 t^2) \cos at - \gamma at \sin at}{\Delta}$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{t^2 \sin at}{\gamma a}$	$\frac{(s^2 + a^2)^2}{\gamma s^2 - a^2}$
$\frac{1}{\gamma} t^2 \cos at$	$\frac{(s^2 + a^2)^2}{s^2 - \gamma a^2 s}$
$\frac{1}{\gamma} t^2 \cos at$	$\frac{(s^2 + a^2)^2}{s^2 - \gamma a^2 s^2 + a^2}$
$\frac{t^2 \sin at}{\gamma a}$	$\frac{(s^2 + a^2)^2}{s^2 - a^2 s}$
$\frac{(\gamma + a^2 t^2) \sinh at - \gamma at \cosh at}{\Delta a^2}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$
$\frac{at^2 \cosh at - t \sinh at}{\Delta a^2}$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$
$\frac{at \cosh at + (a^2 t^2 - 1) \sinh at}{\Delta a^2}$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$
$\frac{e^{at/\gamma}}{\gamma a^2} \left\{ \sqrt{\gamma} \sin \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} - \cos \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} + e^{-\gamma at/\gamma} \right\}$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$
$\frac{e^{at/\gamma}}{\gamma a} \left\{ \cos \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} + \sqrt{\gamma} \sin \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} - e^{-\gamma at/\gamma} \right\}$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\frac{e^{-at/\gamma}}{\gamma a^2} \left\{ e^{\gamma at/\gamma} - \cos \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} - \sqrt{\gamma} \sin \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} \right\}$	$\frac{1}{s^2 - a^2}$
$\frac{e^{-at/\gamma}}{\gamma a} \left\{ \sqrt{\gamma} \sin \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} - \cos \frac{\sqrt{\gamma} at}{\gamma} + e^{\gamma at/\gamma} \right\}$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\frac{1}{\gamma a^2} (\sin at \cosh at - \cos at \sinh at)$	$\frac{1}{s^2 + \gamma a^2}$
$\frac{\sin at \sinh at}{\gamma a^2}$	$\frac{s}{s^2 + \gamma a^2}$
$\frac{1}{\gamma a^2} (\cosh at - \cos at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

الف

انتقال بر محور ها ۴۲۲

انتقال بر محور ها ۴۲۸

پ

پایه جواب ۱۷۹

پوش ۱۰۶

پیوسته قطعه‌ای ۳۹۹

ت

تابع

بسل پیراسته نوع اول ۳۸۱

بسل پیراسته نوع دوم ۳۸۱

بسل نوع اول ۳۵۹

بسل نوع دوم مرتبه صفر ۳۶۹

بسل نوع دوم مرتبه ۷ ۳۷۰

تحلیلی ۲۹۶

پله‌ای واحد ۴۲۶

گاما ۳۵۱

لواندر نوع دوم ۳۱۰

مولد چندجمله‌ایهای لواندر ۳۱۳

نیومن مرتبه صفر ۳۶۹

نیومن مرتبه ۳۷۰

تعامد چندجمله‌ایهای لواندر ۳۲۰

توابع

بسل پیراسته ۳۸۱

بسل نوع سوم ۳۸۲

متعامد ۳۲۰

وابسته لواندر ۳۲۶

هانکل اول و دوم مرتبه ۳۸۲

ث

ثابت اولر ۳۶۹

ج

جواب ۸

خصوصی ۹

عمومی ۹

غیرعادی ۱۱، ۱۰۶، ۱۱۶

چ

چندجمله‌ایهای لواندر ۳۰۸

د

درجه ۲

دستور

دالامبر ۲۷۷

کشی ۲۷۸

ر

رابطه بازگشتی ۲۹۱

روابط بازگشتی تابع بسل نوع اول ۳۶۲

روش

اپراتورها ۲۱۷، ۳۸۸

تغییر پارامترها ۸۲، ۲۰۸

تکرار پیکارد ۱۴۲

حذفی ۳۸۵

ضرائب نامعین ۱۹۰، ۱۹۲

فروبنیوس ۳۳۰

مشتقات متوالی ۳۰۲

س

سری

با جملات مثبت و منفی ۲۸۰

تابع ۲۷۴، ۲۸۱

توانی ۲۸۱

تیلور و ماکلورن ۲۸۴

متناوب ۲۷۹

ث

شرط لازم همگرایی ۲۷۶

شرط لیپ شیتز ۱۴۷

شعاع همگرایی ۲۸۲

ف

فرمول

اولر ۱۷۰، ۲۸۷

ردریگس ۳۱۲

ق

قضایای مربوط به وجود و یکتائی ۱۴۵

قضیه لاینیتز ۲۷۹

ک

کانولوشن ۴۵۰

ل

لیبنیتز - ماکلورن ۳۰۲

م

مرتبه ۲

معادلات قابل تبدیل به معادله بسل ۳۷۱

معادله

برنولی ۸۸

دیفرانسیل یا مشتقات جزئی ۱

دیفرانسیل فاقد تابع ۲۴۳

دیفرانسیل فاقد متغیر ۲۴۵

دیفرانسیل معمولی ۱

ریکاتی ۹۹

شاخصی ۳۳۱

کشی یا اولر ۲۵۲

کلرو ۱۳۱

لاگرانژ ۱۳۳

لواندر ۳۰۶

مفسر ۱۶۵

ن

نقاط استثنائی ۱۰۷

نقطه

معمولی ۲۹۷

منفرد ۲۹۷، ۳۳۲

منفرد منظم ۳۳۲

منفرد نامنظم ۳۳۲

هـ

همگرای مشروط ۲۸۱

همگرای مطلق ۲۸۰

همگرایی و واگرایی سری‌ها ۲۷۴

همگن ۱۶۰

ی

یکسو شده

تمام موجی ۴۶۵

نیم موجی ۴۶۴

- ۱۸ $\int \coth u \, du = \ln \sinh u + C$
- ۱۹ $\int \operatorname{sech} u \, du = \sin^{-1}(\tanh u) + C \quad \text{یا} \quad 2 \tan^{-1} e^u$
- ۲۰ $\int \operatorname{csch} u \, du = \ln \tanh \frac{u}{2} + C \quad \text{یا} \quad -\coth^{-1} e^u$
- ۲۱ $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$
- ۲۲ $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$
- ۲۳ $\int \tanh^2 u \, du = u - \tanh u + C$
- ۲۴ $\int \coth^2 u \, du = u - \coth u + C$
- ۲۵ $\int \sinh^2 u \, du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(\sinh u \cosh u - u) + C$
- ۲۶ $\int \cosh^2 u \, du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(\sinh u \cosh u + u) + C$
- ۲۷ $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$
- ۲۸ $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$
- ۲۹ $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$
- ۳۰ $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right) = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} \quad u^2 > a^2$
- ۳۱ $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right) = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C \quad u^2 < a^2$
- ۳۲ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a}$
- ۳۳ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad \text{یا} \quad \sinh^{-1} \frac{u}{a}$
- ۳۴ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$
- ۳۵ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$
- ۳۶ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C$
- ۳۷ $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right) + C$

- ۱ $\int \sin u \, du = -\cos u + C$
- ۲ $\int \cos u \, du = \sin u + C$
- ۳ $\int \tan u \, du = \ln \sec u = -\ln \cos u + C$
- ۴ $\int \cot u \, du = \ln \sin u + C$
- ۵ $\int \sec u \, du = \ln(\sec u + \tan u) = \ln \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$
- ۶ $\int \csc u \, du = \ln(\csc u - \cot u) = \ln \tan \frac{u}{2} + C$
- ۷ $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
- ۸ $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
- ۹ $\int \tan^2 u \, du = \tan u - u + C$
- ۱۰ $\int \cot^2 u \, du = -\cot u - u + C$
- ۱۱ $\int \sin^2 u \, du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u) + C$
- ۱۲ $\int \cos^2 u \, du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u) + C$
- ۱۳ $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
- ۱۴ $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
- ۱۵ $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$
- ۱۶ $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$
- ۱۷ $\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$

$$\begin{aligned}
 53 \quad \int \frac{dx}{x(ax+b)} &= \frac{1}{b} \ln \left(\frac{x}{ax+b} \right) + C \\
 54 \quad \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} &= -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) + C \\
 55 \quad \int \frac{dx}{x^3(ax+b)} &= \frac{2ax-b}{2b^2x^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln \left(\frac{x}{ax+b} \right) + C \\
 56 \quad \int \frac{dx}{(ax+b)^2} &= \frac{-1}{a(ax+b)} + C \\
 57 \quad \int \frac{x dx}{(ax+b)^2} &= \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \ln(ax+b) + C \\
 58 \quad \int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2} &= \frac{ax+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3} \ln(ax+b) + C \\
 59 \quad \int \frac{x^3 dx}{(ax+b)^2} &= \frac{(ax+b)^2}{2a^4} - \frac{3b(ax+b)}{a^4} + \frac{b^3}{a^4(ax+b)} + \frac{3b^2}{a^4} \ln(ax+b) + C \\
 60 \quad \int \frac{dx}{x^{n+1}(ax+b)^2} &= \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2} \ln \left(\frac{x}{ax+b} \right) + C \\
 61 \quad \int \frac{dx}{x^{l+1}(ax+b)^2} &= \frac{-n}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} + \frac{2a}{b^3} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) + C \\
 62 \quad \int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2} &= -\frac{(ax+b)^2}{2b^4x^2} + \frac{3a(ax+b)}{b^4x} - \frac{a^2x}{b^4(ax+b)} - \frac{3a^2}{b^4} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) + C \\
 63 \quad \int \frac{dx}{(ax+b)^3} &= \frac{-1}{2(ax+b)^2} + C \\
 64 \quad \int \frac{x dx}{(ax+b)^3} &= \frac{-1}{a^2(ax+b)} + \frac{b}{2a^2(ax+b)^2} + C \\
 65 \quad \int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^3} &= \frac{2b}{a^3(ax+b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax+b)^2} + \frac{1}{a^3} \ln(ax \pm b) + C \\
 66 \quad \int \frac{x^3 dx}{(ax+b)^3} &= \frac{x}{a^3} - \frac{3b^2}{a^4(ax+b)} + \frac{b^3}{2a^4(ax+b)^2} - \frac{3b}{a^4} \ln(ax+b) + C \\
 67 \quad \int \frac{dx}{x(ax+b)^3} &= \frac{a^2x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{2ax}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) + C \\
 68 \quad \int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3} &= \frac{-a}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{2a}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3x} + \frac{3a}{b^4} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) \\
 69 \quad \int \frac{dx}{x^3(ax+b)^3} &= \frac{a^4x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{4a^3x}{b^3(ax+b)} - \frac{(ax+b)^2}{2b^3x^2} - \frac{6a^2}{b^3} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) \\
 70 \quad \int (ax+b)^n dx &= \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C \quad n \neq -1 \\
 71 \quad \int x(ax+b)^n dx &= \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C, n \neq -1, -2
 \end{aligned}$$

$$38 \quad \int f^{(n)}g dx = f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + f^{(n-3)}g'' - \dots - (-1)^n \int fg^{(n)} dx + C$$

قواعد کلی انتگرال به روش جزء به جزء

قواعد های مهم جانشین کردن

$$\begin{aligned}
 39 \quad \int F(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \int F(u) du + C & u &= ax+b \\
 40 \quad \int F(\sqrt{ax+b}) dx &= \frac{2}{a} \int u F(u) du + C & u &= \sqrt{ax+b} \\
 41 \quad \int F(\sqrt[n]{ax+b}) dx &= \frac{2}{a} \int u^{n-1} F(u) du + C & u &= \sqrt[n]{ax+b} \\
 42 \quad \int F(\sqrt{a^2-x^2}) dx &= a \int F(a \cos u) \cos u du + C & x &= a \sin u \\
 43 \quad \int F(\sqrt{x^2+a^2}) dx &= a \int F(a \sec u) \sec^2 u du + C & x &= a \tan u \\
 44 \quad \int F(\sqrt{x^2-a^2}) dx &= a \int F(a \tan u) \sec u \tan u du + C & x &= a \sec u \\
 45 \quad \int F(e^{ax}) dx &= \frac{1}{a} \int \frac{F(u)}{u} du + C & u &= e^{ax} \\
 46 \quad \int F(\ln x) dx &= \int F(u) e^u du + C & u &= \ln x \\
 47 \quad \int F\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) dx &= a \int F(u) \cos u du + C & u &= \sin^{-1} \frac{x}{a} \\
 48 \quad \int F(\sin x, \cos x) dx &= 2 \int F\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{du}{1+u^2} + C & u &= \tan \frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

انتگرالهایی که حتمانی به صورت $ax+b$ دارند

$$\begin{aligned}
 49 \quad \int \frac{dx}{ax+b} &= \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C \\
 50 \quad \int \frac{x dx}{ax+b} &= \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax+b) + C \\
 51 \quad \int \frac{x^2 dx}{ax+b} &= \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3} \ln(ax+b) + C \\
 52 \quad \int \frac{x^3 dx}{ax+b} &= \frac{(ax+b)^3}{3a^4} - \frac{3b(ax+b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(ax+b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4} \ln(ax+b) + C
 \end{aligned}$$

$$۸۵ \int \frac{dx}{x^m \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b} \int \frac{dx}{x^{m-1} \sqrt{ax+b}} + C$$

$$۸۶ \int x^m \sqrt{ax+b} dx = \frac{2x^m}{(2m+3)a} (ax+b)^{3/2} - \frac{2mb}{(2m+3)a} \int x^{m-1} \sqrt{ax+b} dx + C$$

$$۸۷ \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-1} \sqrt{ax+b}} + C$$

$$۸۸ \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m} dx = \frac{-(ax+b)^{3/2}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b} \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^{m-1}} dx + C$$

$$۸۹ \int (ax+b)^{m/2} dx = \frac{2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a(m+2)} + C$$

$$۹۰ \int x(ax+b)^{m/2} dx = \frac{2(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)} + C$$

$$۹۱ \int x^2(ax+b)^{m/2} dx = \frac{2(ax+b)^{(m+6)/2}}{a^3(m+6)} - \frac{4b(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)} + \frac{2b^2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)} + C$$

$$۹۲ \int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x} dx = \frac{2(ax+b)^{m/2}}{m} + b \int \frac{(ax+b)^{(m-2)/2}}{x} dx + C$$

$$۹۳ \int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x^2} dx = -\frac{(ax+b)^{(m+2)/2}}{bx} + \frac{ma}{2b} \int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x} dx + C$$

$$۹۴ \int \frac{dx}{x(ax+b)^{m/2}} = \frac{2}{(m-2)b(ax+b)^{(m-2)/2}} + \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x(ax+b)^{(m-2)/2}} + C$$

انتگرالیهای که حملاتی به صورت $ax+b$ و $px+q$ دارند.

$$۹۵ \int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \ln \left(\frac{px+q}{ax+b} \right) + C$$

$$۹۶ \int \frac{x dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \left\{ \frac{b}{a} \ln(ax+b) - \frac{q}{p} \ln(px+q) \right\} + C$$

$$۹۷ \int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \left\{ \frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq} \ln \left(\frac{px+q}{ax+b} \right) \right\} + C$$

$$۹۸ \int \frac{x dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \left\{ \frac{q}{bp-aq} \ln \left(\frac{ax+b}{px+q} \right) - \frac{b}{a(ax+b)} \right\} + C$$

$$۹۹ \int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{b^2}{(bp-aq)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bp-aq)^2} \left\{ \frac{q^2}{p} \ln(px+q) + \frac{b(bp-2aq)}{a^2} \ln(ax+b) \right\} + C$$

$$۷۲ \int x^2(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$$

If $n = -1, -2, -3$, see 14.61, 14.68, 14.75.

$$۷۳ \int x^m(ax+b)^n dx = \begin{cases} \frac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \frac{nb}{m+n+1} \int x^m(ax+b)^{n-1} dx + C \\ \frac{x^m(ax+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \frac{mb}{(m+n+1)a} \int x^{m-1}(ax+b)^n dx + C \\ \frac{-x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{m+n+2}{(n+1)b} \int x^m(ax+b)^{n+1} dx + C \end{cases}$$

انتگرالیهای که حملاتی به صورت $\sqrt{ax+b}$ دارند.

$$۷۴ \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$$

$$۷۵ \int \frac{x dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \sqrt{ax+b} + C$$

$$۷۶ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)}{15a^3} \sqrt{ax+b} + C$$

$$۷۷ \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right) + C \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C \end{cases}$$

$$۷۸ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

$$۷۹ \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + C$$

$$۸۰ \int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} \sqrt{(ax+b)^3} + C$$

$$۸۱ \int x^2\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)}{105a^3} \sqrt{(ax+b)^3} + C$$

$$۸۲ \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C \quad [\text{See 14.87}]$$

$$۸۳ \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C \quad [\text{See 14.87}]$$

$$۸۴ \int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a} \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}} dx + C$$

$$118 \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + C$$

$$119 \int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^{n-1}} + C$$

$$120 \int \frac{x^m dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2 + a^2)^n} + C$$

$$121 \int \frac{dx}{x^m(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^m(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2 + a^2)^n} + C$$

$$122 \int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)} \left\{ \frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + a(m+n-2) \int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}} \right\} + C$$

$$123 \int \frac{ax+b}{px+q} dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln(px+q) + C$$

$$124 \int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n} dx = \begin{cases} \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)} \left\{ \frac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} + (n-m-2)a \int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} dx \right\} + C \\ \frac{-1}{(n-m-1)p} \left\{ \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} + m(bp-aq) \int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n} dx \right\} + C \\ \frac{-1}{(n-1)p} \left\{ \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma \int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}} dx \right\} + C \end{cases}$$

انتگرالیهای که جملاتی به صورت $\sqrt{ax+b}$ و $px+q$ دارند.

$$125 \int \frac{px+q}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2(apx+3aq-2bp)}{3a^2} \sqrt{ax+b} + C$$

$$126 \int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{bp-aq}\sqrt{p}} \ln \left(\frac{\sqrt{p(ax+b)} - \sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)} + \sqrt{bp-aq}} \right) + C \\ \frac{2}{\sqrt{aq-bp}\sqrt{p}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{p(ax+b)}{aq-bp}} + C \end{cases}$$

$$127 \int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \frac{\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}} \ln \left(\frac{\sqrt{p(ax+b)} - \sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)} + \sqrt{bp-aq}} \right) + C \\ \frac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \frac{2\sqrt{aq-bp}}{p\sqrt{p}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{p(ax+b)}{aq-bp}} + C \end{cases}$$

$$100 \int \sqrt{(ax+b)(px+q)} dx = \frac{2apx+bp+aq}{4ap} \sqrt{(ax+b)(px+q)} - \frac{(bp-aq)^2}{8ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} + C$$

$$101 \int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}} dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} + C$$

$$102 \int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{(aq-bp)\sqrt{px+q}} + C$$

انتگرالیهای که جملاتی به صورت x^2+a^2 دارند

$$103 \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$104 \int \frac{x dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C$$

$$105 \int \frac{x^2 dx}{x^2+a^2} = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$106 \int \frac{x^3 dx}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x^2+a^2) + C$$

$$107 \int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+a^2} \right) + C$$

$$108 \int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$109 \int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+a^2} \right) + C$$

$$110 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$111 \int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2+a^2)} + C$$

$$112 \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$113 \int \frac{x^3 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C$$

$$114 \int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+a^2} \right) + C$$

$$115 \int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{x}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{3}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$116 \int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+a^2} \right) + C$$

$$117 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + C$$

$$141 \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^2} = \frac{-x}{2a^2(x^2 - a^2)} - \frac{1}{4a^3} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C$$

$$142 \int \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2 - a^2)} + C$$

$$143 \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{4a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C$$

$$144 \int \frac{x^3 dx}{(x^2 - a^2)^2} = \frac{-a^2}{2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - a^2) + C$$

$$145 \int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 - a^2} \right) + C$$

$$146 \int \frac{dx}{x^2(x^2 - a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(x^2 - a^2)} - \frac{3}{4a^5} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C$$

$$147 \int \frac{dx}{x^3(x^2 - a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2 - a^2)} + \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 - a^2} \right) + C$$

$$148 \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n-1}} + C$$

$$149 \int \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2 - a^2)^{n-1}} + C$$

$$150 \int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)a^2(x^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^{n-1}} + C$$

$$151 \int \frac{x^m dx}{(x^2 - a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2 - a^2)^{n-1}} + a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2 - a^2)^n} + C$$

$$152 \int \frac{dx}{x^m(x^2 - a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2 - a^2)^n} - \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^m(x^2 - a^2)^{n-1}} + C$$

انتگرالیهای که جملاتی به صورت $a^2 - x^2$ و $(x^2 < a^2)$ دارند.

$$153 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + C \quad \text{یا} \quad \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$154 \int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2) + C$$

$$155 \int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} = -x + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + C$$

$$156 \int \frac{x^3 dx}{a^2 - x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(a^2 - x^2) + C$$

$$128 \int (px+q)^n \sqrt{ax+b} dx = \frac{2(px+q)^{n+1} \sqrt{ax+b}}{(2n+3)p} + \frac{bp-aq}{(2n+3)p} \int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}} dx$$

$$129 \int \frac{dx}{(px+q)^n \sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)(aq-bp)(px+q)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{2(n-1)(aq-bp)} \int \frac{dx}{(px+q)^{n-1} \sqrt{ax+b}} + C$$

$$130 \int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2(px+q)^n \sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} + \frac{2n(aq-bp)}{(2n+1)a} \int \frac{(px+q)^{n-1} dx}{\sqrt{ax+b}} + C$$

$$131 \int \frac{\sqrt{ax+b}}{(px+q)^n} dx = \frac{-\sqrt{ax+b}}{(n-1)p(px+q)^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)p} \int \frac{dx}{(px+q)^{n-1} \sqrt{ax+b}} + C$$

انتگرالیهای نامتعارف انتگرالیهایی که جملاتی به صورت $\sqrt{ax+b}$ و $\sqrt{px+q}$ دارند.

$$132 \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{ap}} \ln(\sqrt{a(px+q)} + \sqrt{p(ax+b)}) + C \\ \frac{2}{\sqrt{-ap}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{-p(ax+b)}{a(px+q)}} + C \end{cases}$$

$$133 \int \frac{x dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{ap} - \frac{bp+aq}{2ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} + C$$

انتگرالیهایی که جملاتی به صورت $x^2 - a^2$ و $(x^2 > a^2)$ دارند.

$$134 \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a}$$

$$135 \int \frac{x dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - a^2) + C$$

$$136 \int \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2} = x + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C$$

$$137 \int \frac{x^3 dx}{x^2 - a^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x^2 - a^2) + C$$

$$138 \int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2} \right) + C$$

$$139 \int \frac{dx}{x^2(x^2 - a^2)} = \frac{1}{a^2 x} + \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C$$

$$140 \int \frac{dx}{x^3(x^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2 x^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 - a^2} \right) + C$$

انتهرالهایی که جملانی به صورت $\sqrt{x^2+a^2}$ دارند.

$$172 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \text{ یا } \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$173 \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C$$

$$174 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$175 \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2} + C$$

$$176 \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

$$177 \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$$

$$178 \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

$$179 \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$180 \int x\sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + C$$

$$181 \int x^2\sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$182 \int x^3\sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + C$$

$$183 \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} - a \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

$$184 \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$185 \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^5} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$186 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$187 \int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$188 \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$189 \int \frac{x^3 dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$157 \int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

$$158 \int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)} = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

$$159 \int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

$$160 \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

$$161 \int \frac{x dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2-x^2)} + C$$

$$162 \int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

$$163 \int \frac{x^3 dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2} \ln(a^2-x^2) + C$$

$$164 \int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

$$165 \int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{3}{4a^5} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

$$166 \int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{1}{a^6} \ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

$$167 \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

$$168 \int \frac{x dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

$$169 \int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

$$170 \int \frac{x^m dx}{(a^2-x^2)^n} = a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{(a^2-x^2)^n} - \int \frac{x^{m-2} dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

$$171 \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2-x^2)^n} + C$$

$$\begin{aligned}
 204 \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C \\
 205 \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
 206 \quad \int \sqrt{x^2-a^2} dx &= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 207 \quad \int x\sqrt{x^2-a^2} dx &= \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + C \\
 208 \quad \int x^2\sqrt{x^2-a^2} dx &= \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 209 \quad \int x^3\sqrt{x^2-a^2} dx &= \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + C \\
 210 \quad \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx &= \sqrt{x^2-a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
 211 \quad \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2} dx &= -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 212 \quad \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3} dx &= -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
 213 \quad \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} &= -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C \\
 214 \quad \int \frac{x dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C \\
 215 \quad \int \frac{x^3 dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} &= -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 216 \quad \int \frac{x^3 dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} &= \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} + C \\
 217 \quad \int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} &= \frac{-1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
 218 \quad \int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{3/2}} &= -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2-a^2}} + C \\
 219 \quad \int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2a^3x^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^3} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
 220 \quad \int (x^2-a^2)^{3/2} dx &= \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} \\
 &\quad + \frac{3}{8}a^4 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 221 \quad \int x(x^2-a^2)^{3/2} dx &= \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 190 \quad \int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x} \right) + C \\
 191 \quad \int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} &= -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}} + C \\
 192 \quad \int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} &= \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} \\
 &\quad + \frac{3}{2a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x} \right) + C \\
 193 \quad \int (x^2+a^2)^{3/2} dx &= \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} \\
 &\quad + \frac{3}{8}a^4 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \\
 194 \quad \int x(x^2+a^2)^{3/2} dx &= \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} + C \\
 195 \quad \int x^2(x^2+a^2)^{3/2} dx &= \frac{x(x^2+a^2)^{5/2}}{6} - \frac{a^2x(x^2+a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2+a^2}}{16} \\
 &\quad - \frac{a^6}{16} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \\
 196 \quad \int x^3(x^2+a^2)^{3/2} dx &= \frac{(x^2+a^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{5/2}}{5} + C \\
 197 \quad \int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x} dx &= \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2+a^2} - a^3 \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x} \right) + C \\
 198 \quad \int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^2} dx &= -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \\
 199 \quad \int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^3} dx &= -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{3}{2}a \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x} \right) + C
 \end{aligned}$$

انگولهایایی که شامل تابع $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد.

$$\begin{aligned}
 200 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}), \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C \\
 201 \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 202 \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2-a^2} + C \\
 203 \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 229 \quad \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx &= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 230 \quad \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3} dx &= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 231 \quad \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C \\
 232 \quad \int \frac{x dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} &= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C \\
 233 \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 234 \quad \int \frac{x^3 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} &= \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C \\
 235 \quad \int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 236 \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}} &= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^4x} + \frac{x}{a^4\sqrt{a^2-x^2}} + C \\
 237 \quad \int \frac{dx}{x^4(a^2-x^2)^{3/2}} &= \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2-x^2}} \\
 &\quad - \frac{3}{2a^5} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 238 \quad \int (a^2-x^2)^{3/2} dx &= \frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4 \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 239 \quad \int x(a^2-x^2)^{3/2} dx &= -\frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} + C \\
 240 \quad \int x^2(a^2-x^2)^{3/2} dx &= -\frac{x(a^2-x^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(a^2-x^2)^{3/2}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{a^2-x^2}}{16} \\
 &\quad + \frac{a^6}{16} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 241 \quad \int x^3(a^2-x^2)^{3/2} dx &= \frac{(a^2-x^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{5/2}}{5} + C \\
 242 \quad \int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x} dx &= \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-x^2} - a^3 \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 243 \quad \int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^2} dx &= -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x} - \frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 244 \quad \int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^3} dx &= -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{3}{2}a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 222 \quad \int x^2(x^2-a^2)^{3/2} dx &= \frac{x(x^2-a^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(x^2-a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2-a^2}}{16} \\
 &\quad + \frac{a^6}{16} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 223 \quad \int x^3(x^2-a^2)^{3/2} dx &= \frac{(x^2-a^2)^{7/2}}{7} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + C \\
 224 \quad \int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x} dx &= \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + a^3 \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
 225 \quad \int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^2} dx &= -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \\
 226 \quad \int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^3} dx &= -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C
 \end{aligned}$$

انگرالهایی که جملاتی به صورت $\sqrt{a^2-x^2}$ دارند

$$\begin{aligned}
 227 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 228 \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= -\sqrt{a^2-x^2} + C \\
 229 \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 230 \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{a^2-x^2} + C \\
 231 \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} &= -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 232 \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C \\
 233 \quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 234 \quad \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 235 \quad \int x\sqrt{a^2-x^2} dx &= -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + C \\
 236 \quad \int x^2\sqrt{a^2-x^2} dx &= -\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 237 \quad \int x^3\sqrt{a^2-x^2} dx &= \frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + C \\
 238 \quad \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx &= \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C
 \end{aligned}$$

$$262 \int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + a \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$265 \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$266 \int \frac{x dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(bx+2c)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$267 \int \frac{x^2 dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$268 \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{c\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} + c$$

$$269 \int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{ax^2+2bx+c}{c^2x\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b^2-2ac}{2c^2} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} - \frac{3b}{2c^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$270 \int (ax^2+bx+c)^{n+1/2} dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4a(n+1)} + \frac{(2n+1)(4ac-b^2)}{8a(n+1)} \int (ax^2+bx+c)^{n-1/2} dx + c$$

$$271 \int x(ax^2+bx+c)^{n+1/2} dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{n+3/2}}{a(2n+3)} - \frac{b}{2a} \int (ax^2+bx+c)^{n+1/2} dx + c$$

$$272 \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + c + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + c$$

$$273 \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{-1}{(2n-1)c(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + c + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} + c$$

انتگرالی که شامل تابع $\sin ax$ باشد.

$$274 \int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$$

$$275 \int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} + c$$

انتگرالی که شامل تابع $\sqrt{ax^2+bx+c}$ باشد.

$$255 \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b) + c \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) \\ \text{یا} \frac{1}{\sqrt{a}} \sinh^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c \end{cases}$$

$$256 \int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$257 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$258 \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right) + c \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1}\left(\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right) \\ \text{یا} -\frac{1}{\sqrt{c}} \sinh^{-1}\left(\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c \end{cases}$$

$$259 \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$260 \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$261 \int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{3/2}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$262 \int x^2\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{6ax-5b}{24a^2} (ax^2+bx+c)^{3/2} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2} \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx + c$$

$$263 \int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + c$$

$$295 \int \frac{dx}{p+q \sin ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}} \tan^{-1} \frac{p \tan \frac{1}{2}ax + q}{\sqrt{p^2-q^2}} + C & p \neq \pm q \\ \frac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}} \ln \left(\frac{p \tan \frac{1}{2}ax + q - \sqrt{q^2-p^2}}{p \tan \frac{1}{2}ax + q + \sqrt{q^2-p^2}} \right) + C & \end{cases}$$

$$296 \int \frac{dx}{(p+q \sin ax)^2} = \frac{q \cos ax}{a(p^2-q^2)(p+q \sin ax)} + \frac{p}{p^2-q^2} \int \frac{dx}{p+q \sin ax} + C \quad p \neq \pm q$$

$$297 \int \frac{dx}{p^2+q^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{p^2+q^2} \tan ax}{p} + C$$

$$298 \int \frac{dx}{p^2-q^2 \sin^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{p^2-q^2} \tan ax}{p} + C \\ \frac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{q^2-p^2} \tan ax + p}{\sqrt{q^2-p^2} \tan ax - p} \right) + C \end{cases}$$

$$299 \int x^m \sin ax \, dx = -\frac{x^m \cos ax}{a} + \frac{mx^{m-1} \sin ax}{a^2} - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \sin ax \, dx + C$$

$$300 \int \frac{\sin ax}{x^n} dx = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} dx + C$$

$$301 \int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx + C$$

$$302 \int \frac{dx}{\sin^n ax} = \frac{-\cos ax}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} + C$$

$$303 \int \frac{x dx}{\sin^n ax} = \frac{-x \cos ax}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2) \sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\sin^{n-2} ax} + C$$

انتگرالیهای که شامل تابع $\cos ax$ باشد.

$$304 \int \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a} + C$$

$$305 \int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a} + C$$

$$306 \int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax + C$$

$$307 \int x^3 \cos ax \, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \sin ax + C$$

$$296 \int x^2 \sin ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a} \right) \cos ax + C$$

$$297 \int x^3 \sin ax \, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \sin ax + \left(\frac{6x}{a^3} - \frac{x^3}{a} \right) \cos ax + C$$

$$298 \int \frac{\sin ax}{x} dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \dots + C$$

$$299 \int \frac{\sin ax}{x^2} dx = -\frac{\sin ax}{x} + a \int \frac{\cos ax}{x} dx + C$$

$$280 \int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln (\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

$$281 \int \frac{x dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\} + C$$

$$282 \int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

$$283 \int x \sin^2 ax \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} + C$$

$$284 \int \sin^3 ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a} + C$$

$$285 \int \sin^4 ax \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a} + C$$

$$286 \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax + C$$

$$287 \int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a \sin^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

$$288 \int \sin px \sin qx \, dx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + C \quad (\text{If } p \neq \pm q)$$

$$289 \int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$290 \int \frac{x dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$291 \int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$292 \int \frac{x dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$293 \int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{6a} \tan^3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$294 \int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{6a} \tan^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$۳۲۵ \int \frac{dx}{p+q \cos ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{p-q}{p+q}} \tan \frac{1}{2}ax + c \\ \frac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}} \ln \left(\frac{\tan \frac{1}{2}ax + \sqrt{(q+p)/(q-p)}}{\tan \frac{1}{2}ax - \sqrt{(q+p)/(q-p)}} \right) + c \end{cases} \quad p \neq \pm q$$

$$۳۲۶ \int \frac{dx}{(p+q \cos ax)^2} = \frac{q \sin ax}{a(q^2-p^2)(p+q \cos ax)} - \frac{p}{q^2-p^2} \int \frac{dx}{p+q \cos ax} + c \quad p \neq \pm q$$

$$۳۲۷ \int \frac{dx}{p^2+q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}} \tan^{-1} \frac{p \tan ax}{\sqrt{p^2+q^2}} + c$$

$$۳۲۸ \int \frac{dx}{p^2-q^2 \cos^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}} \tan^{-1} \frac{p \tan ax}{\sqrt{p^2-q^2}} + c \\ \frac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}} \ln \left(\frac{p \tan ax - \sqrt{q^2-p^2}}{p \tan ax + \sqrt{q^2-p^2}} \right) + c \end{cases}$$

$$۳۲۹ \int x^m \cos ax \, dx = \frac{x^m \sin ax}{a} + \frac{mx^{m-1}}{a^2} \cos ax - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \cos ax \, dx + c$$

$$۳۳۰ \int \frac{\cos ax}{x^n} \, dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} \, dx + c$$

$$۳۳۱ \int \cos^n ax \, dx = \frac{\sin ax \cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx + c$$

$$۳۳۲ \int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} + c$$

$$۳۳۳ \int \frac{x \, dx}{\cos^n ax} = \frac{x \sin ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2) \cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x \, dx}{\cos^{n-2} ax} + c$$

استرکالهای که شامل توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ باشند.

$$۳۳۴ \int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{\sin^2 ax}{2a} + c$$

$$۳۳۵ \int \sin px \cos qx \, dx = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} + c$$

$$۳۳۶ \int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + c \quad n \neq -1$$

$$۳۰۸ \int \frac{\cos ax}{x} \, dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots + c$$

$$۳۰۹ \int \frac{\cos ax}{x^2} \, dx = -\frac{\cos ax}{x} - a \int \frac{\sin ax}{x} \, dx + c$$

$$۳۱۰ \int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) + c$$

$$۳۱۱ \int \frac{x \, dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\} + c$$

$$۳۱۲ \int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + c$$

$$۳۱۳ \int x \cos^2 ax \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2} + c$$

$$۳۱۴ \int \cos^3 ax \, dx = \frac{\sin ax}{a} - \frac{\sin^3 ax}{3a} + c$$

$$۳۱۵ \int \cos^4 ax \, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a} + c$$

$$۳۱۶ \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\tan ax}{a} + c$$

$$۳۱۷ \int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a \cos^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) + c$$

$$۳۱۸ \int \cos ax \cos px \, dx = \frac{\sin(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\sin(a+p)x}{2(a+p)} + c \quad a \neq \pm p,$$

$$۳۱۹ \int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + c$$

$$۳۲۰ \int \frac{x \, dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a} \cot \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{ax}{2} + c$$

$$۳۲۱ \int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + c$$

$$۳۲۲ \int \frac{x \, dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a} \tan \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{ax}{2} + c$$

$$۳۲۳ \int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a} \cot \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \cot^2 \frac{ax}{2} + c$$

$$۳۲۴ \int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \tan \frac{ax}{2} + \frac{1}{6a} \tan^2 \frac{ax}{2} + c$$

$$730 \int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax + r}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{r^2 - p^2 - q^2}} \tan^{-1} \left(\frac{p - (r - q) \tan(ax/2)}{\sqrt{r^2 - p^2 - q^2}} \right) + C \\ \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2 - r^2}} \ln \left(\frac{p - \sqrt{p^2 + q^2 - r^2} + (r - q) \tan(ax/2)}{p + \sqrt{p^2 + q^2 - r^2} + (r - q) \tan(ax/2)} \right) + C \end{cases}$$

$$731 \int \frac{dx}{p \sin ax - q(1 - \cos ax)} = \frac{1}{ap} \ln \left(q - p \tan \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$732 \int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax \pm \sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{-1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \tan \left(\frac{x}{4} - \frac{ax + \tan^{-1}(q/p)}{2} \right) + C$$

$$733 \int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax - q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{apq} \tan^{-1} \left(\frac{p \tan ax}{q} \right) + C$$

$$734 \int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax - q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{2apq} \ln \left(\frac{p \tan ax - q}{p \tan ax + q} \right) + C$$

$$735 \int \sin^m ax \cos^n ax dx$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax}{a(m-n)} - \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} ax \cos^n ax dx + C \\ \frac{\sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax}{a(m-n)} - \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m ax \cos^{n-2} ax dx + C \end{cases}$$

$$736 \int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax} dx = \begin{cases} \frac{\sin^{m-1} ax}{(m-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^{n-1} ax} dx + C \\ \frac{\sin^{m+1} ax}{(m+1) \cos^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m ax}{\cos^{n-1} ax} dx + C \\ \frac{-\sin^{m-1} ax}{a(m-n) \cos^{n-1} ax} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^n ax} dx + C \end{cases}$$

$$737 \int \frac{\cos^m ax}{\sin^n ax} dx = \begin{cases} \frac{-\cos^{m-1} ax}{(m-1) \sin^{n-1} ax} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^{n-1} ax} dx + C \\ \frac{-\cos^{m+1} ax}{a(m+1) \sin^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m ax}{\sin^{n-1} ax} dx + C \\ \frac{\cos^{m-1} ax}{a(m-n) \sin^{n-1} ax} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^n ax} dx + C \end{cases}$$

$$738 \int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(m-1) \sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} ax \cos^{n-1} ax} + C \\ \frac{-1}{a(m-1) \sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-1} ax \cos^{n-2} ax} + C \end{cases}$$

$$739 \int \cos^n ax \sin ax dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \quad n \neq -1$$

$$740 \int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} + C$$

$$741 \int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln |\tan ax| + C$$

$$742 \int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{x}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{a \sin ax} + C$$

$$743 \int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + \frac{1}{a \cos ax} + C$$

$$744 \int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2 \cot 2ax}{a} + C$$

$$745 \int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} dx = -\frac{\sin ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$$

$$746 \int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} dx = \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

$$747 \int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$$

$$748 \int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

$$749 \int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) + C$$

$$750 \int \frac{\sin ax dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} = \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax| + C$$

$$751 \int \frac{\cos ax dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax| + C$$

$$752 \int \frac{\sin ax dx}{p + q \cos ax} = -\frac{1}{aq} \ln |p + q \cos ax| + C$$

$$753 \int \frac{\cos ax dx}{p + q \sin ax} = \frac{1}{aq} \ln |p + q \sin ax| + C$$

$$754 \int \frac{\sin ax dx}{(p + q \cos ax)^n} = \frac{1}{aq(n-1)(p + q \cos ax)^{n-1}} + C$$

$$755 \int \frac{\cos ax dx}{(p + q \sin ax)^n} = \frac{-1}{aq(n-1)(p + q \sin ax)^{n-1}} + C$$

$$756 \int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \tan \left(\frac{ax + \tan^{-1}(q/p)}{2} \right) + C$$

انتگرالیهایی که شامل تابع $\cot ax$ باشد

$$\begin{aligned}
 ۳۷۲ \quad \int \cot ax \, dx &= \frac{1}{a} \ln \sin ax + C \\
 ۳۷۵ \quad \int \cot^2 ax \, dx &= -\frac{\cot ax}{a} - x + C \\
 ۳۷۶ \quad \int \cot^3 ax \, dx &= -\frac{\cot^2 ax}{2a} - \frac{1}{a} \ln \sin ax + C \\
 ۳۷۷ \quad \int \cot^n ax \csc^2 ax \, dx &= -\frac{\cot^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \\
 ۳۷۸ \quad \int \frac{\csc^2 ax}{\cot ax} \, dx &= -\frac{1}{a} \ln \cot ax + C \\
 ۳۷۹ \quad \int \frac{dx}{\cot ax} &= -\frac{1}{a} \ln \cos ax + C \\
 ۳۸۰ \quad \int x \cot ax \, dx &= \frac{1}{a^2} \left\{ ax - \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots \right\} + C \\
 ۳۸۱ \quad \int \frac{\cot ax}{x} \, dx &= -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \dots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \dots + C \\
 ۳۸۲ \quad \int x \cot^2 ax \, dx &= -\frac{x \cot ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax - \frac{x^2}{2} + C \\
 ۳۸۳ \quad \int \frac{dx}{p+q \cot ax} &= \frac{px}{p^2+q^2} - \frac{q}{a(p^2+q^2)} \ln(p \sin ax + q \cos ax) + C \\
 ۳۸۴ \quad \int \cot^n ax \, dx &= -\frac{\cot^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2} ax \, dx + C \\
 \end{aligned}$$

انتگرالیهایی که شامل تابع $\sec ax$ باشد

$$\begin{aligned}
 ۳۸۵ \quad \int \sec ax \, dx &= \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C \\
 ۳۸۶ \quad \int \sec^2 ax \, dx &= \frac{\tan ax}{a} + C \\
 ۳۸۷ \quad \int \sec^3 ax \, dx &= \frac{\sec ax \tan ax}{2a} + \frac{1}{2a} \ln(\sec ax + \tan ax) + C \\
 ۳۸۸ \quad \int \sec^n ax \tan ax \, dx &= \frac{\sec^n ax}{na} + C \\
 ۳۸۹ \quad \int \frac{dx}{\sec ax} &= \frac{\sin ax}{a} + C \\
 ۳۹۰ \quad \int x \sec ax \, dx &= \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\} + C
 \end{aligned}$$

انتگرالیهایی که شامل تابع $\tan ax$ باشد

$$\begin{aligned}
 ۳۶۳ \quad \int \tan ax \, dx &= -\frac{1}{a} \ln \cos ax = \frac{1}{a} \ln \sec ax + C \\
 ۳۶۴ \quad \int \tan^2 ax \, dx &= \frac{\tan ax}{a} - x + C \\
 ۳۶۵ \quad \int \tan^3 ax \, dx &= \frac{\tan^2 ax}{2a} + \frac{1}{a} \ln \cos ax + C \\
 ۳۶۶ \quad \int \tan^n ax \sec^2 ax \, dx &= \frac{\tan^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \\
 ۳۶۷ \quad \int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax} \, dx &= \frac{1}{a} \ln \tan ax + C \\
 ۳۶۸ \quad \int \frac{dx}{\tan^2 ax} &= \frac{1}{a} \ln \sin ax + C \\
 ۳۶۹ \quad \int x \tan ax \, dx &= \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^3}{8} + \frac{(ax)^5}{16} + \frac{2(ax)^7}{105} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\} + C \\
 ۳۷۰ \quad \int \frac{\tan ax}{x} \, dx &= ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} \\
 &\quad + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots + C \\
 ۳۷۱ \quad \int x \tan^3 ax \, dx &= \frac{x \tan ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax - \frac{x^2}{2} + C \\
 ۳۷۲ \quad \int \frac{dx}{p+q \tan ax} &= \frac{px}{p^2+q^2} + \frac{q}{a(p^2+q^2)} \ln(q \sin ax + p \cos ax) + C \\
 ۳۷۳ \quad \int \tan^n ax \, dx &= \frac{\tan^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \tan^{n-3} ax \, dx + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۰۶ \int x \sin^{-1} \frac{x}{a} dx &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4} + C \\
 ۴۰۷ \int x^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9} + C \\
 ۴۰۸ \int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} dx &= \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (x/a)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (x/a)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots + C \\
 ۴۰۹ \int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x^2} dx &= -\frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 ۴۱۰ \int \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right)^2 dx &= x \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2-x^2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 ۴۱۱ \int \cos^{-1} \frac{x}{a} dx &= x \cos^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C \\
 ۴۱۲ \int x \cos^{-1} \frac{x}{a} dx &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \cos^{-1} \frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4} + C \\
 ۴۱۳ \int x^2 \cos^{-1} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^3}{3} \cos^{-1} \frac{x}{a} - \frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9} + C \\
 ۴۱۴ \int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} dx &= \frac{1}{2} \ln x - \int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} dx + C \\
 ۴۱۵ \int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2} dx &= -\frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + C \\
 ۴۱۶ \int \left(\cos^{-1} \frac{x}{a} \right)^2 dx &= x \left(\cos^{-1} \frac{x}{a} \right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2-x^2} \cos^{-1} \frac{x}{a} + C \\
 ۴۱۷ \int \tan^{-1} \frac{x}{a} dx &= x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2+a^2) + C \\
 ۴۱۸ \int x \tan^{-1} \frac{x}{a} dx &= \frac{1}{2}(x^2+a^2) \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C \\
 ۴۱۹ \int x^2 \tan^{-1} \frac{x}{a} dx &= \frac{x^3}{3} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x^2+a^2) + C \\
 ۴۲۰ \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x} dx &= \frac{x}{a} - \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} - \frac{(x/a)^7}{7^2} + \dots + C \\
 ۴۲۱ \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x^2+a^2}{x^2} \right) + C \\
 ۴۲۲ \int \cot^{-1} \frac{x}{a} dx &= x \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2+a^2) + C \\
 ۴۲۳ \int x \cot^{-1} \frac{x}{a} dx &= \frac{1}{2}(x^2+a^2) \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C
 \end{aligned}$$

$$۳۹۱ \int \frac{\sec ax}{x} dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} + \frac{61(ax)^6}{4320} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \dots + C$$

$$۳۹۲ \int x \sec^2 ax dx = \frac{x}{a} \tan ax + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax + C$$

$$۳۹۳ \int \frac{dx}{q+p \sec ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \int \frac{dx}{p'+q \cos ax} + C$$

$$۳۹۴ \int \sec^n ax dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} ax dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع $\csc ax$ باشد.

$$۳۹۵ \int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

$$۳۹۶ \int \csc^3 ax dx = -\frac{\cot ax}{a} + C$$

$$۳۹۷ \int \csc^3 ax dx = -\frac{\csc ax \cot ax}{2a} + \frac{1}{2a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

$$۳۹۸ \int \csc^n ax \cot ax dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C$$

$$۳۹۹ \int \frac{dx}{\csc ax} = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

$$\begin{aligned}
 ۴۰۰ \int x \csc ax dx &= \frac{1}{a^2} \left\{ ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۰۱ \int \frac{\csc ax}{x} dx &= -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} \\
 &\quad + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots + C
 \end{aligned}$$

$$۴۰۲ \int x \csc^2 ax dx = -\frac{x \cot ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax + C$$

$$۴۰۳ \int \frac{dx}{q+p \csc ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \int \frac{dx}{p+q \sin ax} + C$$

$$۴۰۴ \int \csc^n ax dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} ax dx + C$$

انتگرالهایی که شامل توابع معکوس مثلثاتی باشند

$$۴۰۵ \int \sin^{-1} \frac{x}{a} dx = x \sin^{-1} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\begin{aligned}
 ۴۲۴ \int x^2 \csc^{-1} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} \frac{1}{3} \csc^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{3} \csc^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۲۵ \int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} dx &= -\left(\frac{1}{x} + \frac{(a/x)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3(a/x)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(a/x)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots \right) + C
 \end{aligned}$$

$$۴۲۶ \int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x^2} dx = \begin{cases} -\frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

$$۴۲۷ \int x^m \sin^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx + C$$

$$۴۲۸ \int x^m \cos^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cos^{-1} \frac{x}{a} + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx + C$$

$$۴۲۹ \int x^m \tan^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2} dx + C$$

$$۴۳۰ \int x^m \cot^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2} dx + C$$

$$\begin{aligned}
 ۴۳۱ \int x^m \sec^{-1} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} \frac{x^{m+1} \sec^{-1}(x/a)}{m+1} - \frac{a}{m-1} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^{m+1} \sec^{-1}(x/a)}{m+1} + \frac{a}{m-1} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۳۲ \int x^m \csc^{-1} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} \frac{x^{m+1} \csc^{-1}(x/a)}{m+1} + \frac{a}{m+1} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^{m+1} \csc^{-1}(x/a)}{m+1} - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$۴۲۲ \int x^2 \cot^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(x^2+a^2) + C$$

$$۴۲۵ \int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln x - \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x} dx + C$$

$$۴۲۶ \int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2} dx = -\frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x^2+a^2}{x^2} \right) + C$$

$$۴۲۷ \int \sec^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \sec^{-1} \frac{x}{a} - a \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x \sec^{-1} \frac{x}{a} + a \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

$$۴۲۸ \int x \sec^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \sec^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2} \sec^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۲۹ \int x^2 \sec^{-1} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} \frac{x^3}{3} \sec^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3} \sec^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۳۰ \int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \ln x + \frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3(a/x)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(a/x)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots + C
 \end{aligned}$$

$$۴۳۱ \int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x^2} dx = \begin{cases} -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

$$۴۳۲ \int \csc^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \csc^{-1} \frac{x}{a} + a \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x \csc^{-1} \frac{x}{a} - a \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

$$۴۳۳ \int x \csc^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \csc^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2} \csc^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

$$۴۵۵ \int x e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{x e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} - \frac{e^{ax}((a^2 - b^2) \cos bx + 2ab \sin bx)}{(a^2 + b^2)^2} + C$$

$$۴۵۶ \int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{e^{ax} \ln x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} \, dx + C$$

$$۴۵۷ \int e^{ax} \sin^n bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} bx}{a^2 + n^2 b^2} (a \sin bx - n b \cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx \, dx + C$$

$$۴۵۸ \int e^{ax} \cos^n bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} bx}{a^2 + n^2 b^2} (a \cos bx + n b \sin bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx \, dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع $\ln x$ باشد

$$۴۵۹ \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$۴۶۰ \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2}) + C$$

$$۴۶۱ \int x^m \ln x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\ln x - \frac{1}{m+1} \right) + C \quad m \neq -1$$

$$۴۶۲ \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

$$۴۶۳ \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$۴۶۴ \int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

$$۴۶۵ \int \frac{\ln^n x \, dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$۴۶۶ \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C$$

$$۴۶۷ \int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \dots + C$$

$$۴۶۸ \int \frac{x^m dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + (m+1) \ln x + \frac{(m+1)^2 \ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{(m+1)^3 \ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \dots + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع e^{ax} باشد

$$۴۴۲ \int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$۴۴۳ \int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C$$

$$۴۴۵ \int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right) + C$$

$$۴۴۶ \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^n - \frac{n x^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \dots - \frac{(-1)^{n-1} n!}{a^n} \right) + C$$

$$۴۴۷ \int \frac{e^{ax}}{x} \, dx = \ln x + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots + C$$

اگر n عدد صحیح مثبت باشد.

$$۴۴۸ \int \frac{e^{ax}}{x^n} \, dx = \frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} \, dx + C$$

$$۴۴۹ \int \frac{dx}{p + q e^{ax}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap} \ln(p + q e^{ax}) + C$$

$$۴۵۰ \int \frac{dx}{(p + q e^{ax})^2} = \frac{x}{p^2} + \frac{1}{ap(p + q e^{ax})} - \frac{1}{ap^2} \ln(p + q e^{ax}) + C$$

$$۴۵۱ \int \frac{dx}{p e^{ax} + q e^{-ax}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{pq}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} e^{ax} \right) + C \\ \frac{1}{2a\sqrt{-pq}} \ln \left(\frac{e^{ax} - \sqrt{-q/p}}{e^{ax} + \sqrt{-q/p}} \right) + C \end{cases}$$

$$۴۵۲ \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$۴۵۳ \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$۴۵۴ \int x e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{x e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{e^{ax}((a^2 - b^2) \sin bx - 2ab \cos bx)}{(a^2 + b^2)^2} + C$$

$$۴۸۵ \int \sinh ax \sin px \, dx = \frac{a \cosh ax \sin px - p \sinh ax \cos px}{a^2 + p^2} + C$$

$$۴۸۶ \int \sinh ax \cos px \, dx = \frac{a \cosh ax \cos px + p \sinh ax \sin px}{a^2 + p^2} + C$$

$$۴۸۷ \int \frac{dx}{p + q \sinh ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \left(\frac{qe^{ax} + p - \sqrt{p^2 + q^2}}{qe^{ax} + p + \sqrt{p^2 + q^2}} \right) + C$$

$$۴۸۸ \int \frac{dx}{(p + q \sinh ax)^2} = \frac{-q \cosh ax}{a(p^2 + q^2)(p + q \sinh ax)} + \frac{p}{p^2 + q^2} \int \frac{dx}{p + q \sinh ax} + C$$

$$۴۸۹ \int \frac{dx}{p^2 + q^2 \sinh^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ap\sqrt{q^2 - p^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{q^2 - p^2} \tanh ax}{p} + C \\ \frac{1}{2ap\sqrt{p^2 - q^2}} \ln \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - q^2} \tanh ax}{p - \sqrt{p^2 - q^2} \tanh ax} \right) + C \end{cases}$$

$$۴۹۰ \int \frac{dx}{p^2 - q^2 \sinh^2 ax} = \frac{1}{2ap\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + q^2} \tanh ax}{p - \sqrt{p^2 + q^2} \tanh ax} \right) + C$$

$$۴۹۱ \int x^m \sinh ax \, dx = \frac{x^m \cosh ax}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cosh ax \, dx + C$$

$$۴۹۲ \int x^{n-1} \cosh ax \, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{an} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax \, dx + C$$

$$۴۹۳ \int \frac{\sinh ax}{x^n} dx = \frac{\sinh ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\cosh ax}{x^{n-1}} dx + C$$

$$۴۹۴ \int \frac{dx}{\sinh^{n-1} ax} = \frac{-\cosh ax}{a(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sinh^{n-2} ax} + C$$

$$۴۹۵ \int \frac{x^2 dx}{\sinh^n ax} = \frac{-x \cosh ax}{a^2(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\sinh^{n-2} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\sinh^{n-2} ax} + C$$

انگرالیهای که شامل تابع $\cosh ax$ باشد

$$۴۹۶ \int \cosh ax \, dx = \frac{\sinh ax}{a} + C$$

$$۴۹۷ \int x \cosh ax \, dx = \frac{x \sinh ax}{a} - \frac{\cosh ax}{a^2} + C$$

$$۴۶۹ \int \ln^m x \, dx = x \ln^m x - m \int \ln^{m-1} x \, dx + C$$

$$۴۷۰ \int x^m \ln^m x \, dx = \frac{x^{m+1} \ln^m x}{m+1} - \frac{m}{m+1} \int x^m \ln^{m-1} x \, dx + C \text{ اگر } m \neq -1$$

$$۴۷۱ \int \ln(x^2 + a^2) \, dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$۴۷۲ \int \ln(x^2 - a^2) \, dx = x \ln(x^2 - a^2) - 2x + a \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right) + C$$

$$۴۷۳ \int x^m \ln(x^2 \pm a^2) \, dx = \frac{x^{m+1} \ln(x^2 \pm a^2)}{m+1} - \frac{2}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{x^2 \pm a^2} dx + C$$

انگرالیهایی که شامل تابع $\sinh ax$ باشد

$$۴۷۴ \int \sinh ax \, dx = \frac{\cosh ax}{a} + C$$

$$۴۷۵ \int x \sinh ax \, dx = \frac{x \cosh ax}{a} - \frac{\sinh ax}{a^2} + C$$

$$۴۷۶ \int x^2 \sinh ax \, dx = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3} \right) \cosh ax - \frac{2x}{a^2} \sinh ax + C$$

$$۴۷۷ \int \frac{\sinh ax}{x} dx = ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} + \dots + C$$

$$۴۷۸ \int \frac{\sinh ax}{x^2} dx = -\frac{\sinh ax}{x} + a \int \frac{\cosh ax}{x} dx + C$$

$$۴۷۹ \int \frac{dx}{\sinh ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + C$$

$$۴۸۰ \int \frac{x dx}{\sinh ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} - \dots + \frac{2(-1)^n (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\} + C$$

$$۴۸۱ \int \sinh^2 ax \, dx = \frac{\sinh ax \cosh ax}{2a} - \frac{x}{2} + C$$

$$۴۸۲ \int x \sinh^2 ax \, dx = \frac{x \sinh 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$۴۸۳ \int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\coth ax}{a} + C$$

$$۴۸۴ \int \sinh ax \sinh px \, dx = \frac{\sinh(a+p)x}{2(a+p)} - \frac{\sinh(a-p)x}{2(a-p)} + C \quad a \neq \pm p$$

$$\int \frac{dx}{p+q \cosh ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{q^2-p^2}} \tan^{-1} \frac{qe^{ax}+p}{\sqrt{q^2-p^2}} + C \\ \frac{1}{a\sqrt{p^2-q^2}} \ln \left(\frac{qe^{ax}+p-\sqrt{p^2-q^2}}{qe^{ax}+p+\sqrt{p^2-q^2}} \right) + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(p+q \cosh ax)^2} = \frac{q \sinh ax}{a(q^2-p^2)(p+q \cosh ax)} - \frac{p}{q^2-p^2} \int \frac{dx}{p+q \cosh ax} + C$$

$$\int \frac{dx}{p^2-q^2 \cosh^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{2ap\sqrt{p^2-q^2}} \ln \left(\frac{p \tanh ax + \sqrt{p^2-q^2}}{p \tanh ax - \sqrt{p^2-q^2}} \right) + C \\ \frac{-1}{ap\sqrt{q^2-p^2}} \tan^{-1} \frac{p \tanh ax}{\sqrt{q^2-p^2}} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{p^2+q^2 \cosh^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{2ap\sqrt{p^2+q^2}} \ln \left(\frac{p \sinh ax + \sqrt{p^2+q^2}}{p \sinh ax - \sqrt{p^2+q^2}} \right) + C \\ \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}} \tan^{-1} \frac{p \tanh ax}{\sqrt{p^2+q^2}} + C \end{cases}$$

$$\int x^m \cosh ax \, dx = \frac{x^m \sinh ax}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \sinh ax \, dx + C$$

$$\int \cosh^n ax \, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax \, dx + C$$

$$\int \frac{\cosh ax}{x^n} \, dx = \frac{-\cosh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\sinh ax}{x^{n-1}} \, dx + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^n ax} = \frac{\sinh ax}{a(n-1) \cosh^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cosh^{n-2} ax} + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\cosh^n ax} = \frac{x \sinh ax}{a(n-1) \cosh^{n-1} ax} + \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cosh^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x \, dx}{\cosh^{n-2} ax} + C$$

انتگرالیهای که جملاتی بصورت $\sinh ax$ و $\cosh ax$ دارند.

$$\int \sinh ax \cosh ax \, dx = \frac{\sinh^2 ax}{2a} + C$$

$$\int \sinh px \cosh qx \, dx = \frac{\cosh(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\cosh(p-q)x}{2(p-q)} + C$$

$$\int \sinh^n ax \cosh ax \, dx = \frac{\sinh^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \quad n \neq -1$$

$$\int x^2 \cosh ax \, dx = -\frac{2x \cosh ax}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3} \right) \sinh ax + C$$

$$\int \frac{\cosh ax}{x} \, dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots + C$$

$$\int \frac{\cosh ax}{x^2} \, dx = -\frac{\cosh ax}{x} + a \int \frac{\sinh ax}{x} \, dx + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\cosh ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\} + C$$

$$\int \cosh^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sinh ax \cosh ax}{2a} + C$$

$$\int x \cosh^2 ax \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sinh 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\tanh ax}{a} + C$$

$$\int \cosh ax \cosh px \, dx = \frac{\sinh(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\sinh(a+p)x}{2(a+p)} + C$$

$$\int \cosh ax \sin px \, dx = \frac{a \sinh ax \sin px - p \cosh ax \cos px}{a^2 + p^2} + C$$

$$\int \cosh ax \cos px \, dx = \frac{a \sinh ax \cos px + p \cosh ax \sin px}{a^2 + p^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh ax + 1} = \frac{1}{a} \tanh \frac{ax}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{1}{a} \coth \frac{ax}{2} + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\cosh ax + 1} = \frac{x}{a} \tanh \frac{ax}{2} - \frac{2}{a^2} \ln \cosh \frac{ax}{2} + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{x}{a} \coth \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sinh \frac{ax}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{(\cosh ax + 1)^2} = \frac{1}{2a} \tanh \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \tanh^3 \frac{ax}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{(\cosh ax - 1)^2} = \frac{1}{2a} \coth \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \coth^3 \frac{ax}{2} + C$$

$$524 \int x \tanh ax \, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^3}{3} - \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} - \dots - \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\} + C$$

$$525 \int x \tanh^2 ax \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \tanh ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \cosh ax + C$$

$$526 \int \frac{\tanh ax}{x} \, dx = ax - \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} - \dots - \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots + C$$

$$527 \int \frac{ax}{p + q \tanh ax} \, dx = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)} \ln (q \sinh ax + p \cosh ax) + C$$

$$528 \int \tanh^n ax \, dx = \frac{-\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax \, dx + C$$

انكراهي كد شامل تابع cothax باشد

$$529 \int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \sinh ax + C$$

$$530 \int \coth^2 ax \, dx = x - \frac{\coth ax}{a} + C$$

$$531 \int \coth^3 ax \, dx = \frac{1}{2} \ln \sinh ax - \frac{\coth^2 ax}{2a} + C$$

$$532 \int \coth^n ax \operatorname{csch}^2 ax \, dx = -\frac{\coth^{n+1} ax}{(n+1)a} + C$$

$$533 \int \frac{\operatorname{csch}^2 ax}{\coth ax} \, dx = -\frac{1}{a} \ln \coth ax + C$$

$$534 \int \frac{dx}{\coth ax} = \frac{1}{a} \ln \cosh ax + C$$

$$535 \int x \coth ax \, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ ax + \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\} + C$$

$$536 \int x \coth^2 ax \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \coth ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sinh ax + C$$

$$527 \int \cosh^n ax \sinh ax \, dx = \frac{\cosh^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \quad n \neq -1$$

$$528 \int \sinh^2 ax \cosh^2 ax \, dx = \frac{\sinh 4ax}{32a} - \frac{x}{8} + C$$

$$529 \int \frac{dx}{\sinh ax \cosh ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh ax + C$$

$$530 \int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh ax} = -\frac{1}{a} \tan^{-1} \sinh ax - \frac{\operatorname{csch} ax}{a} + C$$

$$531 \int \frac{dx}{\sinh ax \cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{sech} ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + C$$

$$532 \int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh^2 ax} = -\frac{2 \coth 2ax}{a} + C$$

$$533 \int \frac{\sinh^2 ax}{\cosh ax} \, dx = \frac{\sinh ax}{a} - \frac{1}{a} \tan^{-1} \sinh ax + C$$

$$53 \int \frac{\cosh^2 ax}{\sinh ax} \, dx = \frac{\cosh ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + C$$

$$525 \int \frac{dx}{\cosh ax (1 + \sinh ax)} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 + \sinh ax}{\cosh ax} \right) + \frac{1}{a} \tan^{-1} e^{ax} + C$$

$$526 \int \frac{dx}{\sinh ax (\cosh ax + 1)} = \frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + \frac{1}{2a(\cosh ax + 1)} + C$$

$$527 \int \frac{dx}{\sinh ax (\cosh ax - 1)} = -\frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2} - \frac{1}{2a(\cosh ax - 1)} + C$$

انكراهي كد شامل تابع tanhax باشد.

$$538 \int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax + C$$

$$529 \int \tanh^2 ax \, dx = x - \frac{\tanh ax}{a} + C$$

$$540 \int \tanh^3 ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax - \frac{\tanh^2 ax}{2a} + C$$

$$541 \int \tanh^n ax \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{\tanh^{n+1} ax}{(n+1)a} + C$$

$$542 \int \frac{\operatorname{sech}^2 ax}{\tanh ax} \, dx = \frac{1}{a} \ln \tanh ax + C$$

$$543 \int \frac{dx}{\tanh ax} = \frac{1}{a} \ln \sinh ax + C$$

انتگرالیهایی که شامل تابع $\operatorname{csch} ax$ باشد

$$\Delta 70 \quad \int \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + C$$

$$\Delta 71 \quad \int \operatorname{csch}^2 ax \, dx = -\frac{\operatorname{coth} ax}{a} + C$$

$$\Delta 72 \quad \int \operatorname{csch}^3 ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch} ax \operatorname{coth} ax}{2a} - \frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + C$$

$$\Delta 73 \quad \int \operatorname{csch}^n ax \operatorname{coth} ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C$$

$$\Delta 74 \quad \int \frac{dx}{\operatorname{csch} ax} = \frac{1}{a} \cosh ax + C$$

$$\Delta 75 \quad \int x \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \dots + \frac{2(-1)^n (2^{2n-1} - 1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\} + C$$

$$\Delta 76 \quad \int x \operatorname{csch}^2 ax \, dx = -\frac{x \operatorname{coth} ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sinh ax + C$$

$$\Delta 77 \quad \int \frac{\operatorname{csch} ax}{x} \, dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} + \dots + \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1} - 1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots + C$$

$$\Delta 78 \quad \int \frac{dx}{q + p \operatorname{csch} ax} = \frac{\sqrt{q}}{q} - \frac{p}{q} \int \frac{dx}{p + q \sinh ax} + C \quad [\text{See 14.553}]$$

$$\Delta 79 \quad \int \operatorname{csch}^n ax \, dx = \frac{-\operatorname{csch}^{n-2} ax \operatorname{coth} ax}{a(n-1)} - \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{csch}^{n-2} ax \, dx + C$$

انتگرالیهایی که شامل توابع معکوس هیپربولیک باشند

$$\Delta 80 \quad \int \sinh^{-1} \frac{x}{a} \, dx = x \sinh^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$\Delta 86 \quad \int x \sinh^{-1} \frac{x}{a} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} \right) \sinh^{-1} \frac{x}{a} - \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{4} + C$$

$$\Delta 97 \quad \int x^2 \sinh^{-1} \frac{x}{a} \, dx = \frac{x^3}{3} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{(2a^2 - x^2) \sqrt{x^2 + a^2}}{9} + C$$

$$\Delta 57 \quad \int \frac{\operatorname{coth} ax}{x} \, dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} + \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots + C$$

$$\Delta 58 \quad \int \frac{dx}{p + q \operatorname{coth} ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)} \ln(p \sinh ax + q \cosh ax) + C$$

$$\Delta 59 \quad \int \operatorname{coth}^n ax \, dx = -\frac{\operatorname{coth}^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \operatorname{coth}^{n-2} ax \, dx + C$$

انتگرالیهایی که شامل تابع $\operatorname{sech} ax$ باشد

$$\Delta 60 \quad \int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{ax} + C$$

$$\Delta 61 \quad \int \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{\tanh ax}{a} + C$$

$$\Delta 62 \quad \int \operatorname{sech}^3 ax \, dx = \frac{\operatorname{sech} ax \tanh ax}{2a} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \sinh ax + C$$

$$\Delta 63 \quad \int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C$$

$$\Delta 64 \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sech} ax} = \frac{\sinh ax}{a} + C$$

$$\Delta 65 \quad \int x \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \dots + \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\} + C$$

$$\Delta 66 \quad \int x \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{x \tanh ax}{a} - \frac{1}{a^2} \ln \cosh ax + C$$

$$\Delta 67 \quad \int \frac{\operatorname{sech} ax}{x} \, dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} - \frac{61(ax)^6}{4320} + \dots + \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \dots + C$$

$$\Delta 68 \quad \int \frac{dx}{q + p \operatorname{sech} ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \int \frac{dx}{p + q \cosh ax} + C$$

$$\Delta 69 \quad \int \operatorname{sech}^n ax \, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2} ax \, dx + C$$

$$\Delta 98 \quad \int \frac{\sinh^{-1}(x/a) dx}{x} = \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{(x/a)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3(x/a)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(x/a)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots + C & x < a \\ \frac{\ln^2(2x/a)}{2} - \frac{(a/x)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3(a/x)^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(a/x)^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} + \dots + C & x = a \\ -\frac{\ln^2(-2x/a)}{2} + \frac{(a/x)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3(a/x)^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(a/x)^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} - \dots & x < -a \end{cases}$$

$$\Delta 99 \quad \int \frac{\sinh^{-1}(x/a) dx}{x^2} = -\frac{\sinh^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right) + C$$

$$F 00 \quad \int \cosh^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \cosh^{-1}(x/a) - \sqrt{x^2 - a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ x \cosh^{-1}(x/a) + \sqrt{x^2 - a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

$$F 01 \quad \int x \cosh^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x^2 - a^2) \cosh^{-1}(x/a) - \frac{1}{4}x\sqrt{x^2 - a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \frac{1}{4}(2x^2 - a^2) \cosh^{-1}(x/a) + \frac{1}{4}x\sqrt{x^2 - a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

$$F 02 \quad \int x^2 \cosh^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} \frac{1}{8}x^3 \cosh^{-1}(x/a) - \frac{1}{8}(x^2 + 2a^2)\sqrt{x^2 - a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \frac{1}{8}x^3 \cosh^{-1}(x/a) + \frac{1}{8}(x^2 + 2a^2)\sqrt{x^2 - a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

$$F 03 \quad \int \frac{\cosh^{-1}(x/a) dx}{x} = \pm \left[\frac{1}{2} \ln^2(2x/a) + \frac{(a/x)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3(a/x)^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(a/x)^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} + \dots \right] + C$$

+ if $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, - if $\cosh^{-1}(x/a) < 0$

$$F 04 \quad \int \frac{\cosh^{-1}(x/a) dx}{x^2} = -\frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right)$$

[- if $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, + if $\cosh^{-1}(x/a) < 0$]

$$F 05 \quad \int \tanh^{-1} \frac{x}{a} dx = x \tanh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 - x^2) + C$$

$$F 06 \quad \int x \tanh^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{4}(x^2 - a^2) \tanh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$F 07 \quad \int x^2 \tanh^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{ax^2}{6} + \frac{x^3}{3} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 - x^2) + C$$